

Zadání příkladů pro cvičení z předmětu Programování pro fyziky

Úloha č. 4

Napište program, který bude počítat součet prvků matice vzniklé inverzí tzv. Hilbertovy matice. (Zadání vychází z úlohy, kterou pro vaše spolužáky připravil Dr. Hanyk: `goo.g1/9GcL24`).

Hilbertova matice je čtvercová matice $n \times n$ s prvky určenými vztahem $H_{ij} = 1/(i + j - 1)$ (pokud číslujeme řádky a sloupce $i, j = 1..n$, pro c-čkové indexování $i, j = 0..n-1$ máme jmenovatel $i + j + 1$), tedy

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & & & & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

Uvidíte, že inverzní matice H_n^{-1} je čtvercová matice s překvapivě velkými absolutními hodnotami prvků. Napište program, který pro $n = 1..12$ vypíše tři sloupečky čísel n , $\sum(H_n^{-1})_{ij}$ a $\max|(H_n^{-1})_{ij}|$, kde součet a maximum procházejí všechny prvky matice. Výstup tedy bude mít tvar

```
1  1.0000  1.0000
2  4.0000  12.0000
..  ...    ....
12 ...    ....
```

Představuji si, že vyjdete z našeho programu na cvičení, kde jsme sestavili kód pro výpočet determinantu matice za použití částečné pivotace a rozšíříte jej tak, že místo eliminace čtvercové matice do horní trojúhelníkové matice bude nyní provádět Gauss-Jordanovu eliminaci obdélníkové matice $2n \times n$. Ta je na počátku obsazena invertovanou maticí a maticí jednotkovou, které se eliminací postupně mění na jednotkovou matici a transponovanou matici inverzní k té původní. Tuto metodu i ukázkou kódu jsme měli na přednášce, zde ale pro jistotu připomenu, že klíčové kroky jsou (i) (tzv. částečná) pivotace, tedy nalezení vhodného řádku, jehož přehozením se na diagonále ocitne v absolutní hodnotě největší možný prvek, (ii) normalizace řádku, tedy jeho vydělení tak, aby na diagonále byla jednička a (iii) eliminace, tedy odečtení vhodných násobků příslušného řádku od řádků ostatních tak, aby jediný nenulový člen v daném sloupci byl na diagonále. (Pro $n = 5$ najdete průběh eliminace na `goo.g1/6zvRAC`).

Program podle zadání potřebuje pracovat s různě velkými maticemi, 1×2 až 12×24 . Stačí, když použijete dostatečně velké obdélníkové pole a v něm pak pracujete s jeho vhodně velkou částí.

Zdrojový kód vašeho programu a jeho výstup mi zašlete na emailovou adresu `ledvinka@gmail.com`.