

Zadání příkladů pro cvičení z předmětu Programování pro fyziky

Úloha č. 5 — 29. prosince 2016

Na cvičení jsme se seznámili s řešením soustav obyčejných diferenciálních rovnic. Zajímavým příkladem, kde nelze vystačit s analytickým řešením a je třeba rovnice řešit numericky, je *dvojkyvadlo*. To vznikne tak, že na matematické kyvadlo (to už umíme řešit) pověsíme ještě jedno. Pro jednoduchost bude mít stejně dlouhý závěs a stejně hmotné závaží.

Místo jedné obyčejné diferenciální rovnice $\ddot{\psi} + \sin \psi = 0$ nyní budeme mít dvě navzájem neoddělitelně provázané

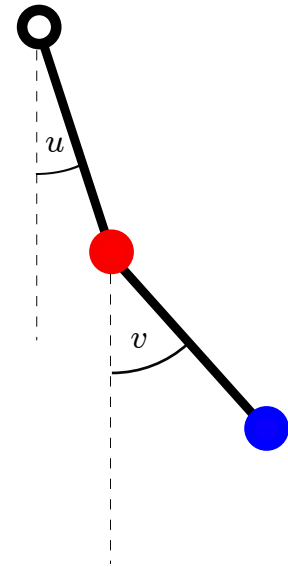
$$\ddot{u} = -\frac{2 \sin(u-v) [\dot{v}^2 + \dot{u}^2 \cos(u-v)] + \sin(u-2v) + 3 \sin u}{3 - \cos 2(u-v)},$$

$$\ddot{v} = \frac{2 \sin(u-v) (2\dot{u}^2 + \dot{v}^2 \cos(u-v) + 2 \cos u)}{3 - \cos 2(u-v)}.$$

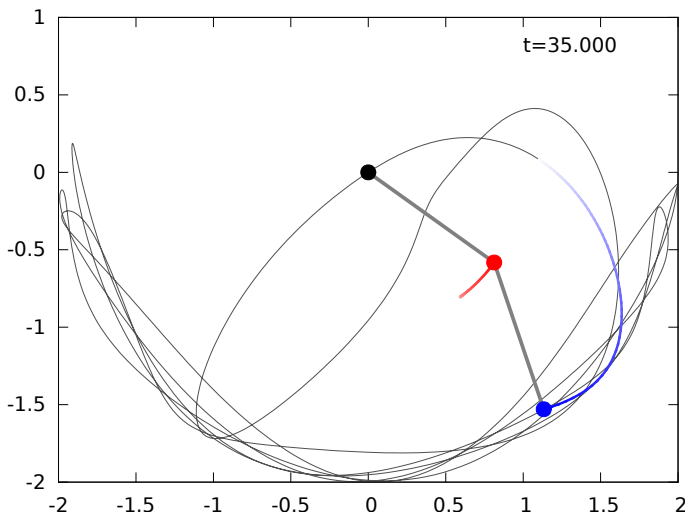
Odvodit tyto rovnice se naučíte příští rok v teoretické mechanice, kurs programování máme ale už letos. Stejně jako dříve u matematického kyvadla, i zde pro jednoduchost ve všech rovnicích uvažujeme „bezrozměrný“ čas $\tau = t\sqrt{g/l}$. Pro kontrolu přesnosti výpočtu budeme ještě potřebovat vzorec pro celkovou (bezrozměrnou) energii obou závaží:

$$E = \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \dot{v}^2 + \dot{u}\dot{v} \cos(u-v) - 2 \cos u - \cos v.$$

Modifikujte program ze cvičení počítající pomocí metody „midpoint“ pohyb jednoduchého matematického kyvadla tak, aby řešil výše uvedené pohybové rovnice dvojkyvadla. Jako počáteční polohu obou závaží zvolte $u(0) = v(0) = \pi/2$, $\dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$.



Obr. 1. Zavední úhlů u a v .



Obr. 2. Trajektorie dolního závaží a poloha dvojkyvadla v $\tau = 35$. Rychlost je znázorněna délkou zanechané stopy. Návod jak z vašich dat vytvořit takovýto obrázek v pohybu najdete na <http://utf.mff.cuni.cz/~ledvinka/2kyv>

1. Nechť váš program vypisuje hodnoty $\tau, u, v, E, x_1, y_1, x_2, y_2$ pro $\tau \in (0, 35)$ s krokem $\Delta\tau = 0.025$, kde $x_1 = \sin u, y_1 = -\cos u, x_2 = \sin u + \sin v, y_2 = -\cos u - \cos v$ jsou kartézské souřadnice obou závaží.

2. Naleznete takovou hodnotu časového kroku při řešení diferenciální rovnice, aby v uvažovaném časovém intervalu chyba energie nepřesáhla 10^{-7} . Kvůli pohodlnému vypisování hodnot volte tento krok jako zlomek tabulačního kroku $\Delta\tau$.

3. Pro tuto hodnotu kroku nakreslete závislost $E(\tau)$ příkazem

```
plot 'data.txt' using 1:4 with lines
```

4. Ze stejných dat vykreslete trajektorii druhého kyvadla

```
set size ratio -1
```

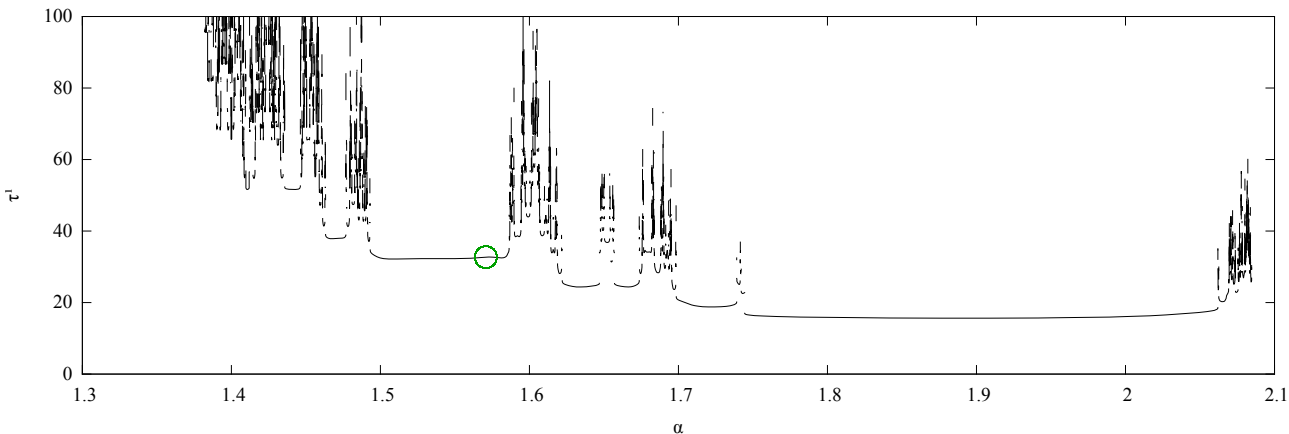
```
plot 'data.txt' using 7:8 with lines
```

5. Napište druhou verzi programu, která co nejpřesněji (> 6 platných cifer) vypíše čas τ_1 , ve kterém poprvé projde spodní kyvadlo místem závěsu, $|u - v| = \pi$. Protože znáte časovou derivaci veličiny $z = u - v \mp \pi$, tj. $\dot{z} = \dot{u} - \dot{v}$, lze použít jeden krok Newtonovy metody a odhad hodnoty kořenu $z(\tau_1) = 0$ nalézt jako opravu $\tau_1 \doteq \tau_* - z(\tau_*)/\dot{z}(\tau_*)$, kde τ_* je hodnota času, kdy mezi jednotlivými kroky řešení dif. rovnice poprvé zaznamenáme změnu znaménka výrazu $z(\tau)$.

6. Ve třetí verzi programu tabelujte závislost $\tau_1(\alpha)$, kde α je počáteční výchylka $u(0) = v(0) = \alpha$. Nehleďte $\tau_1 > 300$. Z výstupu programu vykreslete závislost za pomoci příkazu

```
plot 'tau0.txt' with lines linewidth 0.3
```

Rozsah α zvolte podobně jako na Obr. 3. Jak je na něm vidět, uvažovaný systém vykazuje chaotické chování a každé vykreslení funkce $\tau_1(\alpha)$ je jen přiblížením ke skutečnosti. Jedním z estetických triků při kreslení jejího grafu je vložení prázdných řádků do výstupu programu tam, kde máte důvod domnívat se, že mezi oběma tabelovanými hodnotami je funkce nespojitá.



Obr. 3. Závislost hodnoty τ_1 na úhlu vypuštění obou závaží α není hezká funkce. V okolí hodnoty $\alpha = \pi/2$ uvažované v bodech 1-5 (označeno kroužkem) ale problémy nejsou.

Na obvyklou emailovou adresu pošlete řešení v následující podobě:

- Zdrojový kód programu z bodu 1.
- V textu emailu uveďte, jak velký krok jste zvolili, abyste splnili požadavek na přesnost řešení.
- Zašlete obrázek, který získáte v bodě 3. příkazy
`set term pdf; set output 'uloha5bod3.pdf'; replot; unset term; unset output`
- Zašlete obrázek, který získáte v bodě 4. příkazy
`set term pdf; set output 'uloha5bod4.pdf'; replot; unset term; unset output`

Již za tyto části úlohy dostanete 8 bodů, takže pokud vám to pro získání celkových 32 bodů stačí

- Přiložte kód programu a v textu emailu uveďte, jakou hodnotu τ_1 jste v bodě 5. našli a proč se domníváte, že je správně na 6 platných cifer (4 body).
- Přiložte kód programu a vaši verzi Obr. 3. výše, kterou jste z jeho výstupu získali (≥ 2 body).