Příklad – Vytápěný solenoid

Blízké pole a ekvivalentní LR obvod

Do proměnného magnetického pole $\vec{B}_0(t) = B_0(t)\vec{e}_z$ je vložený prstenec ve tvaru válcové plochy o poloměru a a výšce $h \gg a$. Budeme předpokládat, že proud I protékající prstencem je rozdělen rovnoměrně, takže výsledné pole je superpozicí vnějšího homogenního pole a pole solenoidu. Proto uvnitř prstence je pole $\vec{B}^{int} = \vec{B}_0 + \frac{\mu_0 I}{h}\vec{e}_z$. Dostatečně blízko vnějšího okraje prstence není vnější pole ovlivněno proudy uvnitř, tedy $\vec{B}^{ext} = \vec{B}_0$.

Z Faradayova zákona $\oint \vec{E}.d\vec{l} = -\dot{\Psi}_0$ dostáváme uvnitř

$$\vec{E}^{int} = -\frac{R}{2}\left[\dot{B}_0 + \frac{\dot{\mu}_0 I}{h}\right]\vec{e}_\phi$$

zatímco vně v blízkosti prstence platí

$$\vec{E}^{int} = -\left[\frac{R}{2}\dot{B}_0 + \frac{\mu_0 a^2 \dot{I}}{2Rh}\right]\vec{e}_\phi$$

Pro prstenec zapíšeme Ohmův zákon ve tvaru $\oint \vec{E}.d\vec{l} = 2\pi a E_\phi = \Re I$ a tedy

$$\Re I = 2\pi a E_\phi(R = a) \; = -2\pi a\left[\frac{a}{2}\dot{B}_0 + \frac{\mu_0 a^2 \dot{I}}{2ah}\right]$$

tedy

$$L\dot{I} + \Re I = -\dot{\Psi}_0$$

kde v souladu s přiblížením $h \gg a$ je $\Psi_0 = \pi a^2 B_0$ magnetický tok prstencem a $L = \mu_0 \pi a^2/h$ je jeho indukčnost.

Kromě toho, že tato diferenciální rovnice samozřejmě popisuje chování LR-obvodu s vnuceným napětím $\dot{\Psi}_0$, dává i výkon Jouleova tepla

$$P = -\Re I^2 = -(\Re I).I = (\dot{\Psi}_0 + L\dot{I})I$$

který lze interpretovat jako rozdíl výkonu budícího proudu a výkonu potřebného na tvorbu magnetického pole.

Uvážením plošného integrálu Poyntingova vektoru těsně okolo povrchu válce dostaneme tentýž výsledek

$$P = \int [\vec{E} \times (\vec{H}^{ext} - \vec{H}^{int})].d\vec{S} = \left[-(a/2)[\dot{B}_0 + \mu_0\dot{I}/h]\vec{e}_\phi \times [-\vec{e}_z I/h]\right].\vec{e}_R 2\pi a h = (\dot{\Psi}_0 + L\dot{I})I = \dot{\Psi}_0 I + \left(\frac{LI^2}{2}\right)^{\cdot}$$

Vzdálené pole

Daleko od prstence se jeho přítomnost projevuje jako dipólové magnetické pole s $\vec{m} = m\vec{e}_z$ superponované na budící homogenní pole

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_d = H_0\vec{e}_z + \frac{1}{4\pi}\frac{3\vec{m}.\vec{r}\;\vec{r} - \vec{m}r^2}{r^5}$$

to pak elektromagnetickou indukcí budí pole elektrické

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_d = -\frac{1}{2}\dot{\vec{B}}_0 \times \vec{r} - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\vec{m}} \times \vec{r}}{r^3} = -\left(\frac{r}{2}\dot{B}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\dot{m}\right)\sin\theta\;\vec{e}_\phi$$

Z těchto veličin můžeme spočíst tok Poyntinova vektoru přes kouli o velkém poloměru r:

$$\oint d\vec{S}.(\vec{E}\times\vec{H}) = -\oint \vec{E}.(d\vec{S}\times\vec{H}) = -\int r d\Omega[H_0\vec{r}\times\vec{e}_z + \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(-\vec{r}\times\vec{e}_z)].\vec{E}$$

$$= -\int r^2 \sin\theta d\Omega[H_0 - \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}]\left[(\frac{\dot{B}_0}{2} + \frac{\mu_0 \dot{m}}{4\pi r^3})r\sin\theta\right]$$

$$= -\int r^3 \sin^2\theta d\Omega\left[\frac{H_0\dot{B}_0}{2} + \frac{B_0\dot{m}}{4\pi r^3} - \frac{m\dot{B}_0}{8\pi r^3} + O(r^{-6})\right]$$

což při použití vztahu $\int \sin^2\theta d\Omega = 8\pi/3$ a doplnění $m\dot{B}_0 = (mB_0)^{\cdot} - \dot{m}B_0$ dává výkon vytékající z koule

$$P = -\frac{4}{3}\pi r^3\left(\frac{B_0H_0}{2}\right)^{\cdot} - \frac{2}{3}(mB_0)^{\cdot} + \dot{B}_0 m + ...$$

První člen představuje (jalový) výkon potřebný k doplňování energie magnetického pole, druhý (taktéž jalový) výkon je důsledkem přítomnosti dipólu v magnetickém poli. Výkon, který se v prstenci mění v teplo je popsán třetím členem, a uvážíme-li, že $\dot{B}_0 m = \dot{B}_0\pi a^2 I = \dot{\Psi}_0 I$, vidíme, že se shoduje s hodnotou výkonu získanou výpočty uvažujícími blízká pole. Poslední člen, který ubývá $\sim 1/r^3$ jsme zanedbali. Jalovost výkonu se i bez předpokladu harmonické závislosti veličin pozná podle toho, že jde o úplnou časovou derivaci nějakého omezeného výrazu. Její střední hodnotu totiž můžeme za rozumných předpokladů zanedbat.

Za předpokladu harmonické časové závislosti příslušných veličin pak můžeme nalézt řešení diferenciální rovnice pro proud v prstenci a řešením algebraické rovnice

$$(Li\omega + R)I = -i\omega\Psi_0.$$

Střední hodnota výkonu Jouleova tepla je pak

$$< -\dot{\Psi}_0 I > \;=\; -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\dot{\Psi}_0 I^* \;=\; -\,\mathrm{Re}\frac{i\omega}{2}\Psi_0 I^*.$$

tedy

$$< -\dot{\Psi}_0 I > \;=\; \mathrm{Re}\frac{1}{2}(Li\omega + R)II^* = \frac{1}{2}R|I|^2 \;=\; \frac{1}{2}\frac{\omega^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2}|\Psi_0|^2$$

.