Zadání příkladů pro cvičení z předmětu Programování pro fyziky

Úloha č. 3 — 10. listopadu 2014

Na cvičení jsme se seznámili s Legenderovy polynomy $P_n(x)$, $n = 0, 1, 2, ...$ Kód vyčíslující jejich hodnoty založený na rekurzivních vztazích

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}\Big[(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\Big] , \quad P_0(x) = 1 , \quad P_1(x) = x , \tag{1}$$

najdete na `http://utf.mff.cuni.cz/~ledvinka/?229760` .

Platí, že $P_n(x)$ má právě n kořenů na intervalu $(-1, 1)$. Označme proto $x_{n,k}$ k-tý kořen polynomu $P_n(x)$.

1) Napište funkci `KorenPB(n,k)`, která počítá hodnotu $x_{n,k}$ metodou půlení intervalu. (Půlení opakujte dokud délka intervalu není menší jak 10^{-13}.) Pro počáteční odhad intevalu, na kterém $x_{n,k}$ leží, použijte vztah (Szego 1936)

$$\alpha_{n,k} \le x_{n,k} \le \beta_{n,k} , \quad n = 1, 2, 3, ... , \quad k = 1, 2, ...n, \tag{2}$$

kde odhady

$$\alpha_{n,k} = \cos\left(\frac{n-k+1}{n+1}\,\pi\right), \quad \beta_{n,k} = \cos\left(\frac{n-k+\frac{3}{4}}{n+\frac{1}{2}}\,\pi\right). \tag{3}$$

2) Napište funkci `KorenPN(n,k)`, která počítá hodnotu $x_{n,k}$ (Newtonovou) metodou tečen. (Iterace opakujte, dokud oprava kořene není menší jak 10^{-13}.) Jako počáteční odhad kořene poblíž kterého se $x_{n,k}$ leží, použijte hodnotu $\beta_{n,k}$. Platí, že derivace

$$P'_n(x) = \frac{n+1}{1-x^2}\,\Big[xP_n(x) - P_{n+1}(x)\Big] = -\frac{n}{1-x^2}\,\Big[xP_n(x) - P_{n-1}(x)\Big]. \tag{4}$$

(Tento vztah ukazuje, že $P'_n(x)$ lze spočíst přímo při výpočtu $P_n(x)$, tím ale neztrácejte čas, kvůli zaokrouhlovacím chybám stejně nejde o optimální formulku – to zde ale nevadí.)

3) Hlavní program nechť vypíše dvě hodnoty výrazu

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x_{n,k}^2}. \tag{5}$$

pro $n = 42$ počítané s použitím obou metod.

Zdrojový kód vášeho programu pošlete jako přílohu na email ledvinka@gmail.com, předmět “Priklad 3”.