Elektrostatika

Základy vektorové analýzy, opakování.

1. Ověřte **Gaussovu větu** pro vektorové pole

$$\vec{A} = \nabla(x^2 + y^2 - 2z^2) \ .$$

Spočtěte a porovnejte $\oint_{\partial V} \vec{A}.d\vec{S}$ a $\int_V \nabla.\vec{A}\ dV$ pro objem V ve tvaru válce s osou totožnou s osou z a se středem v počátku souřadnic.
2. Nalezněte **siločáry** pro pole $\vec{A}$.
3. Ukažte v kartézských souřadnicích s pomocí pravidla o derivaci složené funkce, že pro sféricky symetrickou skalární funkci $f(|\vec{r}|)$ platí

$$\nabla f(|\vec{r}|) = f'\vec{e}_r$$

a

$$\Delta f(|\vec{r}|) = f'' + \frac{2}{r}f' = \frac{1}{r^2}(r^2 f')' = \frac{1}{r}(rf)'' \ .$$

Gaussova věta.

Příklady použití Gaussovy věty při hledání elektrostického pole symetrických zdrojů.
4. Pole vytvářené zdrojem ve tvaru koule vyplněné konstantní nábojovou hustotou. Zdůraznit význam spojitosti $\vec{E} = -\nabla\Phi$ a Φ v místě napojení vnitřního a vnějšího řešení. Ověřit Poissonovu rovnici.
5. Pole vytvářené zdrojem ve tvaru nekonečně dlouhého válce za předpokladu závislosti potenciálu ve tvaru $\Phi(R)$.
6. Idealizovaný deskový kondenzátor za předpokladu $\Phi(z)$. Nespojitost $\vec{E}$. Plošný náboj. Jednotky $\Phi, \vec{E}$. Elektrická pevnost vzduchu a SiO_2, t.j. jak "velký" je jeden Volt.
7. Deskový kondenzátor s uzemněnými elektodami, uvnitř konstantní nábojová hustota.
8. Superpozice úloh 6 a 7.
9. Uvažujte elektrický potenciál pro vodíkový atom

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\ a}\left(1 + \frac{a}{r}\right)e^{-\frac{2r}{a}} \ .$$

Nalezněte nábojovou hustotu, jenž je jeho zdrojem. Povšimněte si, přítomnosti bodového náboje $+q$ v centru a jej obklopujícího oblaku s celkovým nábojem $-q$.

Určení potenciálu přímou integrací.

10. Rovnoměrně nabitá úsečka.

$$\Phi(R,z) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0\ a}\ln\frac{z - a - \sqrt{R^2 + (z-a)^2}}{z + a - \sqrt{R^2 + (z+a)^2}}$$

11. Rovnoměrně nabitá kružnice. Úplné eliptické integrály. Řešení v [Kvasnica, str. 328], pozor na chybné znaménko v definici A.

Křivočaré souřadnice.

12. Porovnejte $\nabla 2r^2P_2(\cos\theta)$ s $\nabla(2z^2 - x^2 - y^2)$. První počítejte podle formulek pro derivování ve sférických souřadnicích, druhý jednoduše v souřadnicích kartézských. Ukažte, že oba výsledky představují totéž pole vyjádřené jednou ve sférických a jednou v kartézských souřadnicích.
13. Nalezněte divergence polí z příkladu 12.
14. Nalezněte nějaký polynom 3. stupně P_3 v x, y, z splňující $\nabla^2 P_3 = 0$. Převeďte jej do sférických souřadnic, identifikujte úhlovou část. Spočtěte $\nabla^2 P_3$ ještě jednou ve sférických souřadnicích, nezapomenout zmínit rozdělění Laplaceova operátoru na radiální a úhlovou část. Pozn. Při troše snahy si studenti "vyberou" takový polynom, který vede přímo na reálnou či imaginární část Y_{3m}, $m = 0, 1, 2, 3$. Zmínit kulové funkce.
15. Hledat "radiální" $\Phi(s)$ řešení Laplaceovy rovnice v protáhlých elipsoidálních souřadnicích

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{s^2 - a^2}\ \sin v\ \cos\phi \\ y &= \sqrt{s^2 - a^2}\ \sin v\ \sin\phi \\ x &= s\cos v \end{aligned}$$

Postup: Ukázat, že $s =$ const. jsou elipsy s ohnisky v koncích úsečky $z \in< -a..a >$. Spočíst Laméovy koeficinety. Nalézt řešení Laplaceovy rovnice $\nabla^2\Phi(s) = 0$. Indetifikovat dvě integrační konstanty jako náboj a potenciál v nekonečnu. Ukázat, že transformací potenciálu z úlohy 10 dostaneme tentýž potenciál.

Kapacita.

16. Kapacita vodiče ve tvaru koule. Zopakovat i když se to dělá na přednášce.
17. Koaxiální kondenzátor. Pole vně i uvnitř.
18. Matice kapacit pro dvě velmi vzdálené koule. Diagonální členy i vzájemné kapacity lze odhadnout tak, že koule nahradíme bodovými náboji a přepokládáme, že v jejich blízkosti nejsou ekvipotenciální plochy deformované přítomností druhého náboje. Zdůraznit záporné znaménko koeficientu C_{12}.
19. Variační princip pro elektrostatiku. Ukažte pro jeden konečný vodič ve vesmíru s potenciálem na povrchu U, že pro každé $\Phi(\vec{x})$ splňující hraniční podmínky $\Phi(\partial V) = U$, $\Phi(\infty) = 0$ splňuje funkcionál energie $W[\Phi]$ nerovnost

$$W[\Phi] \equiv \frac{\epsilon_0}{2}\int [\nabla\Phi]^2 dV \geq \frac{1}{2}CU^2$$

a dává tak možnost nalézt horní odhad kapacity vodivého tělesa. Zmínit, že takto lze dokázat, že vejde-li se těleso A dovnitř tělesa B musí pro kapacity platit $C_A < C_B$ (domácí úloha pro zvídavé studenty).