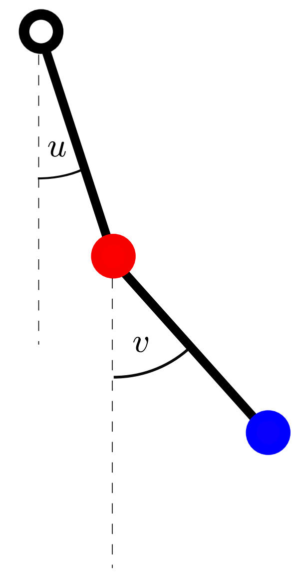
Zadání příkladů pro cvičení z předmětu Programování pro fyziky

Úloha č. 5 — 29. prosince 2018



Na cvičení jsme se seznámili s řešením soustav obyčejných direneciálních rovnic. Zajímavým příkladem, kde nelze vystačit s analytickým řešením a je třeba rovnice řešit numericky, je *dvojkyvadlo*. To vznikne tak, že na matematické kyvadlo (to už umíme řešit) pověsíme ještě jedno. Pro jednoduchost bude mít stejně dlouhý závěs a stejně hmotné závaží.

Místo jedné obyčejné diferenciální rovnice $\ddot{\psi}+\sin\psi = 0$ nyní budeme mít dvě navzájem neoddělitelně provázané

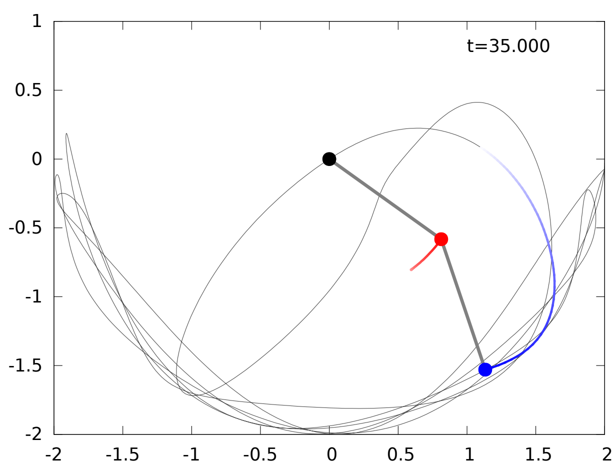
$$\ddot{u} = -\frac{2\sin(u-v)\left[\dot{v}^2 + \dot{u}^2\cos(u-v)\right] + \sin(u-2v) + 3\sin u}{3-\cos 2(u-v)},$$

$$\ddot{v} = \frac{2\sin(u-v)\left(2\dot{u}^2 + \dot{v}^2\cos(u-v) + 2\cos u\right)}{3-\cos 2(u-v)}.$$

Odvodit tyto rovnice se naučíte příští rok v teoretické mechanice, kurs programování máme ale už letos. Stejně jako dříve u matematického kyvadla, i zde pro jednoduchost ve všech rovnicích uvažujeme „bezrozměrný“ čas $\tau = t\sqrt{g/l}$ a derivace podle něj. Pro kontrolu přesnosti výpočtu budeme ještě potřebovat vzorec pro celkovou (bezrozměrnou) energii obou závaží:

$$E = \dot{u}^2 + \frac{1}{2}\dot{v}^2 + \dot{u}\dot{v}\cos(u-v) - 2\cos u - \cos v.$$

Modifikujte program ze cvičení pro pohyb jednoduchého matematického kyvadla tak, aby řešil výše uvedené pohybové rovnice dvojkyvadla. Jako počáteční polohu obou závaží zvolte $u(0) = v(0) = \pi/2$, $\dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$.



Obr. 2. Trajektorie dolního závaží a poloha dvojkyvadla v $\tau = 35$. Rychlost je znázorněna délkou zanechané stopy. Návod jak z vašich dat vytvořit takovýto obrázek v pohybu najdete na `http://utf.mff.cuni.cz/~ledvinka/2kyv`

1a. Napište proceduru `Cast1(metoda,deleniT)`, která s použitím numerické metody určené prvním argumentem řeší zkoumané pohybové rovnice s fixním časovým krokem $\delta\tau = 0.025/\text{deleniT}$ a vypisuje hodnoty $\tau, u, v, E, x_1, y_1, x_2, y_2$ pro $\tau \in \langle 0, 35\rangle$ s tabelačním krokem $\Delta\tau = 0.025$. Kartézské souřadnice obou závaží jsou $x_1 = \sin u, y_1 = -\cos u, x_2 = \sin u + \sin v, y_2 = -\cos u - \cos v$.

1b. Pro nejméně dvě metody uvedené na webu cvičení (příklady `cv11e_ODE3.pas` resp. `cv11f_ODE3.cpp`) nalezněte takovou hodnotu časového kroku při řešení diferenciální rovnice (tedy celočíselného parametru deleniT), aby v uvažovaném časovém intervalu chyba energie E nepřesáhla 10^{-7}.

1c. Pro tuto hodnotu kroku nakreslete závislost $E(\tau)$ příkazem

```
plot 'data.txt' using 1:4 with lines
```

1d. Ze stejných dat vykreslete trajektorii druhého kyvadla

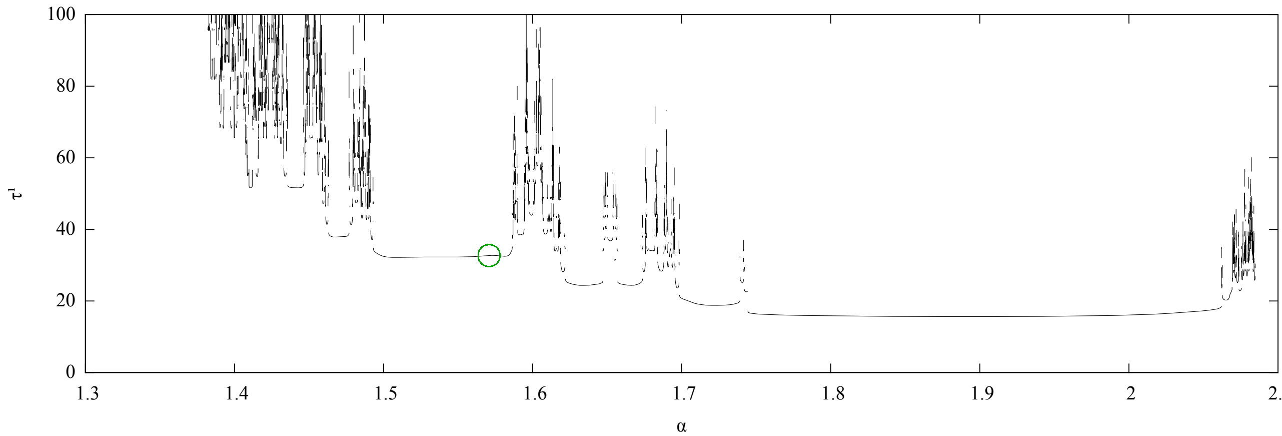
```
set size ratio -1
plot 'data.txt' using 7:8 with lines
```

2. Do kódu programu přidejte a následně zavolejte proceduru `Cast2(metoda,deleniT)`, která co nejpřesněji vypíše čas τ_1, ve kterém poprvé projde spodní kyvadlo místem závěsu, $|u - v| = \pi$. Tento čas velmi pravděpodobně nebude násobkem kroku použitého při řešení a je tedy potřeba poslední krok opakovat s různou hodnotu δt tak dlouho, až budete znát hodnotu τ_1 s dostatečnou přesností. Kromě půlení intervalu lze použít i Newtonovu metodu, protože znáte časovou derivaci veličiny $z := u - v \mp \pi$, tj. $\dot{z} = \dot{u} - \dot{v}$ a odhad hodnoty kořenu $z(\tau_1) = 0$ získáte s pomocí kouzelné formulky metody tečen: $\tau_1 \doteq \tau_* - z(\tau_*)/\dot{z}(\tau_*)$, kde τ_* je hodnota času, kdy mezi jednotlivými kroky řešení dif. rovnice poprvé zaznamenáme změnu znaménka výrazu $z(\tau)$. Nalezněte aspoň pro dvě metody řešení dif. rovnic potřebné časové kroky, která dají hodnotu τ_1 aspoň na 6 platných cifer.

3. Do kódu programu přidejte a následně zavolejte proceduru `Cast3(metoda,deleniT)`, která tabelujte závislost $\tau_1(\alpha)$, kde α je počáteční výchylka $u(0) = v(0) = \alpha$. Nehledejte $\tau_1 > 120$. Procedura by měla data psát do souboru `tau1.txt`. Dále vykreslete závislost $\tau_1(\alpha)$ za pomoci příkazu

```
plot 'tau1.txt' with lines linewidth 0.3
```

Rozsah α zvolte podobně jako na Obr. 3.



Obr. 3. Závislost hodnoty τ_1 na úhlu vypuštění obou závaží α není hezká funkce. V okolí hodnoty $\alpha = \pi/2$ uvažované v části úlohy 2) (označeno kroužkem) ale problémy nejsou.

Na obvyklou emailovou adresu pošlete řešení v následující podobě:

- Zdrojový kód programu z bodu 1.
- V textu emailu uveďte, jak velký krok jste zvolili, abyste splnili požadavek na přesnost řešení v části 1b).
- Zašlete obrázek, který získáte v bodě 1c) příkazy
  `set term pdf; set output 'uloha5bod1c.pdf'; replot; unset term; unset output`
- Zašlete obrázek, který získáte v bodě 1d) příkazy
  `set term pdf; set output 'uloha5bod1d.pdf'; replot; unset term; unset output`

Již za tyto části úlohy dostanete 7 bodů, takže pokud vám to stačí ....

- Přidejte i řešení úlohy 1b) a v textu emailu uveďte, jakou hodnotu τ_1 jste v bodě 2. našli (5 body).
- Přidejte i řešení úlohy 1c) a vaši verzi Obr. 3. výše, kterou jste z jeho výstupu získali ($\geq$2 body, Rada: Vypsání prázdného řádku přeruší malovanou čáru. To je namístě, pokud máte důvod se domnívat, že mezi dvěma tabelovanými hodnotami je funkce nespojitá.)