Písemná část zkoušky z klasické elektrodynamiky **28.6.2006**

1. Dielektrická koule v elektrostatickém poli.

Nalezněte elektrostatické pole vně a uvnitř koule poloměru a z materiálu s $\epsilon_r > 1$, je-li vložena do homogenního elektrického pole $\Phi_0 = Ez$ rovnoběžného s osou z. Předpokládejte, že uvnitř koule (se středem v počátku souřadnic) je pole homogenní $\Phi_1 = Gz$, a že vně koule má potenciál tvar

$$\Phi_2 = Ez + F\frac{z}{r^3} \ .$$

Zatímco E je intenzita elektrického pole daleko od koule, F, G a H jsou neznámé konstanty, jejichž hodnotu je třeba určit.
a) Vyjádřete **potenciál ve sférických souřadnicích**

$$x = r\ \sin\theta\cos\phi\ ,\ y = r\ \sin\theta\sin\phi\ ,\ z = r\ \cos\theta.$$

b) Nalezněte **intenzitu elektrického pole** vně i uvnitř válce, víte-li, že

$$\mathrm{grad}\Phi \ = \ \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi \ .$$

c) Rozhodněte, co jsou tečné a co normálové složky na povrchu koule a z příslušných podmínek pro chování $\vec{E}$ a $\vec{D}$ na rozhraní dielektrik **určete hodnoty neznámých** F a G.
d) Jaký je celkový **elektrický dipólový moment** koule $\vec{p}$?

Řešení: a) Dosazením dostáváme

$$\Phi_1 = Gr\cos\theta \ \ \text{a}$$

$$\Phi_2 = (Er + \frac{F}{r^2})\cos\theta \ .$$

b) S použitím uvedeného vztahu pro gradient máme

$$\vec{E}_1 = -G\cos\theta\vec{e}_r + G\sin\theta\vec{e}_\theta$$

$$\vec{E}_2 = -(E - \frac{2F}{r^3})\cos\theta\vec{e}_r + (E + \frac{F}{r^3})\sin\theta\vec{e}_\theta \ .$$

c) Tečné vektory k povrchu koule jsou $\vec{e}_\theta$ a tedy spojitost tečných složek elektrické intenzity na povrchu koule dává

$$G = (E + \frac{F}{a^3}) \ .$$

Normálu k povrchu koule tvoří $\vec{e}_r$ a tedy spojitost kolmých složek elektrické indukce dává

$$\epsilon_r G = (E - \frac{2F}{a^3}) \ .$$

Rozdíl obou rovnic je

$$(\epsilon_r - 1)G = -\frac{3F}{a^3} \ ,$$

zatímco vážený součet

$$(2 + \epsilon_r)G = 3E \ ,$$

a tedy

$$G = \frac{3}{2+\epsilon_r}E, \qquad F = -\frac{a^3}{3}(\epsilon_r - 1)G = -a^3\frac{(\epsilon_r - 1)}{2+\epsilon_r}E$$

Dipólový moment koule $\vec{p} = \int(\vec{D}_1 - \epsilon_0\vec{E}_1)dV$ je

$$\frac{4}{3}\pi a^3\epsilon_0(\epsilon_r - 1)G = 4\pi a^3\epsilon_0(\epsilon_r - 1)/(2+\epsilon_r)E$$

a je orientován ve směru $-\vec{e}_z$.

2. Kotva dokonale nakrátko

V rámci kvazistacionárního přiblížení uvažujte dokonale vodivou smyčku ve tvaru kružnice o poloměru a ležící v rovině $z = 0$, která je vložena do (původně) homogenního otáčejícího se magnetického pole

$$\vec{B} = B \ \left(\cos\omega t \ \vec{e}_y + \sin\omega t \ \vec{e}_z\right)$$

Proud procházející smyčkou budí magnetický tok daný vztahem $\Psi = LI$, kde L je indukčnost smyčky, pro kterou můžete předpokládat $L = f \ \mu_0 \ a$, kde $f \sim 3$ je tvarový faktor závisející zejména na tloušťce vodiče smyčky. Co je zdrojem **proudu** ve smyčce a jaký je jeho časový průběh $I(t)$ zanedbáme-li přechodové jevy? Nalezněte časový průběh **momentu síly**

$$\vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{f} \ dV \ = \ \oint \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B}) \ = \ \vec{m} \times \vec{B},$$

kterým na smyčku pole působí. Pro případ, že nepůjdete nejjednodušší cestou, se hodí vědět, že $\oint r_i dl_j = \epsilon_{ijk} S_k$, kde $S_k = n_k S$ je vektor orientované plochy smyčky.

Řešení: Nejprve si vyjasníme zdroj proudů ve smyčce. Magnetický tok smyčkou je součtem toku vnějšího magnetického pole a toku, jež vybudí proud ve smyčce

$$\Psi = \Psi_0 + LI = \pi a^2 \vec{e}_z . \vec{B} + LI \ .$$

Protože je smyčka dokonale vodivá, působí podle Lentzova pravidla proud proti změně toku a stará se o to aby napětí podlél smyčky $\dot{\Psi} = 0$, tedy Ψ =konst. V zadání není řečeno, jaký je původní tok, který se po uzavření smyčky zachovává. V souladu s tím, že ostatní veličiny mají harmonický průběh, položíme tuto počáteční hodnotu rovnou nule. Jde o zanedbání přechodového jevu, což vlastně znamená, že relaxační doba příslušného RL obvodu smyčky je sice mnohem delší, než perioda střídavého magnetického pole, ale není nekonečná, abychom musleli věčně uvažovat magnetický tok smyčkou v době, kdy bylo střídavé pole zapnuto. Rovnice $\Psi = 0$ dává

$$I(t) = -\frac{\pi a^2 \vec{e}_z . \vec{B}}{L} \ = -\frac{\pi a^2 B}{L} \sin\omega t.$$

Protože v každém okamžiku je magnetické pole homogenní, platí vztah $M = \vec{m} \times \vec{B}$ přesně. Pro magnetický moment smyčky máme $\vec{m} = \pi a^2 I \vec{e}_z$ a tedy

$$\vec{M} = \left(\pi a^2 I \vec{e}_z\right) \times B \ \left(\cos\omega t \ \vec{e}_y + \sin\omega t \ \vec{e}_z\right) =$$

$$= \frac{\pi^2 a^4 B^2}{L} \sin\omega t \cos\omega t \ \vec{e}_x = \frac{\pi^2 a^3 B^2}{2\mu_0 f} \ \sin 2\omega t \ \vec{e}_x \ .$$

Vidíme, že střední hodnota magnetického momentu je tedy nulová. Pokud bychom na tomto principu chtěli postavit elektromotor (asynchronní, s kotvou nakrátko), potřebovali bychom, aby proud smyčkou nebyl ve fázi s budícím magnetickým tokem. To lze dosáhnout vhodným odporem smyčky.

3. Stojaté elektromagnetické vlnění.

Stojaté elektromagnetické vlny mezi dvěma dokonale vodivými plochami $z = 0$ a $z = h$ lze popsat složením dvou monochromatických rovinných elektromagnetických vln šířících se proti sobě podél osy z.

a) Jaké **magnetické pole** přísluší oběma vlnám, pokud uvažujeme rovinnou polarizaci vln ve směru $\vec{e}_x$ a tedy $\vec{E}^{\pm} = E^{\pm} \vec{e}_x e^{i(\pm kz - \omega t)}$?

b) Jaké **hraniční podmínky** musí splňovat elektromagnetické pole na plochách $z = 0$ a $z = h$, co z toho plyne pro konstanty E^+, E^- a k?

c) Jaké je **složené elektrické a magnetické pole** obou vln, pokud E^+, E^- splňují v předchozím bodě nalezenou podmínku?

d) Jaká je **celková energie** stojatého vlnění uvažujeme-li objem ve tvaru kvádru po podstavě S a výšce h?

e) Jak se tato **energie mění v čase**?

Při superpozici polí obou vln se mohou hodit vztahy:

$$\sin s \;=\; \frac{e^{is}-e^{-is}}{2i} \qquad \cos s \;=\; \frac{e^{is}+e^{-is}}{2} \; .$$

Řešení: a) Ze vztahů $\vec{E}^{\pm} = E^{\pm}\vec{e}_x e^{i(\pm kz-\omega t)}$ za použití $B^{\pm} = \frac{1}{c}\vec{n}^{\pm} \times \vec{E}^{\pm}$ získáme

$$\vec{B}^{\pm} = \mathrm{Re}\left(\pm\frac{1}{c}E^{\pm}\vec{e}_y e^{i(\pm kz-\omega t)}\right)$$

b) Vidíme, že magnetické pole má nulovou složku kolmou k vodivým rovinám a tedy jedinou podmíkou, již je třeba splnit, je nulovost tečné složky elektrického pole. Proto v $z=0$ musí platit

$$\vec{E}(z=0) = E^{+}\vec{e}_x e^{i(-\omega t)} + E^{+}\vec{e}_x e^{i(-\omega t)} =$$

$$= (E^{+}+E^{-})\vec{e}_x e^{i(-\omega t)} = 0$$

a tedy zvolíme $E^{+} = -E^{-} = E/(2i)$ a tak máme

$$\vec{E}(z,t) = E\vec{e}_x \sin(kz) e^{i(-\omega t)} \; .$$

Pro $z=h$ pak vidíme, že $\sin(kh)=0$ a tedy

$$k = \frac{n\pi}{h} \; .$$

c) Složené pole elektrické je uvedeno výše, a jeho reálná část je

$$\vec{E}(z,t) = E\vec{e}_x \sin(kz)\cos\omega t \; .$$

magnetické pole pak je

$$\vec{B} = \vec{B}^{+} + \vec{B}^{-} = \frac{1}{c}(E^{+}e^{ikz} - E^{-}e^{-ikz})\vec{e}_y e^{-i\omega t} =$$

$$= \frac{1}{c}\frac{E}{2i}(e^{ikz}+e^{-ikz})\vec{e}_y e^{-i\omega t}$$

a tedy reálná část je

$$\vec{B} = -\frac{E}{c}\cos(kz)\vec{e}_y \sin\omega t \; .$$

d) Celkovou energii spočteme integrací přes objem a dostaneme

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int (\epsilon_0|\vec{E}|^2 + 1\mu_0|\vec{B}|^2)dV \\ &= \frac{1}{2}S\epsilon_0 E^2(\int \sin^2 kz dz \cos^2\omega t \\ &\quad + \frac{1}{c^2}\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}\int \cos^2 kz dz \sin^2\omega t) \\ &= \frac{1}{4}Sh\epsilon_0 E^2 \; , \end{aligned}$$

kde jsme použili $\int_0^h \sin^2 kz\, dz = \int_0^h \sin^2 kz\, dz = h/2$.

e) Jak vidět, energie se zachovává.