Multipólový rozvoj pro axiálně symetrické zdroje

1. Uvažujte definici Legendreových polynomů

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xw+x^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l P_l(w) \ . \tag{1}$$

Ukažte, že
a) $P_0(w) = 1, P_1(w) = w, P_2(w) = \frac{3}{2}w^2 - \frac{1}{2}$. Je vhodné nejprve využít vztahu

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 \mp ...$$

(jen v krajním případně počítat derivace $(1/s)' = (w-x)/s^3$, $(1/s)'' = (3w^2 - 4xw + 2x^2 - 1)/s^5$)
b) $P_l(w)$ je polynom stupně l v proměnné w,
c) $P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l$,
d) jsou-li r a ϑ sférické souřadnice (zkuste položit $x = a/r$),

$$\Delta \frac{P_l(\cos\vartheta)}{r^{l+1}} = 0 \ . \tag{2}$$

Povšimněte si, že generující vzorec pro Legenderovy polynomy (1) souvisí s potenciálem náboje umístěného na ose z ve vzdálenosti a od počátku.

2. Ukažte, že elektrostatické pole axiálně symetrického zdroje lze na ose $z > 0$ a daleko od zdrojů psát ve tvaru

$$\Phi(x=0, y=0, z) \ = \ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q_l}{z^{l+1}} \ , \tag{3}$$

kde koeficienty q_l jsou dány vlastnostmi zdroje

$$q_l = \int_V \rho(\vec{x}')(r')^l P_l(\cos\vartheta') d^3x' \tag{4}$$

3. Ukažte, že za předpokladu, že pole daleko od zdrojů lze rozvinout do řady v $1/r$ (to je důsledkem předpokladů obecného multipólového rozvoje, jaké platí i pro tento speciální případ), je pole buzené zdrojem popsáno multipólovým rozvojem

$$\Phi(r, \vartheta) \ = \ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} q_l \frac{P_l(\cos\vartheta)}{r^{l+1}} \ , \tag{5}$$

Poznámka. Legendrovy polynomy jsou vzorovým příkladem ortogonální báze funkcí, na rozdíl od kulových funkcí je jejich normalizace a fáze volena vztahem $P_l(1) = 1$ a tak relace ortogonality vypadá následovně

$$\int_{-1}^{1} P_l(z) P_{l'}(z) dz = \int_{-1}^{1} P_l(\cos\vartheta) P_{l'}(\cos\vartheta) d\cos\vartheta = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \tag{6}$$

a úplnost dokládá vzorec

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\cos\vartheta) P_{l'}(\cos\vartheta') = \delta(\cos\vartheta - \cos\vartheta') = \frac{1}{\sin\vartheta}\delta(\vartheta - \vartheta') \tag{7}$$

Zde je explicitně připomenut vztah $\delta(f(x)) = 1/f' \ \delta(x - x_0)$.

Příklad. Jako prototyp netriviálního elektrostatického pole nám poslouží rovnoměrbě nabitá tyčka (náboj Q, délka $2a$):

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{2a}\ln\frac{z-a-\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}}{z+a-\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}} \tag{8}$$

Uvažujme hodnoty potenciálu na poloose $z>0$

$$4\pi\epsilon_0\Phi(z) = \frac{Q}{2a}\ln\frac{z+a+\sqrt{(z+a)^2}}{z-a+\sqrt{(z-a)^2}} = \frac{Q}{2a}\ln\frac{z+a}{z-a} = \frac{Q}{2a}\ln\frac{1+\frac{a}{z}}{1-\frac{a}{z}} \tag{9}$$

Při uvážení rozvoje $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + ...$ dostaneme

$$4\pi\epsilon_0\Phi(z) = \frac{Q}{z}\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{z}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{a}{z}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{a}{z}\right)^6 + ...\right) \tag{10}$$

Protože platí, že $P_l(\cos 0) = 1$, musí Q,$Qa^2/3$,$Qa^4/5$ atd. být koeficienty q_0,q_2,q_4 atd. v multipólovém rozvoji .
Ověříme, zda koeficienty souhlasí:

$$q_l = \int_{-a}^{a} \frac{Q}{2a}\,|z|^l\,P_l(\cos\vartheta)\,dz, \qquad \cos\vartheta = \frac{z}{|z|} = \operatorname{sgn} z \tag{11}$$

Pro lichá l je integrand lichá funkce (nebot $P_{2k+1}(\pm 1) = \pm 1$) a tak nenulové zůstanou jen sudé koeficienty

$$q_{2n} = \frac{Q}{2n+1}a^{2n} \tag{12}$$

totožné s těmi, jaké jsme určili z rozvoje potenciálu podél osy z.

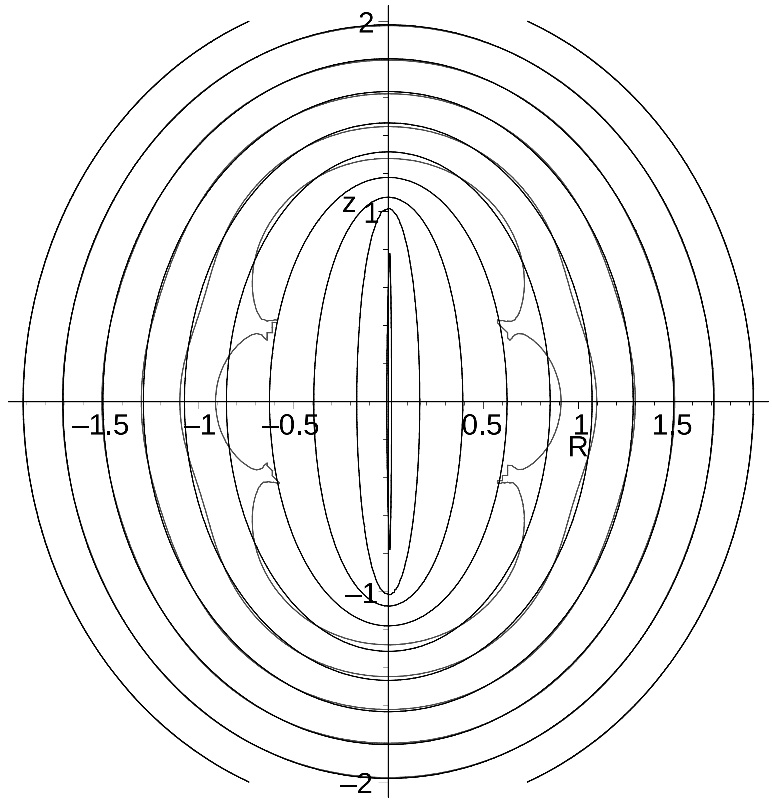

Figure 1: Srovnání ekvipotenciál pole nabité úsečky a prvních třech nenulových členů multipólového rozvoje. Povšimněte si, jak se projevuje existence poloměru koncergence řady v $1/r$. Poloměr konvergence je 1.