Bodový náboj poblíž vodivé koule

Ukažte, že Greenova úloha

$$\Delta\Phi_{\vec{r}'}(\vec{r}) = -\frac{Q}{\epsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{1}$$

na oblasti $\Omega = R^3 \setminus K_a(0)$, tedy prostoru s vyňatou koulí o poloměru a se středem v počátku, a s hraničními podmínkami $\Phi(\infty) = 0$ a $\Phi(K_a(0)) = U$ má řešení

$$\Phi_{\vec{r}'}(\vec{r}) = \frac{Ua}{|\vec{r}|} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{a}{|\vec{r}\,'|}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,''|}\right) \tag{2}$$

kde $\vec{r}\,'' = \frac{a^2}{|\vec{r}\,'|^2}\vec{r}\,'$

Při odvozování je asi nejjednodušší použít názornou identitu $|\alpha\vec{n}-\beta\vec{m}| = |\alpha\vec{m}-\beta\vec{n}|$, kde $\vec{n}$ a $\vec{m}$ jsou jednotkové vektory. Připomeňte, že $\Phi_{\vec{r}'}(\vec{r}) = G(\vec{r},\vec{r}')$ z přednášky položíme-li $U = 0$.

Kapacita dvou vodivých koulí

Pro dvě vodivé koule $K_a(0)$ a $K_b(d\vec{e}_z)$ na nichž je dána hraniční podmínka $\Phi(K_a(0)) = U_a$ a $\Phi(K_b(d\vec{e}_z)) = U_b$ zkonstruujte potenciál ve tvaru nekonečné řady

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{q_i}{|\vec{r}-s_i\vec{e}_z|} + \frac{q_i'}{|\vec{r}-(d-s_i')\vec{e}_z|} \tag{3}$$

kde q_i je obrazem q_{i-1}' a q_i' je obrazem q_{i-1} a tyto obrazy se nacházejí ve vzdálenostech s_i resp. s_i' od středů příslušných koulí. Protože vzor a obraz dohromady přispějí nulovým napětím na povrchu příslušné koule, jsou to členy q_0 a q_0', které nejsou obrazem ničeho a určují hodnoty napětí na koulích. Proto platí

$$q_0 = aU_a, \quad q_0' = bU_b \quad \text{a samozřejmě} \quad s_0 = s_0' = 0 \tag{4}$$

Ze vztahu vzor-obraz dostáváme náboje obrazů

$$q_i \;=\; -\frac{a}{d-s_{i-1}'}q_{i-1}', \quad q_i' \;=\; -\frac{b}{d-s_{i-1}}q_{i-1} \tag{5}$$

a jejich polohu

$$s_i \;=\; \frac{a^2}{d-s_{i-1}'}, \quad s_i' \;=\; \frac{b^2}{d-s_{i-1}} \tag{6}$$

Místo integrování elektrické indukce přes povrch koulí zjistíme náboj uvnitř jako součet

$$Q_a \;=\; 4\pi\epsilon_0\sum_{i=0}^{\infty}q_i, \quad Q_b \;=\; 4\pi\epsilon_0\sum_{i=0}^{\infty}q_b \tag{7}$$

Protože řada konverguje nejhůře jako geometrická řada s kvocientem $\frac{\max(a,b)}{d-a-b}$ má pro vzdálené koule smysl i první člen. Ukažte, že jde o vzájemné kapacity.

Ukažte, že v prvním přibížení roste při nabíjení jedné z koulí potenciál na druhé vybité, stejně jako kdyby tam vůbec nebyla a uvažovali jsme jen potenciál v jejím místě.

Vzájemné kapacity pro inženýry

Popište názorně úlohu o matici kapacit dvou vodičů pomocí Π-článku tvořeného kondenzátory a z rovnosti energií zkonstruujte matici kapacit.

```
          A     C     B
          O----||----O
          |          |
         ---        ---
    Ca   ---        ---   Cb
          |          |
          |          |
        -----      -----
         ---        ---
          -          -
```