Úloha č. 7 z předmětu Programování pro fyziky

Úvod

Všeobecně se ví, že předpověď stáčení přísluní Merkuru byla obrovským úspěchem Eisteinovy obecné teorie relativity. Podle Keplerových zákonů obíhají planety okolo Slunce po dané elipse. Newton ukázal, že eliptické trajektorie, stejně jako ostatní Keplerovy zákony jsou důsledkem všeobecného gravitačního zákona $F \sim 1/r^2$. Merkur je planetou nejbližší Slunci a jeho dráha je výrazně eliptická. Ke konci 19. století ale bylo z pozorování jasné, že se směr velké poloosy této elipsy (vzhledem ke hvězdám) velmi pomalu mění a trajektorie planety není přesně elipsa. V literatuře nalezneme, že velikost tohoto *posuvu perihelia* činí asi 574 úhlových vteřin za století a že jde především o důsledek gravitačního vlivu ostatních planet na Merkur, přičemž před Eisteinem zbývalo nebeským mechanikům nevysvětlených 43 úhlových vteřin za století. Eistein pak ukázal, že nejde ani o chybu v pozorováních ani o vliv dosud neznámé planety, ale o důsledek toho, že newtonovská fyzika nepopisuje gravitaci správně. Tímto objevem však jako by však zastínil obrovský úspěch fyziky newtonovské, která dokázala velmi přesně vysvětlit původ oněch 531 úhlových vteřin za století. K tomu potřebovala znát nejen orbitální parametry planet (ty zhruba znal již Kepler), ale též určit jejich hmotnost.

Zadání

Ukažte, že když do dále uvedeného zjednodušeného modelu pohybu planety Merkur dosadíte dnes velmi přesně známé orbitální parametry planet, dostanete zhruba odpovídající posuv přísluní Merkuru. Ve zjednodušeném rovinném modelu předpokládejte rovnoměrný kruhový pohyb $\vec{R}_i = [X_i, Y_i]$, $X_i = \rho_i \cos \omega_i t$, $Y_i = \rho_i \sin \omega_i t$, $i = 1..K$ vámi vybraných K planet s výjimkou Merkura, a to po vhodně velikých (ρ_i) kruhových drahách s odpovídajícími dobami oběhu ($2\pi/\omega_i$). Protože Newtonovy pohybové rovnice platí pouze v inerciálním systému, nastavte polohu Slunce $\vec{R}_0$ v každém okamžiku tak, že těžiště vaší sluneční soustavy se nachází v počátku souřadnic, tj. ($\sum_{i=0}^{K} M_i \vec{R}_i = 0$). Pohyb Merkura pak při zanedbání jeho hmotnosti nalezněte řešením Newtonovy pohybové rovnice

$$\ddot{\vec{r}} = -\sum_{i=0}^{K} G M_i \frac{\vec{r} - \vec{R}_i}{|\vec{r} - \vec{R}_i|^3} \tag{1}$$

Rovnici řešte použitím hrubé síly pomocí tzv. Eulerovy metody, která předpokládá, že planeta se pohybuje po trajektorii v podobě mnohoúhelníku (viz dále). Z tohoto řešení určete směry okamžiků přísluní a nakreslete závislost tohoto směru (měřeno v úhlových vteřinách) na čase a to po dobu 100 let.

Rady

Při výkonu současných osobních počítačů je použitelná pro řešení (1) následující metoda řešení rovnice $d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{a}(\vec{r}, t)$

1. Čas t budeme chápat rozdělený na dílky dt
2. Máme hodnotu polohy $\vec{r}$ a rychlosti $\vec{v}$ v čase t
3. Spočteme zrychlení $\vec{a}$ a změníme hodnotu rychlosti z $\vec{v}$ na $\vec{v} + \vec{a}dt$
4. Změníme hodnotu polohy z $\vec{r}$ na $\vec{r} + \vec{v}dt$
5. Změníme hodnotu času z t na $t + dt$
6. Máme novou hodnotu polohy $\vec{r}$ a rychlosti $\vec{v}$ v novém čase t a jdeme na bod 3.

Při použití této metody nezapomeňte nejdříve vyzkoušet, že bez vlivu ostatních planet je stáčení perihelia Merkuru za celé století zanedbatelné. Uvidíte, že na to budete potřebovat velmi malý časový krok.

Aby to celé fungovalo, potřebujeme znát počáteční polohu Merkuru. Zvolte třeba právě okamžik přísluní, kdy je nejblíže Slunci (46 000 000 km) a má největší rychlost (58.98 km/s).

Hodnoty orbitálních parametrů planet ovlivňujících pohyb Merkuru naleznete na adrese
http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/planetfact.html
přičemž vzhledem ke zjednodušení na kruhový pohyb budete potřebovat pouze hodnotu velké poloosy ("Semimajor axis"), dobu oběhu (lze buď spočíst z předchozího údaje nebo opsat z kolonky "Sidereal orbit period") a hmotnost planety ("Mass"). Na počátku planety umístěte na libovolný bod jejich kruhové dráhy, pro účel úlohy je to nepodstatné.

Mezi vámi vybranými planetami neopomeňte Jupiter.

Z vámi vypočítaných poloh Merkura je třeba vypočíst úhlovou souřadnici ϕ_0 každého přísluní. To lze velmi snadno provést tak, že se spolu s řešením pohybové rovnice hledají okamžiky, kdy se začíná Merkur vzdalovat od Slunce. Označíme-li vzdálenost Merkur-Slunce $d = |\vec{d}| = |[d_x, d_y]|$, nastane přísluní v okamžiku kdy $\dot{d} = 0$, tj.když $w = d_x \dot{d}_x + d_y \dot{d}_y = 0$. Stačí tedy v každém okamžiku spočíst hodnotu w (na to musíme zderivovat výše uvedenou podmínku nehybného těžiště, z níž vyplývá vektor rychlosti pohybu Slunce $\dot{\vec{R}}_0$, neboť $\vec{d} = \vec{r} - \vec{R}_0$, $\dot{\vec{d}} = \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{R}}_0$), a v okamžiku, kdy se při úhlu ϕ_1 zrovna mění ze záporné hodnoty w_1 do kladné hodnoty w_2 při úhlu ϕ_2, stačí použít argument *regula falsi* a nalézt odhad hodnoty úhlu ϕ_0 přísluní.