Zadání příkladů pro cvičení z předmětu Programování pro fyziky

Úloha č. 5 — 6. ledna 2016

Říká se, že srovnání pohybu Měsíce a jablka stojí za objevem gravitačního zákona. Uvážíme-li, že Země a Měsíc obíhají společně okolo Slunce, je na místě otázka, jak daleko až sahá vliv Země a kdy naopak u pohybu Měsíce převládne vliv Slunce. (Teoreticky to vyřešil cca 200 let po I. Newtonovi G. W. Hill [1].)

Zkuste využít současného výkonu osobního počítače a přímo zkoumejte, jak by se Měsíc pohyboval, kdybychom jej nechali obíhat dále od Země. Vyjděte z kódu dostupného na webu ke cvičení [2] a přidejte do roviny ekliptiky k Zemi ještě Měsíc, tedy řešte soustavu obyčejných diferenciálních rovnic:

$$\ddot{\mathbf{x}}_{\oplus} = -GM_{\odot}\frac{\mathbf{x}_{\oplus}}{|\mathbf{x}_{\oplus}|^3} - GM_{☾}\frac{\mathbf{x}_{\oplus} - \mathbf{x}_{☾}}{|\mathbf{x}_{\oplus} - \mathbf{x}_{☾}|^3}, \tag{1}$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{☾} = -GM_{\odot}\frac{\mathbf{x}_{☾}}{|\mathbf{x}_{☾}|^3} - GM_{\oplus}\frac{\mathbf{x}_{☾} - \mathbf{x}_{\oplus}}{|\mathbf{x}_{☾} - \mathbf{x}_{\oplus}|^3}. \tag{2}$$

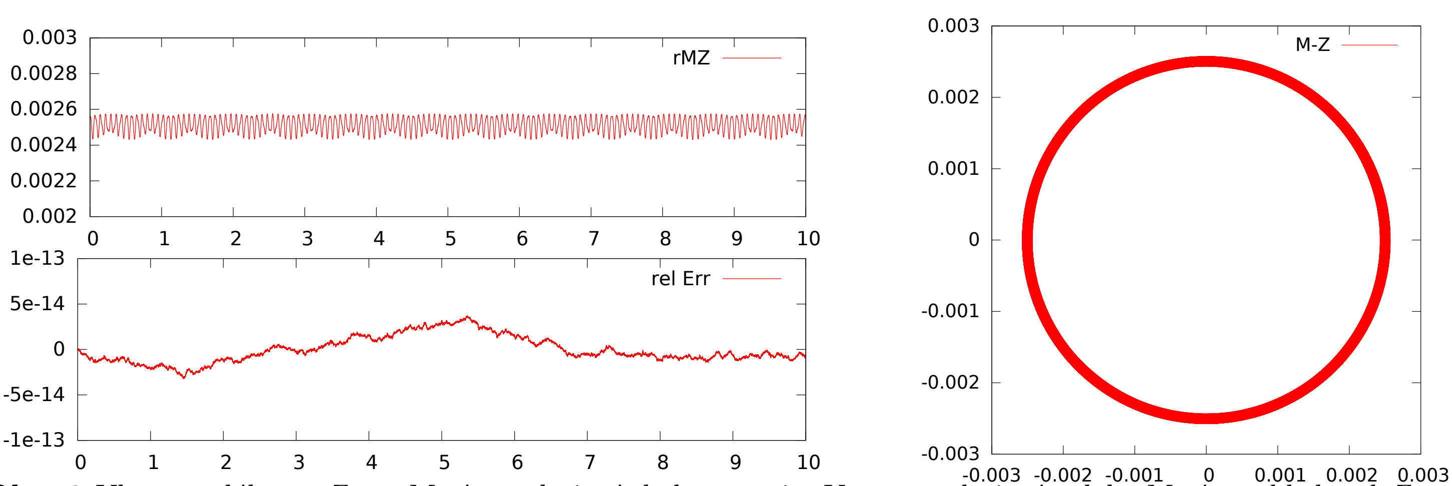
Z důvodů snadného testování správnosti kódu uvažujte jak působení Země na Měsíc, tak příslušnou reakci (druhý člen na pravé straně (1)). Pro takový systém bude platit zákon zachování energie

$$E = \frac{1}{2}M_{\oplus}\left|\dot{\mathbf{x}}_{\oplus}\right|^2 + \frac{1}{2}M_{☾}\left|\dot{\mathbf{x}}_{☾}\right|^2 - \frac{GM_{\odot}M_{\oplus}}{|\mathbf{x}_{\oplus}|} - \frac{GM_{\odot}M_{☾}}{|\mathbf{x}_{☾}|} - \frac{GM_{\oplus}M_{☾}}{|\mathbf{x}_{\oplus} - \mathbf{x}_{☾}|}. \tag{3}$$

Doporučuje se použít jednotky AU, rok a $M_{\odot}$ (hmotnost Slunce), kdy má gravitační konstanta hodnotu (asi) $G = 4\pi^2$. Počáteční podmínky jsou na Obr. 1.

Obr. 1 Počáteční poloha a rychlost Země a Měsíce v souřadném systému, v jehož centru stojí Slunce – parametr a představuje počáteční vzdálenost Země-Měsíc; b určuje počáteční rychlost Měsíce. V počátečním čase jsou rychlosti na průvodiče kolmé.

1. Ukažte, že pro počáteční podmínky $a = 384 \times 10^6$m a $b = 2\pi a/T_{☾}$, kde $T_{☾} \approx 27$ dní Měsíc bez komplikací vydrží ve vaší simulaci obíhat Zemi po dobu 10 let. Nakreslete závislost a) vzdálenosti Země-Měsíc na čase, b) relativní chyby energie (2) na čase a c) trajektorii relativní polohy Měsíce vzhledem k Zemi $\mathbf{x}_{☾} - \mathbf{x}_{\oplus}$.



Obr. 2 Vlevo: vzdálenost Země-Měsíc a relativní chyba energie. Vpravo: relativní poloha Měsíce vzhledem k Zemi.

Nejjednodušší je napsat program, který tabeluje hodnoty času, souřadnic těles energie a pak je vykreslit, např. příkazy

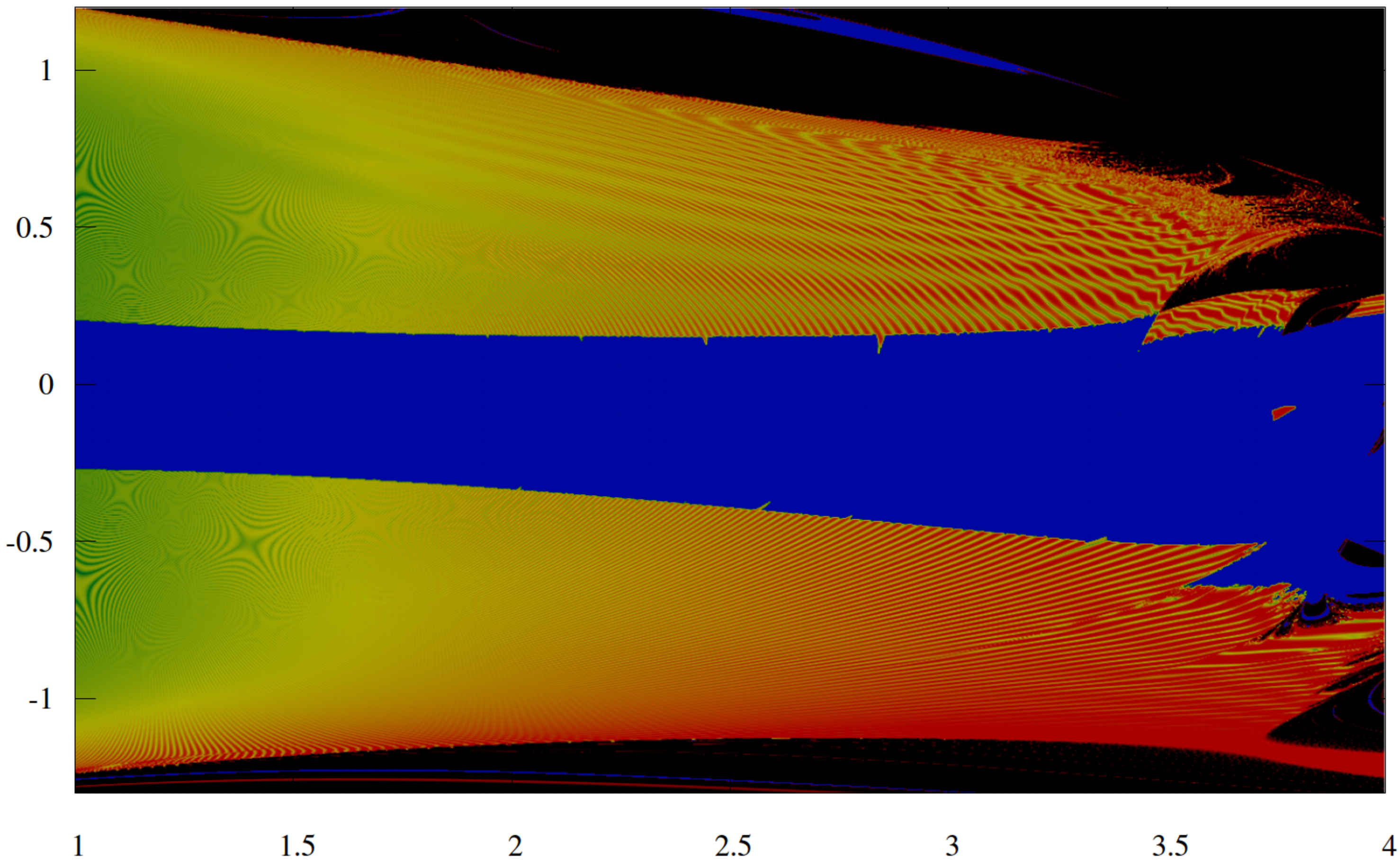
```
plot 'zm.txt' using 1:(sqrt(($2-$4)**2+($3-$5)**2)) with lines
```

případně

```
set size ratio -1
plot 'zm.txt' using ($2-$4):($3-$5) with lines
```

Krok zvolte tak, aby celých 10 let relativní chyba celkové energie nepřesáhla 10^{-9}.

2. Nakreslete obdobné grafy s parametrem $a > 10^9$m pro situace, kdy 2a) Měsíc vydrží ve vaší simulaci obíhat Zemi po dobu 10 let. 2b) Měsíc odletí daleko od Země někdy mezi 5. a 10. rokem. 2c) Měsíc se někdy po 5. roce srazí se Zemí. Pro představu, na Obr. 3. je vzdálenost Země-Měsíc po 10 letech simulace v závislosti na volbě parametrů a a b.



Obr. 3 Vzdálenost Země-Měsíc po deseti letech v závislosti na počátečních podmínkách určených relativními hodnotami parametrů a/a_0 (vodorovná osa) a $b/b_0\sqrt{a/a_0}$ (svislá osa), a_0 a b_0 jsou hodnoty z bodu 1. zadání. Černá barva odpovídá vzdálenosti přesahující 0.1 AU, modrá srážce Měsíce se Zemí.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Hill_sphere
[2] http://utf.mff.cuni.cz/~ledvinka/?229760 Bod 19.
(případně http://utf.mff.cuni.cz/~ledvinka/?229888 Bod 26.)