Klasická elektrodynamika – Náměty na cvičení IV

Retardované řešení vlnové rovnice

Příklad X.1 v Kvasnicově učebnici: Ukažte, že

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(r', t - \frac{|r-r'|}{c})}{|r-r'|}d^3r' \ = \ -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(r,t)$$

TE vlna jako superpozice rovinných vlny

Uvažujte šíření elektromagnetické vlny v prostoru mezi dvěma rovnoběžnými vodivými rovinami $x = 0$ a $x = a$. Uvažujte dvě rovinné vlny s $\vec{k}_\pm = k_z\vec{e}_z \pm k_x\vec{e}_x) = k(\cos\alpha\ \vec{e}_z \pm \sin\alpha\ \vec{e}_x)$. Obě vlny budou mít stejnou amplitudu a polarizaci ve směru $E_\pm = E\vec{e}_y$. Ukažte, že pro vhodné hodnoty k_x (dále uvažujte nejnižší řešení) splňuje vlna vzniklá superpozicí

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_+ - \vec{E}_-}{2i}\ ,\quad \vec{B} = \frac{\vec{B}_+ - \vec{B}_-}{2i}$$

hraniční podmínky pokud na hranici předpokládáme plošné proudy a náboje. Ukažte, že lze oblast mezi oběma rovinami zúžit na obdélníkový vlnovod libovolné výšky.

Pakliže označíme výšku vlnovodu b, a používáme *efektivní* intenzity a proudové hustoty, můžeme spočíst výkon procházející vlnovodem

$$P = \frac{ab}{2}\frac{E^2}{c\mu_0}\cos\alpha$$

a také útlum

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dz} \doteq \frac{\rho_2}{c\mu_0}\frac{2a\cos^2\alpha + 4b\sin^2\alpha}{ab\cos\alpha}$$

kde se předpokládá plošný Ohmův zákon ve tvaru $\vec{E} = \rho_2\vec{j}_2$, kde $\rho_2 = \rho/\delta$ (na uvažovaných frekvencích je velmi malá hloubka vniku, takže plošné proudy jsou dobrým přiblížením). Joulevy ztráty na jednotku délky vlnovodu jsou pak dány integrálem podél obvodu obdélníku $\oint \rho_2|\vec{j}_2|^2dl$.

Zajímavé je, že bezrozměrný faktor

$$\frac{\rho_2}{c\mu_0} \sim \frac{\delta}{\lambda}$$

takže útlum vlnovodu je zhruba dán poměrem geometrických veličin: obvodu, plochy, vlnové délky a hloubky vniku.