Klasická elektrodynamika

Řešení úlohy č.1 — Dielektrický válec

Spočtěte moment síly, kterým působí elektrostatické pole na velmi dlouhý tenký válec poloměru a a délky $L >> a$. Materiál válce lze popsat izotropní relativní permitivitou ϵ_r.

1. *Spočtěte $\Delta\Phi$ pro*

$$\Phi(R, \phi, z) = AR^n \cos m\phi + Bz, \tag{1}$$

kde R, ϕ, z jsou válcové souřadnice a A, B, m a n jsou konstanty
Ačkoli lze použít přímo vzoreček pro laplacián ve válcových souřadnicích, spočteme nejprve

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = -nAR^{n-1} \cos m\phi \; \vec{e}_R + mAR^{n-1} \sin m\phi \; \vec{e}_\phi - B\vec{e}_z$$

Následně

$$\Delta\Phi = -\nabla \cdot \vec{E} = (n^2 - m^2)AR^{n-2} \cos m\phi$$

2. *Jaké hodnoty těchto konstant je třeba zvolit, aby*

a) *Φ_a představovalo homogenní pole $\vec{E} = E_z\vec{e}_z$*
Zde je úplně nejsnazší použít potenciál tohoto vektorového pole $\Phi_a = -zE_z$ a srovnáním s (1) určit $A = 0, B = -E_z$.

b) *Φ_b představovalo homogenní pole $\vec{E} = E_x\vec{e}_x$*
Opět vezmeme potenciál tohoto vektorového pole $\Phi_a = -xE_x = -E_xR\cos\phi$ a srovnáním s (1) určit $A = -E_x, B = 0, m = n = 1$.

c) *Φ_c představovalo homogenní pole $\vec{E}_0 = E_x\vec{e}_x + E_z\vec{e}_z$*
Stačí sečíst pole z předcházejících dvou bodů.

d) *Φ_d představovalo pro $a < R < \infty$ řešení Laplaceovy rovnice, které splňuje okrajové podmínky $\Phi(R = a, \phi, z) = U\cos\phi$ a $\Phi(R = \infty) = 0$.*
Zde přijde na řadu "vnější" řešení Laplaceovy rovnice, pro která je $n < 0$. Z otázky je patrné, že $m = 1$ a proto bude $n = -1$ a tedy

$$\Phi_d = U\frac{a}{R}\cos\phi.$$

3. *Ukažte, že vhodným složením těchto polí*

$$\Phi(R, \phi, z) = \begin{cases} \Phi_c^i & R < a \\ \Phi_c^e + \Phi_d & R > a \end{cases}$$

lze popsat pole nekonečně dlouhého dielektrického válce vloženého do elektrického pole $\vec{E}_0$. Uveďte,

a) *které konstanty v potenciálu určují, do jakého homogenního pole byl válec vložen.*
Pole Φ_d v nekonečnu vymizí a proto to je pole

$$\Phi_c^e = -E_z^0 z - E_x^0 R\cos\phi.$$

b) *co vyplývá ze spojitosti potenciálu na rozhraní pro hodnoty konstant*
Nejprve shrneme, že pole v prostoru má tvar

$$\Phi(R, \phi, z) = \begin{cases} -E_z^1 z - E_x^1 R\cos\phi & R < a \\ \\ F\dfrac{a^2}{R}\cos\phi - E_z^0 z - E_x^0 R\cos\phi & R > a \end{cases}$$

Zavedení konstanty F je zvoleno tak, aby měla stejný rozměr jako E_x^0 a E_x^1, povede to na hezčí rovnice. Spojitost potenciálu znamená dosadit $R = a$ do obou výrazů a testovat jejich rovnost,

$$E_z^1 z - E_x^1 a\cos\phi = Fa\cos\phi - E_z^0 z - E_x^0 a\cos\phi.$$

Jde o rovnost dvou funkcí dvou proměnných (ϕ a z, tedy souřadnic na povrchu válce). Úpravou této rovnice získáme

$$(E_z^0 - E_z^1)z = (F - E_x^0 + E_x^1)a\cos\phi.$$

Z této separace proměnných je vidět, že rovnici lze splnit jen pokud jsou obě stany nulové, tedy

$$E_z^1 = E_z^0, \tag{2}$$

$$E_x^1 = E_x^0 - F. \tag{3}$$

c) *čemu musí být rovno $\vec{n} \times [\vec{E}]$ a co z toho plyne pro hodnoty konstant*
Nejprve je třeba připomenout, že spojitost tečných složek elektrického pole je automaticky zaručena, když bude spojitý potenciál. Jako cvičení si to ale můžeme ověřit. Na to nejprve potřebujeme normálu k válci, což je samozřejmě $\vec{e}_R$.

c1) **Válcové souřadnice.** Elektrické pole má tvar

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = \begin{cases} E_z^1\ \vec{e}_z + E_x^1(\cos\phi \vec{e}_R - \sin\phi\ \vec{e}_\phi) & R < a \\ \\ E_z^0\ \vec{e}_z + (E_x^0 + F\dfrac{a^2}{R^2})\cos\phi\ \vec{e}_R - (E_x^0 - F\dfrac{a^2}{R^2})\sin\phi\ \vec{e}_\phi & R > a \end{cases}$$

Z toho dostáváme

$$\vec{n} \times [\vec{E}] = -(E_z^0 - E_z^1)\ \vec{e}_\phi - (E_x^0 - F - E_x^1)\sin\phi\ \vec{e}_z = 0$$

c2) **Kartézské souřadnice.** Potenciál v těchto souřadnicích je

$$\Phi(R,\phi,z) = \begin{cases} -E_z^1 z - E_x^1 x & R < a \\ \\ Fa^2\dfrac{x}{x^2+y^2} - E_z^0 z - E_x^0 x & R > a \end{cases} \tag{4}$$

Elektrické pole pak

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = \begin{cases} E_z^1\ \vec{e}_z + E_x^1\ \vec{e}_x & R < a \\ \\ E_z^0\ \vec{e}_z + (E_x^0 - F\dfrac{a^2}{R^2})\ \vec{e}_x + 2Fa^2x\dfrac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{R^4} & R > a \end{cases} \tag{5}$$

Položením $\vec{n} = (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)/R$ pak samozřejmě vyjde tatáž podmínka, jako v bodě b) a c1).

d) *čemu musí být rovno $\vec{n}.[\vec{D}]$ a co z toho plyne pro hodnoty konstant*
Předchozími výpočty jsme stanovili hodnoty konstant E_x^1 a E_z^1, tedy pole uvnitř dielektrického válce. Zbývá zjistit, kolik je hodnota F. To dá právě podmínka $\vec{n}.[\vec{D}] = 0$. Výpočet zde provedeme jen ve válcových souřadnicích, kde jde o spojitost radiální složky $\vec{D}$, tedy (opět pokládáme $R = a$)

$$\vec{n}\cdot[\vec{D}] = \epsilon_0\Big[(E_x^0 + F)\cos\phi - \epsilon_r E_x^1\cos\phi\Big] = 0 \tag{6}$$

Odsud je vidět, že

$$F = \epsilon_r E_x^1 - E_x^0. \tag{7}$$

Rovnice (3) a (7) mají řešení

$$E_z^1 = E_z^0, \qquad E_x^1 = \frac{2}{\epsilon_r + 1}E_x^0, \qquad F = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}E_x^0. \tag{8}$$

4. *Nalezněte vázanou nábojovou hustotu na povrchu válce*
Výpočet máme vlastně již hotový (viz (6)), jde o nespojitost radiální složky $\vec{E}$, tedy

$$\sigma = \vec{n}\cdot[\epsilon_0\vec{E}] = \epsilon_0(E_x^0 + F - E_x^1)\cos\phi = 2\epsilon_0 F\cos\phi,$$

což po dosazení z (8) dá

$$\sigma = 2\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}\epsilon_0 E_x^0 \cos\phi = \sigma_0 \frac{x}{a}.$$

Člen $\cos\phi = x/a$ odpovídá známé vlastnosti polarizovaného objektu, kdy se na opačných stranách objeví vázané náboje opačného znaménka.

5. *Spočtěte hustotu momentu síly, která působí na vázaný plošný náboj na povrchu válce. Spočtěte celkový moment síly za předpokladu, že délka válce L je konečná. (Protože L >> a, můžete uvažovat pole z předchozího řešení a zanedbat nehomogenity pole u podstav válce. Nezapomeňte, že při výpočtu silových působení plošných zdrojů je třeba brát průměr polí na obou stranách rozhraní.)*
Nejprve si zopakujme vzorec ,který říká, že v místech nespojitého pole je pro výpočet silových účinků potřeba brát průměr z obou stran. Také víme, že podobné integrály je potřeba počítat v kartézských souřadnicích, hodí se použít mezivýsledek (5)

$$\vec{M} = \int \vec{r} \times \sigma\{\vec{E}\} dS = \int \vec{r} \times \sigma \Big[E_z \ \vec{e}_z + \frac{E_x^0 + E_x^1 - F}{2} \ \vec{e}_x + F a^2 x \frac{\vec{r} - z\vec{e}_z}{a^4} \Big] dS.$$

Dále využijeme, že $\sigma \sim x$, takže když umístíme střed souřadnic do středu válce, je $\int xy \ dS = \int xz \ dS = \int x^2 z \ dS = 0$, a pouze $\int x^2 \ dS = \pi a^3 L$. Ani první část posledního členu vzhledem k vektorovému součinu nepřispěje. Proto se z $\vec{r}\times$ uplatní jen část $x\vec{e}_x \times$ a integrace se značně zjednoduší

$$\vec{M}_5 = \frac{\sigma_0}{a} \int x^2 \vec{e}_x \times \Big[E_z \vec{e}_z + (...)\vec{e}_x \Big] dV = -\pi a^2 L \sigma_0 E_z \vec{e}_y = -2\epsilon_0 \ \pi a^2 L \ \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \ E_z E_x^0 \vec{e}_y.$$

To, že většina členů vypadne není náhoda a ilustruje to alternativní možnost výpočtu momentu síly – protože statické rozložení náboje samo na sebe žádnou silou (momentem síly) nepůsobí, lze silové účinky spočíst jako interakci původního pole $\vec{E}_0$ a indukovaného náboje. (Pozor, je třeba brát právě $\vec{E}_0$, nikoli vnější pole, které obsahuje příspěvek od nábojové hustoty na povrchu válce.)

6. *Spočtěte u válce délky L též celkový elektrický dipólový moment způsobený polarizací dielektrika a poté i moment síly.*
Uvnitř válce je homogenní pole, takže

$$\vec{p} = V\vec{P} = V(\vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}_1) = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\pi a^2 L \ \vec{E}_1.$$

Jakým na takový elektrický dipól působí vnější homogenní pole $\vec{E}_0$.
Jak víme, moment síly je dán vztahem

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_0 = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\pi a^2 L \ \vec{E}_1 \times \vec{E}_0 = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\pi a^2 L \ (E_x^1 \vec{e}_x + E_z^1 \vec{e}_z) \times (E_x^0 \vec{e}_x + E_z^0 \vec{e}_z)$$

S použitím $E_x^1\vec{e}_x + E_z^1\vec{e}_z = (E_x^1 - E_x^0)\vec{e}_x + E_x^0\vec{e}_x + E_z^0\vec{e}_z$ vyjde

$$\vec{M}_6 = -\vec{e}_y \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\pi a^2 L (E_x^1 - E_x^0) E_z^0 = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \ \pi a^2 L \ \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \ E_x^0 E_z^0 \vec{e}_y$$

7. Čím je způsobeno, že oba výsledky jsou tak rozdílné? Vychází

$$\vec{M}_6 - \vec{M}_5 = \epsilon_0(\epsilon_r + 1) \ \pi a^2 L \ \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \ E_x^0 E_z^0 \vec{e}_y.$$

Protože se oba výsledky liší tím, že jsme v bodě 5) neuvažovali vázané náboje na podstavách konečného válce, zkusíme nalézt první přiblížení vnějšího pole v blízkosti podstav. Spojitá by zde měla být normálová složka elektrické indukce $\vec{D}$ tedy D_z. Pokud bychom tedy předpokládali, že pole vně válce bude v okolí podstavy respektovat spíše pole uvnitř válce než daleké vnější pole, bylo by $D_z^{0'} = D_z^1 = \epsilon_0 \epsilon_r E_z^0$. Tomu by odpovídala plošná nábojová hustota $\sigma' = \epsilon_0(E_z^{0'} - E_z^1) = \epsilon_0(on_r - 1)E_z^0$ a moment síly

$$M_y = \pi a^2 L \epsilon_0(\epsilon_r - 1) E_z^0 E_x^0 = \pi a^2 L \epsilon_0(\epsilon_r + 1) \ \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \ E_z^0 E_x^0,$$

tedy přesně ta hodnota$\vec{M}_6 - \vec{M}_5$.

V tomto smyslu je onen pohodlnější výpočet dle bodu 6) tím, který je blíže realitě.