

Zadání příkladu pro cvičení z předmětu Programování pro fyziky

Úloha č. 4 — 5. prosince 2019

Z mechaniky znáte dobře kmity harmonického oscilátoru buzeného silou s harmonickým časovým průběhem. V tomto příkladě půjde o složitější systém – membránu daného tvaru uchycenou podél svého obvodu. Místo jedné výchylky harmonického oscilátoru tak budeme hledat výchylku ve vybraných bodech membrány. Váš program bude muset pořídit seznam takových bodů, sestavit a vyřešit soustavu rovnic určující jejich výchylku a na konec výsledky vypsat v požadovaném formátu, aby šly hezky vykreslit.

Uvažujte oblast Ω , která leží uvnitř čtverce $\langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle$. Oblast je určena podmínkou

$$\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1.$$

1. Napište funkci `UvnitrXY`, která vrátí `true` právě když její parametry x, y leží uvnitř Ω .

Představte si, že celý čtverec pokrývá mříž bodů o souřadnicích

$$x = \frac{i}{n}, \quad y = \frac{j}{n}, \quad i, j = -n, -n + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n - 1, n,$$

kde n je vhodně velké celé číslo. V rámci programu by n mohl představovat globální konstantu. Taková mříž je znázorněna pro konkrétní oblast Ω na Obrázku 1.

2. Napište proceduru nebo funkci, která vytvoří seznam bodů mříže S , které pro dané n leží uvnitř Ω . Ve finálním výpočtu zvolte n tak velké, aby počet bodů mříže v seznamu byl asi 1000. Délka seznamu S nechť v dalším představuje dimenzi D vektorového prostoru \mathbb{R}^D .

3. Napište funkci `VzdalenostBoduVMrizi(a,b)`, která se podívá na a -tý a b -tý bod v seznamu S a vrátí hodnotu $|i_a - i_b| + |j_a - j_b|$, kde $\{i_a, j_a\}$ jsou celočíselné souřadnice a -tého bodu v seznamu S . Podobně $\{i_b, j_b\}$ pro b -tý bod v seznamu S . Odsud je vidět, že bude výhodné, pokud položky seznamu budou informace o celočíselných souřadnicích bodu obsahovat.

4. Napište funkci, která pro dané reálné číslo κ (související s frekvencí již působí budící síla) vrátí řešení soustavy lineárních rovnic

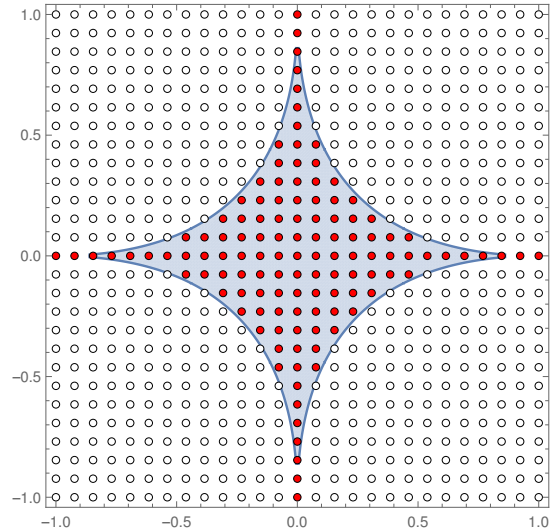
$$\mathbf{A}\vec{z} = \vec{b},$$

kde $\vec{z}, \vec{b} \in \mathbb{R}^D$. Jde o maticový zápis tzv. Helmholtzovy rovnice, již při studiu ještě potkáte. Vektor \vec{b} má složky dané amplitudou síly, která na membránu působí v jednotlivých bodech. Předpokládejte, že je dána předpisem

$$b_a = 7x_a + 5y_a + 3,$$

kde x_a, y_a jsou souřadnice a -tého bodu. Na hodnotě κ závisí jen matice \mathbf{A} , která jednak popisuje sílu, již na sebe působí sousední body membrány a také zahrnuje zrychlení kmitavého pohybu daného bodu, a je dána předpisem

$$A_{cd} = \begin{cases} 1 & \text{vzdalenost_bod_u_v_mrizi}(c, d) = 1, \\ \frac{\kappa}{n^2} - 4 & \text{pokud } c = d, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (1)$$



Obrázek 1. Vyplněná plocha znázorňuje oblast Ω , body mříže, jenž leží uvnitř ní, jsou zvýrazněné.

5. Napište proceduru, která pro dané κ vypíše nalezené řešení soustavy \vec{z} . Abychom mohli výstup snadno vykreslit, je potřeba vypsát hodnoty ve všech bodech čtvercové mříže v podobě tří sloupců čísel

$$x_i \quad y_i \quad z_{\{i,j\}},$$

kde i a j probíhají hodnoty $-n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n$, tedy celou mříž, a kde

$$z_{\{i,j\}} = \begin{cases} 0 & \text{pokud bod } \{x_i, y_i\} \text{ není na seznamu,} \\ \frac{z_a}{\max |z_k|} & \text{pokud bod } \{x_i, y_i\} \text{ je na seznamu na } a\text{-tém místě.} \end{cases} \quad (2)$$

Mimo oblast Ω je tedy stále nutno vypsát kartézské souřadnice a výchylku uvést nulovou.

Pozor! Při procházení bodů mříže během vypisování je třeba je po ukončení jednoho každého sloupce mříže potřeba vypsát navíc právě jeden prázdný řádek. (Příklad dat je uveden na webu cvičení.)

Dělení hodnotou $\max |z_k|$ zajistí, že vypisovaná čísla $z_{\{i,j\}}$ jsou v rozmezí $-1..1$. Jejich hodnoty stačí vypisovat na tři desetinná čísla.

6. Výstup pro hodnotu okolo $\kappa = 400$ přeměňte do souboru `data.txt` a poté vymalujte v gnuplotu příkazem

```
set palette defined (0 0 1 1, 0.4 0 0 1, 0.5 0 0 0, 0.6 1 0 0, 1 1 1 0)
set cbrange [-1:1]
set view map
set size ratio -1
set pm3d interpolate 8,8
```

```
splot "data.txt" index 0 with pm3d
```

Poslední příkaz `plot` opakujte tak dlouho, dokud nebudete s daty spokojeni. Experimentujte s volbou κ . Poté získáte soubor `uloha4.png` za pomoci příkazů

```
set term png truecolor
set output "uloha4.png"
replot
unset term
```

Váš program (v Pascalu či C/C++), jeho textový výstup a obrázek (ve formátu png) pošlete jako přílohu emailem na adresu `ledvinka@gmail.com` Výstup programu pošlete pokud možno komprimovaný.

Q&A:

Jak mám napsat tak dlouhý program? Nikdy jsem to nedělal.

Je dobré program odladovat po částech.

- V prvním kroku lze po napsání bodu 1. a 2. zkontrolovat, zda počet bodů v oblasti Ω zhruba odpovídá poměru plochy Ω a čtverce o hraně 2.
- V dalším kroku lze napsat zjednodušenou variantu procedury podle bodu 5., která místo $z_a/\max |z_k|$ vypíše jen číslo 1. S použitím příkazů gnuplotu z bodu 6. lze vypsána data vykreslit a zkontrolovat, že mají tvar oblasti Ω .
- Následně lze napsat zbytek kódu ovšem bez sestavování matice \mathbf{A} a místo řešení soustavy rovnic počítat hodnotu \vec{z} pouhým přiřazením $\vec{z} = \vec{b}$. Po doplnění kódu počítajícího $z_a/\max |z_k|$ v proceduře pro vypisování výsledků by měl vyjít velmi srozumitelný obrázek lineární funkce souřadnic omezené na oblast Ω .
- Nakonec je třeba doplnit sestavení matice a použít funkci pro řešení soustavy lineárních rovnic Gaussovou-Jordanovou eliminací ze cvičení, kterou jsme tam i odladili.