

Nabitá sféra s klikou

(Májový příklad z klasické elektrodynamiky)

V následujícím textu budeme hledat řešení Maxwellových rovnic pro jednoduchý problém rozlehlého zdroje. Pověšněte si, které rovnice a jaké postupy při řešení použijeme, zřejmě budou důležité i u jiných podobných úloh. Drobně vysázený text lze při prvním čtení přeskočit.

Zadání úlohy

V rámci kvazistacionárního přiblížení budeme hledat pole, jaké vytváří otáčející se rovnoměrně nabitá sféra o poloměru a . Vzhledem k symetrii budeme používat obvyklé sférické souřadnice r, ϑ, φ , střed sféry položíme do počátku souřadnic, osu rotace stotožníme s osou z .

Nábojová hustota $\sigma = Q/(4\pi a^2)$ rovnoměrně rozložená na povrchu sféry samozřejmě budí sféricky symetrické elektrické pole

$$\vec{E}_0 = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{a^2}{r^2} \vec{e}_r & r > a \end{cases}. \quad (1)$$

Pro náš příklad je ale důležité, že pohybující se nábojová hustota vytváří *plošnou* nábojovou hustotu

$$\vec{j}_s = \sigma \vec{v}_{\text{rot}} = \sigma \vec{\omega} \times \vec{r} = \sigma \omega a \sin \vartheta \vec{e}_\varphi. \quad (2)$$

kde $a \sin \vartheta$ představuje vzdálenost bodu na sféře od osy rotace.

Magnetické pole

Začneme tím, že i kdybychom nedokázali najít pole blízko u sféry, u vzdáleného pole lokalizovaného proudu ve velkých vzdálenostech dominuje dipólové magnetické pole určené magnetickým momentem

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j}_s dS = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times (\sigma \omega a \sin \vartheta \vec{e}_\varphi) dS = -\frac{1}{2} \sigma \omega a^2 \int \sin \vartheta \vec{e}_\varphi dS. \quad (3)$$

Při výpočtu integrálu vektorové hustoty musíme přejít ke kartézským složkám, protože křivočarý básový vektor (např. \vec{e}_ϑ) se mění z místa na místo. Nejsnáze to učiníme tak, že spočteme projekci \vec{m} do všech tří kartézských směrů, které, jako konstanty, lze převést přes integrační znaménko. Pro $\vec{e}_x \cdot \vec{m}$ bude integrand úměrný $\cos \varphi$ a integrace přes $\varphi \in (0, 2\pi)$ vyjde 0. Protože $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\vartheta = -\sin \vartheta$, nevymizí ovšem složka m_z . Při jejím výpočtu ještě použijeme $\int \sin^2 \vartheta d\Omega = 8\pi/3$, což dá $\int \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta dS = -8\pi a^2/3 \vec{e}_z$ a následně

$$\vec{m} = \frac{1}{3} Q \vec{\omega} a^2. \quad (4)$$

Pro další postup je klíčové, že magnetický dipólový moment míří ve směru osy z , což vidíme i z toho, že proudové pole si lze představit jako mnoho na sebe naskládaných kruhových proudových smyček (rovnoběžek na sféře), každá očividně s dipólovým momentem ve směru \vec{e}_z . Vektorový potenciál dipólového pole je podle známého vzorečku

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_z \sin \vartheta}{r^2} \vec{e}_\varphi, \quad (5)$$

kde jsme použili daný směr $\vec{m} = m_z \vec{e}_z$.

V tento okamžik je tedy vidět, že máme naději postoupit dále než jen k dipólovému přiblížení. Rovnice, jejíž řešení hledáme je Ampérův zákon pro vektorový potenciál

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (6)$$

a vidíme, že \vec{A} i \vec{j} mají stejné chování $\sim \sin \vartheta \vec{e}_\varphi$. Proto budeme hledat v *celém prostoru* vektorový potenciál ve tvaru

$$\vec{A} = f(r) \sin \vartheta \vec{e}_\varphi. \quad (7)$$

Pro něj platí

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{2}{r} f \cos \vartheta \vec{e}_r - \frac{1}{r} (rf)' \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta, \quad (8)$$

$$\Delta \vec{A} = -\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \left[\frac{1}{r} (rf)'' - \frac{2}{r^2} f \right] \sin \vartheta \vec{e}_\varphi. \quad (9)$$

Všimněte si, že výraz v hranaté závorce není $\Delta f(r)$, protože $\Delta(A_\phi \vec{e}_\varphi) \neq (\Delta A_\phi) \vec{e}_\varphi$.

Můžete se ptát, co je speciálního na výrazu $\sin \vartheta \vec{e}_\varphi$, že beze změny proleze laplaciánem. Tato vlastnost je společná tzv. vektorovým harmonickým funkcím. Polovinu lze zapsat ve tvaru $\vec{Y}_{lm}^1 = \vec{r} \times \nabla Y_{lm}$. Spočítejte $\Delta f(r) \vec{Y}_{lm}^1$.

Poslední vztah potvrzuje naše naděje, v rovnici (6) půjde zkrátit jak směr pole, tak úhlová závislost. Kromě úspěšné separace proměnných v této polní rovnici (což znamená převedení parciální diferenciální rovnice na diferenciální rovnici obyčejnou) potřebujeme, aby i rozhraní tuto separaci dovolilo. V našem případě tomu tak je – povrch sféry je dán rovnicí $r = a$ a lze tedy funkci $f(r)$ rozdělit na vnitřní a vnější řešení.

Protože uvnitř ani vně netečou žádné proudy (ty jsou jen plošné), musíme hledat jen řešení homogenní rovnice

$$\frac{1}{r} (rf)'' - \frac{2}{r^2} f = 0. \quad (10)$$

Obyčejné diferenciální rovnice Eulerova typu mají mocninná řešení, konkrétně zde $f = \alpha r + \beta r^{-2}$. Pohledem na rovnici (7) vidíme, že odpovídají homogennímu a dipólovému magnetickému poli. (Podobně tomu bylo i v elektrostatice.) Pro naše zadání budeme uvažovat homogenní pole uvnitř sféry a dipólové magnetické pole vně, jinak by v počátku resp. nekonečnu pole rostlo nade všechny meze

$$f = \begin{cases} br & r < a \\ b \frac{a^3}{r^2} & r > a \end{cases}. \quad (11)$$

V této rovnici je již provedena taková volba konstant, aby $f(r)$ bylo spojitě v $r = a$. Spojitý vektorový potenciál dá podle (8) i spojitou normálovou složku magnetického pole. Konstantu b určuje hodnota skoku tečné složky

$$\vec{e}_r \times [\vec{B}] = \mu_0 \vec{j}_s. \quad (12)$$

Konkrétně $\vec{e}_r \times (-\sin \vartheta \vec{e}_\vartheta)[f'] = \mu_0 \sigma \omega a \sin \vartheta \vec{e}_\varphi$, tedy $3b = \mu_0 \sigma \omega a$, což je v souladu s (4).

Magnetické pole je tedy (při použití $\cos \vartheta \vec{e}_r - \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta = \vec{e}_z$)

$$\vec{B} = B_0 \begin{cases} \vec{e}_z & r < a \\ \frac{a^3}{r^3} (\cos \vartheta \vec{e}_r + \frac{1}{2} \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta) & r > a \end{cases}, \quad (13)$$

kde hodnota magnetického indukce na pólu sféry (zevnitř i zvenku) je

$$B_0 = \frac{\mu_0}{3} \frac{Q}{2\pi a} \omega. \quad (14)$$

Elektromagnetická indukce

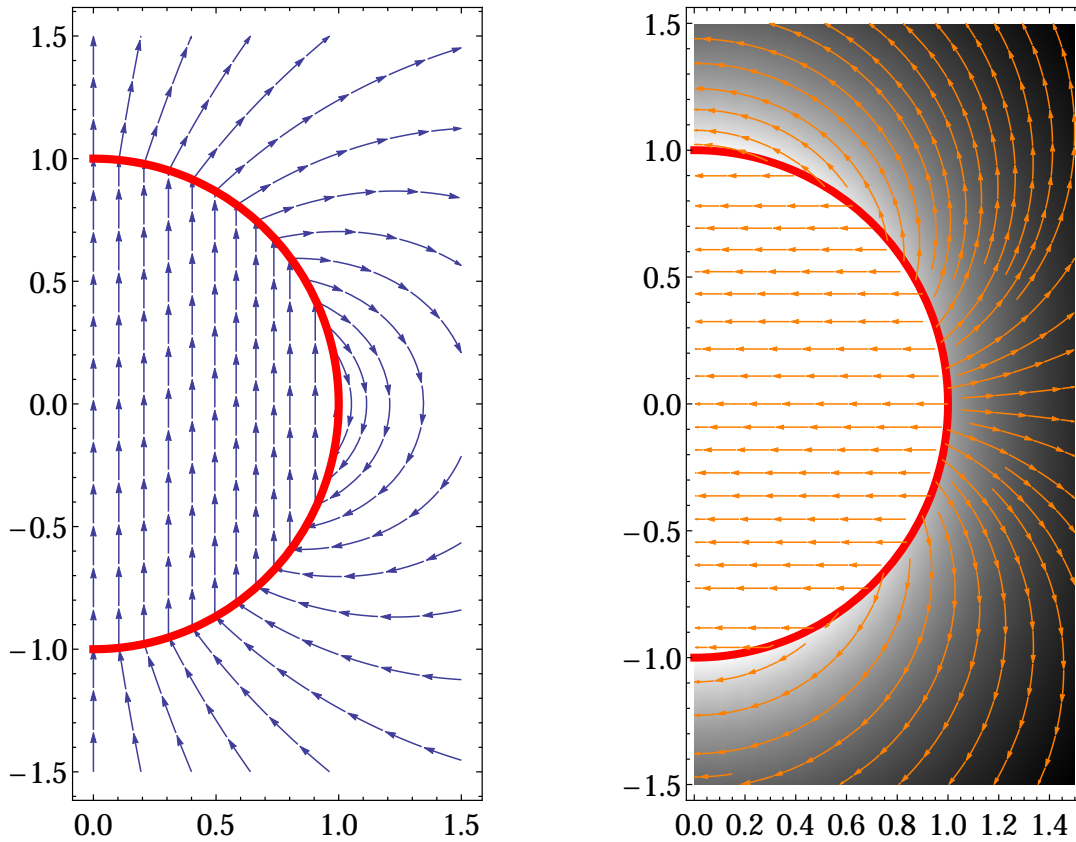
Protože kvazistacionární aproximace připouští i dostatečně pomalu se měnící proudy, je možné v jejím rámci popsat, co se bude dít, když ke sféře přiděláme kliku a mechanickým působením budeme měnit rychlost jejího otáčení. Budeme předpokládat, že náboje jsou ke sféře přilepené a při takovém procesu musejí respektovat, jak kouli otáčíme. Moment síly působící na tyto náboje se tedy přenesou na kliku stejně jako mechanický výkon. Za těchto předpokladů máme model konzervativního systému, (v opačném případě by se část naší práce mohla přeměnit na teplo) a můžeme sledovat, jak se naše práce ukládá do magnetického pole. V kvazistacionárním přiblížení je hustota energie elektrického pole zanedbatelná.

Původní elektrostatické pole $\vec{E}_0 = -\nabla\Phi_0$ nyní doplní ještě elektrické pole \vec{E}_1 , které se objeví v důsledku změny magnetického pole. To jsme vlastně již spočetli, protože známe vektorový potenciál a tedy $\vec{E}_1 = -\partial_t\vec{A}$.

Alternativně lze vyjít ze základního zákona elektromagnetické indukce

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}. \tag{15}$$

V tomto “obvyklém”, ale pracnějším postupu k určení elektrického pole z Faradayova indukčního zákona potřebujeme tytéž předpoklady (konstantní Φ_1 v důsledku symetrie úlohy) jako výše. Symetrie úlohy říká, že indukované elektrické pole \vec{E}_1



Obrázek 1: Vlevo: siločáry magnetického pole (13) vzniklé rotací nabitě sférické slupky. Jasně vidíme kombinaci homogenního pole uvnitř a dipólového venku. Vpravo: Poyntingův vektor (21) při roztáčení sféry, kdy se mění magnetické pole a indukované pole elektrické spolu s magnetickým polem dá právě \vec{S}_1 . Proudové čáry tohoto vektorového pole ukazují, jak \vec{S}_1 doplňuje energii magnetického pole, která při roztáčení koule roste. Hustota energie magnetického pole je znázorněna stupni šedi – homogenní magnetické pole uvnitř sféry odpovídá bílé, vně sféry je pole slabší.

bude mít siločáry v podobě kružnic. Ty volíme za hranice $\partial\Sigma$, každá taková kružnice je určena ϑ a r . Plochu, která má tuto kružnici za hranici pak ale zvolíme tak, aby se nám dobře počítal příslušný plošný integrál – tedy sférický vrchlík s vrcholovým poloúhlem ϑ a poloměrem $r \sin \vartheta$. Při této volbě je $\vec{dS} = \vec{e}_r r^2 \sin \theta d\vartheta d\varphi$ a celá integrace probíhá na konstantním r , tedy buď pouze uvnitř nebo pouze vně sféry. Podle (8) je $\vec{B} \cdot \vec{dS} = (2/r)f \cos \vartheta r^2 \sin \theta d\vartheta d\varphi$. Vztah (15) tak má podobu

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 2\pi r \sin \vartheta E_\varphi = -\frac{d}{dt} \int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{dS} = -\frac{d}{dt} (fr2\pi \sin^2 \vartheta). \quad (16)$$

Po vydělení tedy

$$E_\varphi = -\dot{f} \sin \vartheta. \quad (17)$$

I indukované elektrické pole tedy je

$$\vec{E}_1 = -\partial_t \vec{A} = -\frac{1}{3} \mu_0 \sigma \dot{\omega} a \sin \vartheta \vec{e}_\varphi \begin{cases} r & r < a \\ a^3 & \\ \frac{a^3}{r^2} & r > a \end{cases}. \quad (18)$$

V kvazistacionárním přiblížení je toto indukované elektrické pole určeno okamžitou hodnotou $\dot{\omega}$ a to i daleko od sféry.

Zachování energie – diferenciální pohled

V kvazistacionárním přiblížení ve vakuu má zákon zachování energie podobu

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = \partial_t w_M + \nabla \cdot \vec{S}. \quad (19)$$

Podívejme se, jak v našem konkrétním případě dochází k “vzniku” Poyntingova toku $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ v místech “pracujících” proudů, a jak tento tok pak v prostoru “doplňuje” energii magnetického pole $w_M = |\vec{B}|^2/(2\mu_0)$. Především zdrojem výkonu je v našem případě pouze nabitá sféra, ve zbytku prostoru jde o obyčejnou rovnici kontinuity. To zjednoduší interpretaci, protože magnetická energie energie na jednom místě vzniká, jinde se jen ukládá. U zdroje s konečným objemem bychom toto v objemu zdroje na první pohled neodlišili.

Poyntingův vektor spočteme snadno, pro další diskusi jej ale rozdělíme na $\vec{S} = \vec{S}_0 + \vec{S}_1$, kde $\vec{S}_0 = \vec{E}_0 \times \vec{H}$ a $\vec{S}_1 = \vec{E}_1 \times \vec{H}$. Poté

$$\vec{S}_0 = \frac{\sigma B_0}{2\mu_0 \epsilon_0} \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{a^5}{r^5} \sin \vartheta \vec{e}_\varphi & r > a \end{cases}, \quad (20)$$

$$\vec{S}_1 = \frac{\sigma a \dot{\omega} B_0}{3} \begin{cases} -R\vec{e}_R = -r \sin \vartheta (\sin \vartheta \vec{e}_r + \cos \vartheta \vec{e}_\vartheta) & r < a \\ \frac{a^6}{r^5} \left(\frac{1}{2} \sin \vartheta \vec{e}_r - \cos \vartheta \vec{e}_\vartheta \right) \sin \vartheta & r > a \end{cases}. \quad (21)$$

Význam \vec{S}_0 si ukážeme později, vzhledem ke axiální symetrii úlohy je $\nabla \cdot \vec{S}_0 = 0$ a tedy \vec{S}_1 se nijak neprojeví v ZZE. Pole \vec{S}_1 míří uvnitř sféry přímo k ose z (nikoli k počátku), vně sféry míří také k ose, ale oklikou, viz obrázek. V našem případě pole \vec{S}_1 podél produčar slábne, jak se $\nabla \cdot \vec{S}_1$ spotřebovává na změnu magnetického pole.

Nespojitosti magnetického pole nás nutí v místě sféry počítat v ZZE s plošnými divergencemi

$$-\vec{j}_s \cdot \vec{E} = \vec{n} \cdot [\vec{S}]. \quad (22)$$

Lze snadno ověřit, že výraz levé straně, tj součin (2) a (18) souhlasí se skokem

$$[S_r] = \frac{\sigma a^2 \dot{\omega} B_0}{2} \sin^2 \vartheta. \quad (23)$$

Tato rovnost znamená, že výkon, kterým táhneme za kousíček sféry je stejný, jako výkon, který tento kousíček sféry dští v podobě Poyntingova vektoru do svého okolí.

Zachování energie – integrální pohled

Opět poznamenejme, že v kvazistacionárním přiblížení je práce potřebná pouze na vytvoření magnetického pole. Nejprve spočteme výkon potřebný k otáčení klikou. Plošná hustota síly působící na náboj na sféře je

$$\vec{f}_s = \sigma(\{\vec{E}_0\} + \vec{E}_1). \quad (24)$$

Hustota momentu síly je

$$d\vec{M} = \sigma\vec{r} \times (\{\vec{E}_0\} + \vec{E}_1)dS. \quad (25)$$

Symbol $\{\vec{E}_0\}$ představuje průměr hodnot na obou stranách sféry, ale protože \vec{E}_0 vzhledem ke svému směru otáčení nebrání ($\vec{e}_r \times \vec{e}_r = 0$), potřebujeme k výpočtu momentu síly pouze hodnotu indukovaného elektrického pole \vec{E}_1 . Celkový moment síly je tedy

$$\vec{M} = \int \sigma\vec{r} \times \vec{E}_1 dS = -\sigma a \frac{1}{3} \mu_0 \sigma \omega a \int \sin \vartheta \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi dS. \quad (26)$$

Použijeme stejný postup jako při výpočtu (4) a najedeme

$$\vec{M} = -\frac{8\pi}{9} \mu_0 \sigma^2 a^4 \dot{\omega}, \quad (27)$$

vytvářené magnetické pole vzdoruje roztáčení $\dot{\omega}$ stejně jako setrvačnick, u kterého by platilo $\vec{M} = -J\dot{\omega}$.

Energii magnetického pole spočteme objemovou integrací $|\vec{B}|^2/(2\mu_0)$, kde podle (13) je

$$|\vec{B}|^2 = B_0^2 \begin{cases} 1 & r < a \\ \frac{a^6}{r^6} (\cos^2 \vartheta + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta) & r > a \end{cases}, \quad (28)$$

což po vyintegrování dá energii magnetického pole v celém objemu

$$W_M = \frac{\pi a^3}{\mu_0} B_0^2, \quad (29)$$

pro zajímavost: uvnitř je dvakrát více energie než venku, proto jsou také v podobném poměru (opačně mířící) radiální složky pole (21) nad a pod povrchem sféry.

Nyní je otázkou delšího násobení ověřit, že mechanický výkon se spotřebuje na změnu magnetického pole

$$\dot{W}_M = -\omega \cdot \vec{M}. \quad (30)$$

Z hlediska pracovníka u kliky se kvazistacionární rovnice redukuje na prostou variantu setrvačnosti – energie se chová podle $W_M = J\omega^2/2$, kde

$$J = \frac{\mu_0}{18\pi} Q^2 a^3. \quad (31)$$

Je taková představa konzistentní? Kam se poděl moment hybnosti $\vec{L} = \int \vec{M} dt$?

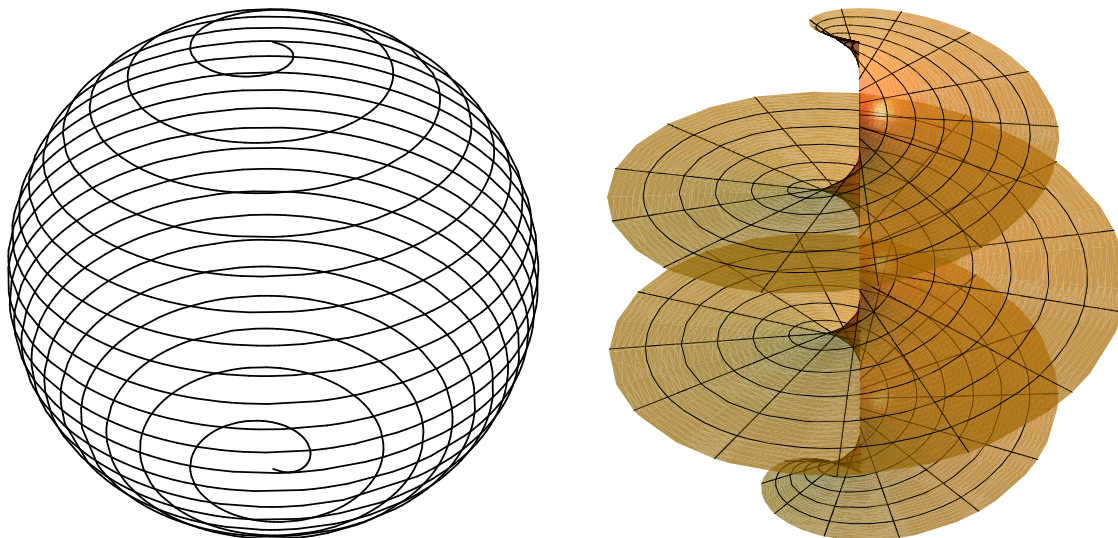
V Maxwellově teorii je elektromagnetickému poli přisouzena i hybnost s hustotou $\vec{g} = \vec{S}/c^2$. Je to právě doposud „zbytečná“ složka \vec{S}_0 , která dá (s použitím předcházejících zkušeností a vztahu $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$) lehce spočitatelný integrál

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{g} dV = J\vec{\omega}. \quad (32)$$

Je zajímavé, že tento moment hybnosti je uložen pouze vně sféry, \vec{E}_0 a tedy i \vec{S}_0 uvnitř sféry kvůli symetrii vymizí.

Zachování energie – elektrický obvod

Magnetické pole obvykle nevytváříme klikou. V našem případě lze otáčející plošný náboj nahradit vodičem navinutým na povrch sféry. Abychom vinutím aproximovali plošnou proudovou hustotu (2), musíme závity na povrch sféry navinout tak, aby počet závitů na jednotku délky poledníku byl úměrný $\sin \vartheta$.



Obrázek 2: Vlevo: Ukázka, jak navinout vinutí u kterého počet závitů na jednotku délky poledníku je úměrný $\sin \vartheta$. Vpravo: Plocha vystupující ve Faradayově indukčním zákoně. Napětí indukované v cívce je dáno změnou magnetického toku skrze tuto plochu. Pro názornost jsou uvažovány jen 3 závity.

V tomto případě by ve vztazích bylo potřeba nahradit proud $\int (j_s)_\varphi a d\vartheta = 2\sigma\omega a^2$ po povrchu vodiče součinem NI , kde N je počet závitů a I je proud v navinutém vodiči. Pro energii magnetického pole pak dostaneme alternativu vztahu (29) ve tvaru $W_M = LI^2/2$, podobně dynamickou rovnici (27) nahradí vztah pro indukované napětí $U_i = -L\dot{I}$, zachování energie pak ilustruje $\dot{W}_M = -IU_i$. Pokud byste chtěli místo energie, která představuje objemový integrál, počítat indukčnost cívky L jako magnetický tok vinutím cívky při jednotkovém proudu, je třeba magnetický tok počítat přes plochu ohraničenou závity navinutého vodiče, jak je vidět na obrázku.

Protože v této situaci není zdrojem magnetického pole nábojová hustota, není moment hybnosti pole přímo svázán se zdrojem magnetického pole – v závislosti na situaci může a nemusí celkový moment hybnosti \vec{L} vymizet. Na rozdíl od kliky ale nejsou přívody k cívce určeny k přenosu momentu síly.

Závěr

Kvazistacionární přiblížení již obsahuje velkou paletu dějů. Okamžitá souvislost polí a zdrojů ale umožňuje vystačit s jednoduchou mechanickou analogií. Je zajímavé, že jev elektromagnetické indukce je podobný tomu, jak při roztáčení setrvačnicku potřebujeme překonávat jeho setrvačnost.

Vysoká symetrie úlohy umožňuje řešit i kompletní Maxwellovy rovnice. Bohužel toto řešení již není natolik přehledné, aby snadno popsalo, jak přesně při otáčení klikou vzniká elektromagnetické vlnění.