

Poznámky k přednášce Klasická elektrodynamika

Úvod

Fyzikální pole je následníkem principu působení na dálku. V klasické představě zprostředkovává pole vytvářené jedním zdrojem působení na druhý zdroj. Již v této primitivní verzi musí polní teorie popsat jak zdroj pole vytváří, jak se pole šíří z bodu do bodu a jak působí pole na jiný zdroj. Hezká teorie pak musí toto vše učinit v souladu s obecnými fyzikálními principy. V této přednášce budeme zkoumat jak detailní vlastnosti polní teorie popsané Maxwellovými rovnicemi, tak nalézat řešení těchto polních rovnic pro různé situace. Obecné vlastnosti jste z hledisek nejvznešenějších probírali především v přednášce Speciální Teorii Relativity. My nastoupíme do konkrétní inerciální soustavy a v ní budeme hledat detailnější pochopení významu těchto polních rovnic.

Pro zvýšení zmatku ale často budeme polem mínit i pouhou funkci tří prostorových a případně ještě jedné časové souřadnice. Například budeme mluvit o poli bázových vektorů abychom zvýraznili, že v různých bodech prostoru mají uvažované bázové vektory různé směry.

Skalární pole

je tedy v největší obecnosti termín označující skalární funkci tří prostorových a jedné časové souřadnice. V této přednášce budeme až na výjimky pracovat v 3+1 notaci, vektory budeme rozumět vektory třírozměrné, čas bude samostatnou "souřadnicí", podobně jako tomu bylo třeba v teoretické mechanice. Skalární pole je tedy nějaká funkce $\Phi(\vec{x}, t)$.

V předmětech, které se nějak odkazují na dynamiku, je zapotřebí studovat změny pole. V našem 3+1 pojetí odlišujeme časové a prostorové změny. Proto v teoriích budou vystupovat časové derivace ∂_t a prostorové derivace, například $\partial_x, \partial_y, \partial_z$. Protože souřadnice v prostoru budeme často volit i jiné, než kartézské, budeme se snažit užívat pro prostorové derivování symbol ∇ . To, že vystačíme s tímto symbolickým zápisem místo explicitního derivování podle jednotlivých souřadnic je důsledek kvalit studované teorie. Má-li být teorie nezávislá na volbě souřadného systému, nemohou v ní vystupovat libovolné kombinace ∂_x, ∂_y a ∂_z , ale jen takové, které lze zapsat s pomocí ∇ . Pro připomenutí, že speciální teorie relativity víte, že v Lorentzovsky invariantní teorii se i prostorové a časové derivace musejí vyskytovat ve vhodných kombinacích.

Isoplocha (Ekvipotenciála)

Znázorňovat hodnoty skalárního pole lze různě, nejstarší a pro vědecké účely nejintuitivnější je zakreslení tzv. isoploch (ekvipotenciál) – míst stejné hodnoty pole. Ve třech dimenzích představuje rovnice $\Phi(\vec{x}) = \Phi_0$ rovnici plochy. Často zakreslujeme průsečíky isoploch odpovídající různým hodnotám Φ_0 s nějakou jinou plochou, čímž dostáváme sadu čar spojující místa se stejnou hodnotou.

Vektorové pole

Vektorové pole se od skalárního odlišuje tím, že jde o vektorovou funkci. To znamená, že jde o tři funkce skalární popisující složky pole v nějaké bázi. Formálně píšeme $\vec{E}(\vec{x}, t)$. Při práci budeme ale potřebovat umět zapsat hodnoty konkrétně. První možností je konstruovat výraz pro hodnotu jako vektorový výraz z vektoru průvodiče, řekněme

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}. \quad (1)$$

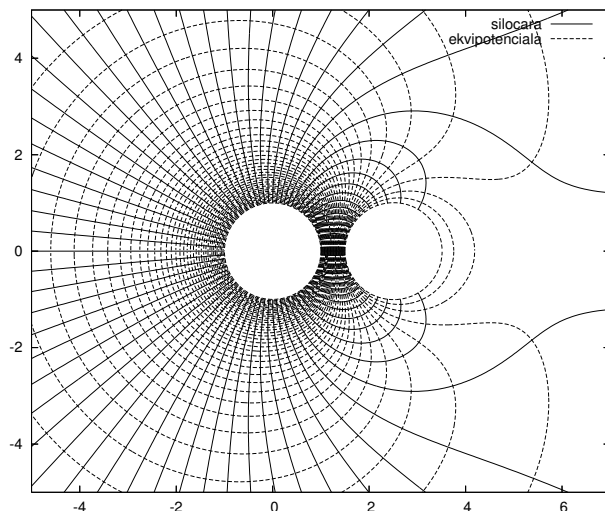
Jiná možnost je použít zápisu kartézských složek pole

$$\vec{E}(\vec{x}) = \left[\frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right]. \quad (2)$$

Z praktických důvodů budeme ale nejčastěji postupovat tak, že použijeme nekartézskou souřadnici (řekněme r) a také pomocná vektorová pole (v tomto případě $\vec{e}_r = \vec{r}/|\vec{r}|$ – pole jednotkových vektorů mířících ve

směru průvodiče) a výslednou vektorovou funkci zapíšeme pomocí jejich kombinace

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r . \quad (3)$$



Obrázek 1: Ekvipotenciály a siločáry elektrostatického pole dvou vodivých koulí. Pravá je uzemněná.

Rovnice siločáry

Při znázorňování vektorového pole je nejobvyklejším způsobem kreslení *siločar*. Tento termín není zcela přesný, když mluvíme o poli, pro které nejsou silové účinky rovnoběžné s vektorem polní veličiny, třeba u pole vektorů rychlosti mluvíme o proudočarách. Jde o křivky $\vec{x}(s)$, které jsou v každém bodě rovnoběžné s vektorovým polem:

$$\frac{d}{ds} \vec{x}(s) = \lambda(s) \vec{E}(\vec{x}(s)) . \quad (4)$$

Koeficient úměrnosti $\lambda(s)$ je libovolná funkce a volíme ji tak, aby tato soustava tří obyčejných diferenciálních rovnic byla co nejnáze řešitelná.

Je-li vektorové pole gradientem nějakého skalárního potenciálu, jsou siločáry na ekvipotenciály kolmé, jak uvidíme až se budeme zabývat operací grad.

Složky nebo nabra tečka?

Při obecných úvahách v elektromagnetismu můžeme vždy volit mezi dvěma zápisy. To že, například, v elektrostatice je elektrické pole nevířivé můžeme ekvivalentně zapsat jako

$$\epsilon_{ijk} \partial_j E_k = 0 \quad (5)$$

nebo

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0 . \quad (6)$$

Protože druhá varianta je obvykle čitelnější, budeme ji při obecných úvahách upřednostňovat, zatímco první přijde vhod při chápání podstaty některých úprav, řekněme

$$\text{rot grad } \Phi \equiv 0 \quad \text{oproti} \quad \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \Phi \equiv 0 . \quad (7)$$

Postupně si ale vybudujeme seznam identit, při jejichž užití již nebudeme muset přecházet do složek. Např.

$$\text{grad } fg = \nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g = g \text{ grad } f + f \text{ grad } g \quad (8)$$

nebo

$$\text{div } f\vec{A} = \nabla \cdot (f\vec{A}) = f\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla f = f \text{ div } \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad } f . \quad (9)$$

Elektrostatika ve vakuu

Protože úplné Maxwellovy rovnice představují relativně komplikovanou soustavu lineárních parciálních diferenciálních rovnic, soustředíme se nejdříve na důležitou součást Maxwellovy teorie – popis neměnných čistě elektrických polí ve vakuu. Jak víme je tato redukce možná jen v konkrétním inerciálním systému, neboť rozdělení na elektrické a magnetické pole je dáno projekcí tenzoru elektromagnetického pole na čtyřrychlost pozorovatele.

Základní veličinou v elektrostatice je *elektrická intenzita* \vec{E} . Jde o veličinu, která bývá obvykle definována takto: vložíme-li v místě \vec{x} do elektrického testovací(!) náboj q , je polem tlačena silou

$$\vec{F} = q \vec{E}(\vec{x}). \quad (10)$$

Elektrická intenzita tedy představuje veličinu polní (může se lišit bod od bodu) a vektorovou (má velikost a směr; nesmíme ovšem zapomenout, že o vektoru mluvíme jen z hlediska prostorových transformací).

Jak se liší elektrická intenzita bod od bodu? To určují polní rovnice – pro elektrostatická pole ve vakuu mají tvar

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (11)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (12)$$

Tyto rovnice představují soustavu 4 rovnic pro 3 neznámé složky vektorového pole $\vec{E}(\vec{x})$ a nabádají k otázkám: Je možné aby taková soustava nebyla přeuročena? Jak se dělí operátorem div ?

Při hledání řešení těchto rovnic uvážíme nejdříve naivní ale velmi užitečnou představu zdrojů jako seskupení spousty bodových nábojů.

Začneme obvyklým uvážením *Coulombova zákona* ve vakuu

$$\vec{E}(\vec{x}) = q^{-1} \vec{F} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (13)$$

Tento vztah popisuje jednak sílu \vec{F} , jíž na náboj velikosti q nacházející se v místě \vec{x} působí náboj q' nacházející se v místě \vec{x}' . Zároveň ale také popisuje elektrickou intenzitu v místě \vec{x} již zde *budí* náboj q' nacházející se v místě \vec{x}' . Pro určení elektrické intenzity tu ale již máme rovnice (11-12). Budeme tedy muset zkoumat, zda jsou obě určení v souladu.

Nejdříve si povšimneme, co mají oba vztahy společné – tzv. princip superpozice. Pro polní rovnice platí, že elektrické pole způsobené nábojovou hustotou $\rho_1(\vec{x}) + \rho_2(\vec{x})$ je součtem polí $\vec{E}_1(\vec{x}) + \vec{E}_2(\vec{x})$, kde $\vec{E}_1(\vec{x})$ je řešení (11-12) s pravou stranou danou nábojovou hustotou $\rho_1(\vec{x})$ a podobně pro $\vec{E}_2(\vec{x})$. Podobně Coulombův zákon zobecníme tak, že elektrické pole buzené soustavou nábojů je součtem polí od jednotlivých nábojů.

Při zkoumání souladu Coulombova zákona a polních rovnic narážíme na překážku danou rozdílnou povahou nábojů v obou případech. V polních rovnicích je zdrojem v prostoru rozložená nábojová hustota, v Coulombově zákoně je to bodový náboj. Pro připomenutí nejdříve velmi stručně zopakujeme postup obvyklý v učebnicích pro úvodní kurz, zhruba odpovídající [SeSt]. Nábojovou hustotu si představíme tvořenou velkým množstvím bodových nábojů. Součet elektrických intenzit od jednotlivých nábojů je pak místo sumy dán integrálem

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dq' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \rho(\vec{x}') d^3x'. \quad (14)$$

Nyní je třeba ověřit, že takovéto pole splňuje polní rovnice. Kupodivu to ale není přímočaré – matematici nám totiž nepovolí prohodit derivace z operátorů divergence a rotace a integrál vyskytující se v (14). Kdybychom jejich zákaz ignorovali dostaneme, že takto definované elektrické pole má divergenci nulovou. Proto přichází na řadu

Gaussova věta

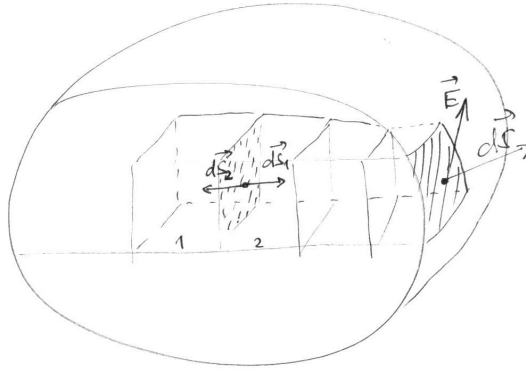
Není bez zajímavosti, že Gaussovu větu (pro gravitační pole) objevil o padesát let dříve Lagrange. S použitím moderního značení ji zapisujeme takto

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) d^3x = \oint_{\partial\Omega} \vec{E}(\vec{x}) \cdot d\vec{S}. \quad (15)$$

Slovy řečeno: objemový integrál skalární veličiny dané divergencí vektorového pole přes objem Ω je roven plošnému integrálu, tj. toku této vektorové veličiny skrze plochu $\partial\Omega$, která tvoří hranici uvažovaného objemu. V elektrostatice se rovnost těchto veličin lépe vyjádří vztahem

$$Q_{\Omega} = \int_{\Omega} \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) d^3\vec{x} = \oint_{\partial\Omega} \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) \cdot d\vec{S}, \quad (16)$$

který říká, že náboj Q_{Ω} libovolně rozložený uvnitř objemu Ω vytváří takové elektrické pole, jehož tok skrze hranici uvažovaného objemu je roven tomuto náboji.



Obrázek 2: Ilustrace ke Gaussově větě – vyrušení se příspěvků přes vnitřní plošky.

V limitě větších a větších objemů majících tvar koule s povrchem rostoucím jako kvadrát jejího poloměru dostáváme tak známé chování coulombovského pole $\sim 1/r^2$, v limitě nekonečně malých krychliček či kuliček $\Omega_{\vec{x}}$ obsahujících bod \vec{x} , jejichž objem označíme V_{Ω} , pak dostáváme alternativní definici divergence vektorového pole

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = \lim_{V_{\Omega} \rightarrow 0} \frac{1}{V_{\Omega}} \oint_{\partial\Omega_{\vec{x}}} \vec{E}(\vec{x}') \cdot d\vec{S}' . \quad (17)$$

S její pomocí je Gaussova věta velmi názorná: Velký objem si předtavíme jako hromadu velmi malých krychliček. Pravá strana (15) má význam součtu přes objem všech krychliček, levá součtu přes orientovaný povrch všech krychliček. Právě to že, jde o orientované plošky způsobí vyrušení příspěvků uvnitř velkého objemu, zůstane jen integrál přes jeho povrch. To, že (17) opravdu představuje diferenciální operaci tvaru $\nabla \cdot \vec{E}$, ukážeme v části věnované křivočarým souřadnicím.

Aplikací takto definované divergence za použití Gaussovy věty pro bodový náboj (21) snadno nahlédneme, že elektrická intenzita určená vztahem (14) splňuje rovnici $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\epsilon_0$. Splnění vztahu (12) lze podobně ověřit po zavedení alternativní definice operátoru rotace, což však odložíme. Místo toho se spokojíme s přirozeným argumentem, že superpozicí polí s nulovou rotací (tzv. polí nevířivých) dostaneme také nevířivé pole. Navíc v určitých situacích lze elektromagnetickou indukci chápat jako zdroj pro $\operatorname{rot} \vec{E}$ a tak budeme později tuto část diskutovat podrobněji.

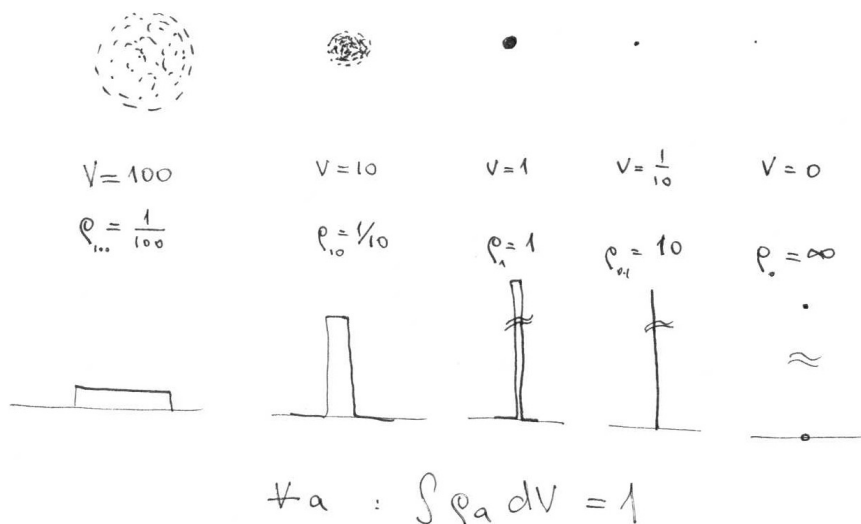
Víme již, že elektrická intenzita spočtená podle (14) splňuje rovnice elektrostatiky. Ignorujeme-li prozatím otázku existence příslušných integrálů, znamená to, že polní rovnice nejsou přeuročené: pro všechny pravé strany – nábojové hustoty existuje pole v souladu s polními rovnicemi. Jsou tu ještě nějaká další řešení odpovídající stejné nábojové hustotě, nejsou náhodou polní rovnice nedourčené? A pokud ano, co rozhoduje, které řešení “ve skutečnosti” opravdu nastane?

Jsou-li E_1 a E_2 dvě řešení odpovídající téže nábojové hustotě ρ , můžeme při uplatnění linearity polních rovnic dojít k závěru, že obě řešení se mohou odlišovat o libovolné řešení homogenních polních rovnic popisujících pole bez nábojů. Existují taková pole v elektrostatice? Ukáže se, že jich jsou spousty. Abychom o nich mohli pořádně mluvit budeme ale muset počkat. Spokojíme se s jediným příkladem, jímž je homogenní elektrické pole vyplňující celý vesmír, a budeme doufat, že i ostatní řešení homogenní rovnice pocházejí od nábojů přesunutých za hranice vesmíru. Polní rovnice zde používané jsou zbytečně složité na přesnější formulaci jednoznačnosti řešení a tak uzavřeme naše zkoumání: počítáme-li elektrickou intenzitu jako superpozici coulombovských polí vztahem (14), dostaneme jedno z řešení polních rovnic – to, které předpokládá neexistenci dalších nábojů a to i za hranicemi vesmíru.

Na cvičeních poslouží Gaussova věta jako nástroj pro určení pole v symetrických situacích. Nalezneme pole rovnoměrně nabitě koule, nekonečně dlouhého válce a nekonečně veliké rovnoměrně nabitě vrstvy.

Diracova δ -funkce

Ukazuje se, že chápání bodového náboje jakožto speciálního průběhu nábojové hustoty a následující zobecnění tohoto vede k důležitým metodám pro řešení lineárních (parciálních) diferenciálních rovnic. Především, nábojová hustota jednotkového bodového náboje není slušná funkce – samá nula a v jednom bodě nekonečno. To nekonečno ale není jen tak obyčejné, je jednotkové. Nábojová hustota dvakrát takového bodového náboje má to nekonečno dvakrát větší (... počítání s nekonečny je výzva pro matematiky).



Obrázek 3: Ilustrace k zavedení δ -funkce jako nábojové hustoty bodového náboje.

Chceme-li tedy pracovat s těmito *zobecněnými funkcemi*, budeme muset obětovat jednu důležitou vlastnost funkcí – funkční hodnotu. Za tuto cenu bude možno ponechat v platnosti jiné důležité vlastnosti funkcí, především pravidla jež funkce splňují při integraci. To není náhoda – náboj, tedy integrální veličina je jistě důležitější, nežli hodnota nábojové hustoty v nějakém konkrétním bodě. V následujícím rychlokursu zavedeme tzv. *zobecněné funkce* neboli *distribuce*:

- Nábojovou hustou jednotkového bodového náboje v počátku souřadnic označíme $\delta^3(\vec{x})$, něčím, co je nula pro všechna $\vec{x} \neq 0$ a vhodně nekonečné v počátku.
- Sídli-li takový jednotkový náboj v bodě \vec{x}' , bude nábojová hustota popsána distribucí $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$, právě pro $\vec{x} = \vec{x}'$ bude totiž argument δ -funkce nulový.
- Integrál nábojové hustoty přes objem Ω

$$\int_{\Omega} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') d^3x = \begin{cases} 1 & \vec{x}' \text{ uvnitř } \Omega \\ 0 & \vec{x}' \text{ vně } \Omega \\ \text{nedef.} & \vec{x}' \text{ na hranici } \Omega \end{cases} \quad (18)$$

- Nebude-li náboj jednotkový, ale bude mít velikost q' , vyjádříme hustotu jako $q' \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$.
- Protože δ -funkce je nulová s výjimkou bodu, kde má nulový argument, jsou totožné následující nábojové hustoty $f(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$ a $g(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$ právě když se dvě (obyčejné) funkce f a g rovnají v bodě \vec{x}' , t.j. $f(\vec{x}') = g(\vec{x}')$.
- Násobení δ -funkce obyčejnou funkcí se tedy shoduje s násobením obyčejnou konstantou a tedy

$$\int_{R^3} f(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') d^3x = \int_{R^3} f(\vec{x}') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') d^3x = f(\vec{x}') \int_{R^3} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') d^3x = f(\vec{x}') \quad (19)$$

- Hezké funkce jsou distribuce, δ -funkce je distribuce, distribuce vynásobená hezkou funkcí je distribuce, součet distribucí je distribuce.
- Při integraci distribuce splňují větu o substituci, o součtu integrálů atp.

- Vystupuje-li distribuce v integrálech násobená dostatečně hezkou funkcí, splňuje pravidla integrace *per partes* a jí podobná vícerozměrná zobecnění.
- Rovnost dvou distribucí se pozná podle rovnosti jejich vlastností pod integrálem.
- Prostor zobecněných funkcí je úplnější. Speciálně platí, že bodový náboj jako výsledek zmenšování např. homogenně nabitých kuliček má mezi distribucemi obdobu v δ -funkci jako limitě na jednotku normovaných funkcí úměrných charakteristické funkci těchto kuliček – viz. Obr. 3.

Polní rovnice s distribucí na pravé straně

Je snadné se přesvědčit, že elektrické pole bodového náboje splňuje všude podmínku nulové divergence, jakkoli použité úpravy nedávají smysl v místě, kde tento bodový náboj leží – tam musí být nábojová hustota nekonečná. Tuto vlastnost můžeme zapsat vztahem

$$\operatorname{div} \frac{q'}{4\pi} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = q' \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') . \quad (20)$$

Tento vztah je tvrzením o rovnosti dvou distribucí a nedokazuje se porovnáváním funkčních hodnot, nýbrž rovností obou stran pod integračním znaménkem, případně důvěřujeme-li v úplnost prostoru distribucí jako limita polí nebodového náboje.

Význam rovnosti dvou distribucí si přiblížíme z pohledu a) fyzikálně motivovaného a b) matematictější přesnějšího. a) V jednom z bodů, jimiž jsme zavedli distribuce se bez dalších podrobností říká, že rovnost distribucí se pozná podle jejich rovnosti pod integračním znaménkem. Budeme-li na distribuce nahlížet jako na jistý druh nespojitého rozložení náboje, lze kritérium rovnosti distribucí chápat tak, že pakliže počítáme množství náboje v nějakém objemu (což je integrál z těchto distribucí) dají obě distribuce stejné výsledky pro stejné objemy. Levá strana má tvar úplné divergence, takže ji převedeme na plošný integrál a tento pak s použitím $dS_{\perp} = |\vec{x} - \vec{x}'|^2 d\Omega$ na integrál prostorového úhlu Ω , pod nímž hranici ∂V vidíme z bodu \vec{x}'

$$\oint_{\partial V} \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial V} \frac{1}{4\pi} \frac{dS_{\perp}}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} = \oint_{\partial V} \frac{1}{4\pi} d\Omega = \begin{cases} 1 & \vec{x}' & \text{uvnitř } V \\ 0 & \vec{x}' & \text{vně } V \\ \text{neodef.} & \vec{x}' & \text{na hranici } V \end{cases} . \quad (21)$$

Vidíme tak, že po vyintegrování se levá strana (20) chová jako bodový náboj v bodě \vec{x}' , tedy jako strana pravá.

b) Protože je prostor distribucí bohatší, než jen kombinace prostoru spojitých funkcí a δ -funkcí je z ve skutečnosti rovnost distribucí f a g potřeba dokazovat složitěji – pro všechny “hezké” funkce ψ musí platit $\int_{R^3} \psi(\vec{x})f(\vec{x})d^3x = \int_{R^3} \psi(\vec{x})g(\vec{x})d^3x$. Nám jak uvidíme stačí aby funkce ψ byla hladká a nulová v nekonečnu, pro seriózní práci potřebují matematici testovací funkce ještě o něco hezčí. Zatímco pravá strana (20) okamžitě dává

$$\int \psi(\vec{x})q'\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')d^3x = q'\psi(\vec{x}'), \quad (22)$$

levou stranu

$$\int \psi(\vec{x}) \operatorname{div} \frac{q'}{4\pi} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x = \quad (23)$$

upravíme pomocí identity $\nabla \cdot \psi \vec{A} = \vec{A} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \vec{A}$ na rozdíl dvou integrálů, přičemž první má tvar úplné divergence:

$$= \int \operatorname{div} \left[\psi(\vec{x}) \frac{q'}{4\pi} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right] d^3x - \frac{q'}{4\pi} \int \operatorname{grad} \psi(\vec{x}) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x \quad (24)$$

Protože podle Gaussovy věty přejde první integrál na plošný integrál přes hranici integrační oblasti, jíž je nekonečně velká sféra na níž ψ vymizí, zbyde jen druhý z integrálů. Po zavedení posunutých souřadnic $\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}'$ (jakobián téhle transformace je jedna) a zápisu integrace $d^3y = r^2 dr d\Omega$ a zavedení funkce $\Phi(\vec{y}) = \psi(\vec{y} + \vec{x}') = \psi(\vec{x})$ se ukáže, že skalární součin gradientu ψ a radiálního vektorového pole $\vec{y}/|\vec{y}|^3$ dá součin radiální derivace $(\partial_r \Phi)$ a velikosti zmíněného vektorového pole, tj. r^{-2} . Proto můžeme psát

$$= -\frac{q'}{4\pi} \int \partial_r \Phi(r, \theta, \phi) \cdot dr d\Omega = -\frac{q'}{4\pi} \int \partial_r \Phi(r, \theta, \phi) dr \int d\Omega = -q' [\Phi(r)]_0^{\infty} = q' \psi(\vec{x}') \quad (25)$$

Protože se tedy oba integrály rovnají pro všechny hezké funkce $\psi(\vec{x})$ (jež splňují $\psi(\infty) = 0$), představují obě strany (20) tutéž zobecněnou funkci. *Pozn.* Povšimněte si význam důkazu, když ve všech vztazích položíte $q' = 1$ a $\psi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})/\epsilon_0$.

Aplikací divergence na (14) pak za použití rovnosti (20) dostáváme potvrzení splnění polních rovnic

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) &= \operatorname{div} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\vec{x}') \operatorname{div} \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\vec{x}') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}) .\end{aligned}$$

Jinak řečeno, zjištění, že divergence pole bodového náboje je distribuce úměrná δ -funkci nám umožňuje prohazovat diferenciální operátor div a integrační znaménko.

Obdobně bychom zjištěním, že elektrické pole bodového náboje má nulovou rotaci *ve smyslu distribucí* dokázali, že i druhá polní rovnice je řešením (14) splněna.

Potenciál elektrostatického pole

Rovnice $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ znamená, že elektrostatické pole je gradientem nějaké skalární funkce. S přihlédnutím ke konvenci se zavádí

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\operatorname{grad} \Phi(\vec{x}) \quad (26)$$

Toto tvrzení je silnější než pouhá identita $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u(\vec{x}) \equiv 0$, protože říká, že v elektrostatice lze každé elektrické pole psát jako gradient jisté skalární funkce. Zda je to opravdu možno učinit v celém prostoru je nelehká otázka, jejíž vyjasnění spadá do pokročilé matematiky. Budeme zatím předpokládat, že v rámci elektrostatiky jsou příslušné matematické požadavky splněny a při výkladu elektromagnetické indukce si ukážeme, jak tyto požadavky souvisí s fyzikou.

Samozřejmě také vidíme, že rovnice (26) neurčuje potenciál $\Phi(\vec{x})$ jednoznačně, při jeho výpočtu z \vec{E} máme dán jen rozdíl potenciálu mezi libovolnými body vztahem

$$\Phi(\vec{x}_2) - \Phi(\vec{x}_1) = - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} . \quad (27)$$

Libovůle budeme využívat k tomu, že důležitým místům, jako je nekonečno nebo povrch jistého vodiče přiřadíme nulový potenciál.

Výše uvedenou přímou integrací elektrické intenzity lze nalézt, že potenciál elektrostatického pole bodového náboje je

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} . \quad (28)$$

Zavedením potenciálu jsme jednu polní rovnici splnili automaticky (tu homogenní), z druhé pak dosazením za \vec{E} podle (26) dostáváme rovnici Poissonovu

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}) . \quad (29)$$

Protože víme, že nábojová hustota bodového náboje je úměrná δ -funkci, nepřekvapí Laplaceův operátor $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ působící na $1/|\vec{x} - \vec{x}'|$ je opět distribuce a že platí následující důležitý vztah

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') . \quad (30)$$

Stojí za to pochopit tento vztah z hlediska limitního procesu. Především s využitím translační invariance operátoru Δ stačí když budeme zkoumat působení laplaciánu na funkci $1/r$. Abychom se vyhnuli nekonečnu v bodě $r = 0$ nahradíme v blízkosti počátku souřadnic (uvnitř koule o poloměru a) funkci $1/r$ kvadratickou funkcí tak, abychom mohli bez potíží spočítat druhé derivace obsažené v laplaciánu

$$u(r) = \begin{cases} \frac{3a^2 - r^2}{2a^3} & r < a \\ \frac{1}{r} & r \geq a \end{cases} . \quad (31)$$

Takto definované vylepšení (funkce $u(r)$ má spojité funkční hodnoty a první derivace) přejde pro $a = 0$ ve funkci $1/r$. Víme-li, že $\Delta u(r) = (ru(r))''/r$, snadno spočteme, že

$$\Delta u(r) = \begin{cases} \frac{-3r^2}{a^3} = -4\pi \frac{1}{V_k(a)} & r < a \\ 0 & r \geq a \end{cases} , \quad (32)$$

kde $V_k(a)$ označuje objem koule o poloměru a , tedy oblasti, kde je $\Delta u(r)$ nenulové a nabývá konstantní hodnoty $-4\pi/V_k(a)$. Z toho je vidět, že tato funkce představuje přiblížení funkce $-4\pi \delta^3(\vec{x})$. Na cvičení tentýž příklad řešíme jako problém průběhu potenciálu $\Phi(r) = -\frac{Q}{4\pi}u(r)$ rovnoměrně nabitě koule a její limity jako bodového náboje – při zachování celkového náboje Q musí jít v této limitě nábojová hustota do nekonečna jako $Q/V_k(a)$.

S použitím (30) v souladu s představou o spojitým nábojovém rozložení jako soustavě bodových nábojů dostáváme z potenciálu jednoho bodového náboje potenciál buzený spojitým rozložením náboje

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' . \quad (33)$$

Místo integrálu z vektorové veličiny nyní stačí při hledání pole buzeného nábojovou hustotou ρ počítat již jen jediný trojný integrál. Přesto je díky přítomnosti odmocnin ve jmenovateli jeho analytické nalezení vzácné. A to i v případě, kdy uvažujeme plošné (a někdy dokonce jen lineární) nábojové hustoty.

Metoda Greenovy funkce

Ačkoli (33) představuje známý vztah, je vhodné zmínit, že patří do jisté důležité třídy formulek. V lineární algebře se zkoumá řešení konečně-rozměrné úlohy

$$A\vec{y} = \vec{b} \quad (34)$$

mimo jiné lze tuto úlohu řešit tak, že pro všechny báze vektory \vec{e}_i nalezneme konkrétní řešení úlohy

$$A\vec{g}_i = \vec{e}_i . \quad (35)$$

Roložíme-li pak vektor $\vec{b} = b_i\vec{e}_i$, kde b_i představují koeficienty \vec{b} v dané bázi, můžeme pro řešení psát

$$\vec{y} = b_i \vec{g}_i . \quad (36)$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A} \vec{y} = \vec{b} & -\Delta \phi(\vec{x}) = \tilde{\rho} \\ \mathbf{A} \vec{g}_k = \vec{e}_k & -\Delta G(\vec{x}; \vec{x}') = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \\ \vec{b} = \sum b_k \vec{e}_k & \tilde{\rho} = \int \rho(\vec{x}') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' \\ \mathbf{A} \sum b_k \vec{g}_k = \sum b_k \vec{e}_k & -\Delta \int \tilde{\rho}(\vec{x}') G(\vec{x}; \vec{x}') d^3x' = \int \tilde{\rho}(\vec{x}') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' \\ \vec{y} = \sum b_k \vec{g}_k & \phi(\vec{x}) = \int \tilde{\rho}(\vec{x}') G(\vec{x}; \vec{x}') d^3x' \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} A_{ij} y_j = b_i & -\Delta \phi(\vec{x}) = \tilde{\rho} \\ A_{ij} (g_k)_j = \delta_{ki} & -\Delta G(\vec{x}; \vec{x}') = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \\ b_i = \sum b_k \delta_{ki} & \tilde{\rho} = \int \rho(\vec{x}') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' \\ A_{ij} \sum b_k (g_k)_j = \sum b_k \delta_{ki} & -\Delta \int \tilde{\rho}(\vec{x}') G(\vec{x}; \vec{x}') d^3x' = \int \tilde{\rho}(\vec{x}') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' \\ y_i = \sum b_k (g_k)_i & \phi(\vec{x}) = \int \tilde{\rho}(\vec{x}') G(\vec{x}; \vec{x}') d^3x' \end{array}$$

Tabulka 1: Porovnání řešení soustavy rovnic a Poissonovy rovnice. Ve spodní části předpokládáme $(e_k)_i = \delta_{ki}$, takže $(g_k)_j$ je trasponovaná inverzní matice k A_{kj} . Pro přehlednost je $\tilde{\rho} = \rho/\epsilon_0$. Vztah $\Delta(1/r) = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})$ vede na $G(\vec{x}; \vec{x}') = (4\pi)^{-1}/|\vec{x} - \vec{x}'|$ a tato funkce hraje stejnou roli, jako inverzní matice u soustavy rovnic, kde spojitá proměnná \vec{x} hraje roli indexu a sčítání je nahrazeno integrací.

Řešíme-li v elektrostatice úlohu (29), představují funkce $\rho_{\vec{x}'}(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$ obdoby báze vektorů \vec{e}_i s tím, že diskrétní index i je pro tento problém nahrazen “spojitým indexem” \vec{x}' . Rozklad pravé strany do báze má pak místo sumy tvar integrálu

$$\rho(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' \quad (37)$$

Za povšimnutí stojí, že bázové funkce $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ jsou jistou obdobou diskrétního δ_{ij} , neboť koeficienty v této bázi jsou rovny přímo funkčním hodnotám. Nalezneme-li pro každou bázovou funkci $\rho_{\vec{x}'}(\vec{x})$ příslušný potenciál $\Phi_{\vec{x}'}(\vec{x})$ takový, že

$$\Delta \Phi_{\vec{x}'}(\vec{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\vec{x}'}(\vec{x}), \quad (38)$$

můžeme jejich složením získat řešení Poissonovy rovnice

$$\Phi(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}') \Phi_{\vec{x}'}(\vec{x}) d^3x' = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (39)$$

Funkce

$$\Phi_{\vec{x}'}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (40)$$

tedy potenciál buzený jednotkovým bodovým nábojem se proto též nazývá Greenovou funkcí (diferenciálního) operátoru $-\epsilon_0\Delta$. Později uvidíme, že různé hraniční podmínky povedou k jeho různým Greenovým funkcím.

Plošné a lineární nábojové hustoty

V integrálech, které jsme doposud napsali je mírou příspěvku k integraci množství náboje, nikoli samotný objem a tak kromě nábojové hustoty ρ zavádíme ještě hustotu plošnou σ a lineární λ vztahem

$$dq' = \rho(\vec{x}')dV(\vec{x}') = \sigma(\vec{x}')dS(\vec{x}') = \lambda(\vec{x}')dl(\vec{x}'). \quad (41)$$

Například plocha nabitá danou plošnou nábojovou hustotou budí pole

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\sigma(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS'. \quad (42)$$

Pole buzené soustavou objemových, plošných, lineárních a bodových nábojů tak dostaneme jako součet příslušných tří, dvo, jednorozměrných integrálů a potenciálů příslušných bodových nábojů. Pojem distribuce jsme zavedli abychom dokázali reprezentovat bodové náboje jako zvláštní druh objemové nábojové hustoty $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$. Podobně je možno distribucemi popsat i plošné a lineární nábojové hustoty. Ukážeme si, jak to vypadá pro plošné rozložení náboje.

Plocha na níž je náboj rozložen nechť je pro jednoduchost popsána explicitní rovnicí $r = a$ tedy plocha je totožná se souřadnicovou plochou v nějakých křivočarých souřadnicích (pro jednoduchost si vybereme souřadnice sférické). Nábojová hustota je pak popsána distribucí $\sigma(\theta, \phi)\delta(r - a)$, tedy nula všude kromě sféry $r = a$. S využitím vztahu $\int \delta(x - a)f(x)dx = f(a)$ ¹ můžeme pro celkový náboj psát

$$Q = \int \rho(\vec{x}') d^3x' = \int \rho(r, \theta, \phi) r^2 dr d\Omega = \int \sigma(\theta, \phi)\delta(r - a) r^2 dr d\Omega \quad (43)$$

$$= \int \sigma(\theta, \phi) d\Omega \int \delta(r - a) r^2 dr = a^2 \int \sigma(\theta, \phi) d\Omega = 4\pi a^2 \bar{\sigma}, \quad (44)$$

tedy náboj je (samozřejmě) roven součinu povrchu koule a průměrné nábojové hustoty $\bar{\sigma}$. Pokud je plocha popsána implicitní rovnicí např. $f(x, y, z) = 0$ je výpočet komplikovanější (viz Proseminář teoretické fyziky).

Ještě jedna vlastnost jednorozměrných δ -funkcí nám přijde vhod – jsou to totiž derivace skokových funkcí. Ve smyslu distribucí totiž platí

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \operatorname{sgn}(x - a) = \frac{d}{dx} \Theta(x - a) = \delta(x - a). \quad (45)$$

Provést důkaz této rovnosti opět znamená ukázat rovnost obou stran pod integračním znaménkem

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \frac{d}{dx} \Theta(x - a) dx &= [\psi(x) \Theta(x - a)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dx} \psi(x) \right] \Theta(x - a) dx \\ &= 0 - \int_a^{\infty} \left[\frac{d}{dx} \psi(x) \right] dx = \psi(a), \end{aligned} \quad (46)$$

pro pochopení je ale lepší studovat limitu spojitých aproximací skokové funkce a jejích derivací, (chápána jako limita plošného náboje popisuje tento limitní proces ztenčování nabitě oblasti při zachování celkového náboje).

¹Vztahy platící pro jednorozměrné δ -funkce jsou přehledně uvedeny v dodatku II v [Kvas]

Víme-li, že nábojová hustota nabitě roviny $z = 0$ je $\sigma\delta(z)$, vidíme, že elektrické pole nabitě roviny uvedené v následujícím odstavci má divergenci rovnou této zobecněné funkci.

Nabitá rovina $z = 0$ s konstantní nábojovou hustotou σ budí v prostoru pole popsané

$$\Phi(\vec{x}) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}|z|, \quad \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \operatorname{sgn}(z) \vec{e}_z. \quad (47)$$

Protože rozumnou plochu a na ní sídlící nábojovou hustotu si v dostatečné blízkosti můžeme nahradit rovinou s konstantní nábojovou hustotou má předcházející řešení širší význam. Speciálně je ilustrací známého důsledku Gaussovy věty: elektrický potenciál při přechodu nabitou plochou je spojitá funkce, jeho derivace se ale skokem mění o σ/ϵ .

V úvodní přednášce Elektřina a Magnetismus jste zavedli plošnou divergenci

$$\operatorname{Div} \vec{E} = \vec{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1), \quad (48)$$

kde \vec{n} je jednotková normála k ploše oddělující oblasti 1 a 2 mířící z oblasti 1 do 2. S její pomocí se pak píše

$$\operatorname{Div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma. \quad (49)$$

I v případně plošných nábojů zůstává v platnosti vztah $\vec{E}(\vec{x}) = -\operatorname{grad} \Phi(\vec{x})$ pouze je výsledná elektrická intenzita nespojitá. Podrobněji se budeme zabývat nespojitostmi polí při studiu chování Maxwellových rovnic na rozhraní dvou prostředí. V přednášce se naopak nesetkáme s nespojitým elektrickým potenciálem, který si názorně můžeme představit jako limitu kondenzátoru s nekonečně tenkým dielektrikem, kdy při přibližování elektrod neměníme napětí, a tedy zvyšujeme náboj. Výsledkem je nekonečná elektrická intenzita v místě skoku potenciálu – více např. v [SeSt, odst. Elektrická dvojrůvň].

Lineární náboje jsou na rozdíl od plošných obklopeny nekonečně silným polem. V jistém přiblížení můžeme na lineární náboj zblízka pohlížet jako na přímkou s konstantní nábojovou hustotou a tak stojí uvést vlastnosti polí zde.

Nabitá přímková tvořená osou z na níž je rozprostřena konstantní nábojová hustota λ je obklopena polem

$$\Phi(\vec{x}) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R, \quad \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \vec{e}_R. \quad (50)$$

Oba vztahy lze snadno získat z Gaussovy věty zvolíme-li integrační objemy respektující symetrii problému. Oproti bodovému náboji $E \sim r^{-2}$ ubývá intenzita pole okolo nekonečna s převrácenou hodnotou vzdálenosti od přímky. Protože ale celkový náboj přímky je nekonečný nelze v nekonečnu dosáhnout nulového potenciálu.

Na cvičeních spočteme za použití přímé integrace potenciál rovnoměrně nabitě úsečky a kružnice, tato pole nám při výkladu multipólového rozvoje poslouží jako příklady axiálně symetrických polí.

Symetrie

Symetrie daného problému je dána operacemi, které může někdo s poli a zdroji učinit, když na chvíli přestaneme dávat pozor, aniž bychom to mohli poznat. Tolik definice symetrie dle Prof. Kvasnici. Z této definice je zřejmé, že symetrie problému tvoří grupu – lze neudělat nic, učiněnou změnu mohu vrátit a nebo k ní přidat další. Pro naše potřeby nebude příliš významná sama struktura symetrií, spíše dopad jistých symetrií na tvar polí. Víme, že pole můžeme znázorňovat pomocí ekvipotenciálních ploch a siločar. Symetrie se pak projeví tím, že tyto geometrické útvary přecházejí příslušnou transformací samy na sebe.

V této přednášce vystačíme s několika symetriemi: translační, axiální a sférickou.

Translační symetrie odpovídá situaci, kdy po posunutí zdrojů a polí o libovolný násobek jistého směru \vec{n} dostaneme tutéž situaci. Jde o případ, kdy je pole vytvářeno objemovou nábojovou hustotou splňující podmínku $\rho(\vec{x} + s\vec{n}) = \rho(\vec{x})$, což je mj. případ pole buzeného soustavou navzájem rovnoběžných vodičů neměnného průřezu. Výsledné pole (nevnučují-li nám okrajové podmínky něco jiného) bude mít podobnou vlastnost. Zapišeme ji snadno jak pro potenciál $\Phi(\vec{x} + s\vec{n}) = \Phi(\vec{x})$, tak pro elektrickou intenzitu $\vec{E}(\vec{x} + s\vec{n}) = \vec{E}(\vec{x})$. Rovnost dvou vektorů v různých bodech znamená mj. rovnost jejich kartézských komponent. Obvykle volíme směr $\vec{n} = \vec{e}_z$ a tak můžeme psát $\rho(x, y)$, $\Phi(x, y)$ a $\vec{E}(x, y)$, tedy, že žádná veličina nezávisí na souřadnici z . Zde je vidět význam tzv. *adaptace souřadnic*: Při volbě souřadnic jsme vzali v úvahu symetrii problému, což se odrazilo ve snížení počtu souřadnic, na nichž pole závisí. Navíc – méně proměnných znamená méně netriviálních parciálních derivací v polních rovnicích a to usnadňuje jejich řešení.

Axiální symetrie odpovídá situaci, kdy po otočení zdrojů a polí o libovolný úhel kolem dané osy dostaneme tutéž situaci. Tentokrát je pole vytvářené nábojovou hustotou, která splňuje $\rho(R_s\vec{x}) = \rho(\vec{x})$,

kde R_s představuje otočení koncového bodu průvodiče $\vec{x}' = R_s \vec{x}$ o úhel s kolem dané osy. Potenciál splňuje stejnou rovnici, ovšem symetrie vektorového pole elektrické intenzity je nyní popsána vztahem $\vec{E}(R_s \vec{x}) = R_s \vec{E}(\vec{x})$ – vektor pole je třeba při přechodu z bodu do bodu otočit. Hned vidíme, že věci se velmi komplikují neprochází-li osa počátkem souřadnic – jen tehdy je otáčení koncového bodu průvodiče $R_s \vec{x}$ totožné s operací otáčení vektorů $R_s \vec{E}$.

Adaptací souřadnic tak aby respektovaly axiální symetrii si opět můžeme zjednodušit práci. Osu otáčení ztotožníme s osou z a jako souřadnice použijeme souřadnice válcové R, ϕ a z . Pak pro skalární veličiny podmínka symetrie zní $\Phi(R, \phi + s, z) = \Phi(R, \phi, z)$, a říká, že skalární veličina nezávisí na souřadnici ϕ , tj. píšeme $\Phi(R, z)$.

Pro snadné zapsání symetrických vlastností vektorových polí ale musíme učinit o krok víc. Není totiž pravda, že \vec{E} nezávisí na ϕ . Zde pomůže *adaptace básových vektorů*: zvolíme bázi, jež respektuje axiální symetrii, v níž složky axiálně symetrického pole nebudou záviset na ϕ . Například ve válcových souřadnicích (lze použít i souřadnice sférické) má obecné axiálně symetrické pole tvar

$$\vec{E}(R, \phi, z) = E_R(R, z) \vec{e}_R(R, \phi) + E_\phi(R, z) \vec{e}_\phi(R, \phi) + E_z(R, z) \vec{e}_z . \quad (51)$$

(Více o básových vektorech jako je např. \vec{e}_R a o souvislosti polí básových vektorů a příslušných souřadnic ve výkladu o křivočarých souřadnicích). Vidíme, že důsledky obou výše uvedených symetrií lze shrnout tak, že vedou ke zmazení závislosti polí na jedné, vhodně zvolené souřadnici.

Sférická symetrie, která připouští libovolné otočení polí a zdrojů okolo středu symetrie, se pak odrazí ve zmazení dvou souřadnic. Tedy alespoň pokud zvolíme souřadnice vhodné pro popis takto symetrických polí – souřadnice sférické. Skalární sféricky symetrická funkce je pouze funkcí radiální souřadnice r , tj. např. potenciál $\Phi(r)$, její isoplochy jsou koncentrické sféry. Sféricky symetrická vektorová pole pak jsou obzvláště jednoduchá

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = E_r(r) \vec{e}_r(r, \theta, \phi) , \quad (52)$$

neboť existuje jen jediné sféricky symetrické básové pole $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ – radiální básové pole sférických souřadnic. zbylá dvě sférická básová pole \vec{e}_θ a \vec{e}_ϕ jsou pouze axiálně symetrická. Ani žádné jiné pole tečných vektorů ke sféře nemůže tvořit sféricky symetrickou bázi (lze snadno nahlédnout z *Hairy Ball Theorem* – každé spojitě pole tečných vektorů na sféře je někde nulové, sféricky symetrické musí být nulové všude a není to tedy báze).

Vodiče v elektrostatice

Vymizení magnetických polí v elektrostatice je svázáno s vymizením proudů. Proto v elektrostatice musí uvnitř vodivého tělesa být elektrická intenzita nulová. Po zavedení elektrického potenciálu tak máme uvnitř a na povrchu vodičů

$$\Phi(\vec{x}) = U_A \quad \vec{x} \in V_A . \quad (53)$$

Jednotlivé, navzájem izolované vodiče V_A jsou očíslovány indexem A . Poissonova rovnice zde nabývá nového smyslu – hledáme takový potenciál, aby jeho hodnota byla na povrchu vodičů konstantní (rozšíření tohoto konstantního potenciálu dovnitř vodičů nestojí za řeč). I při jinak nepřítomné nábojové hustotě mezi vodiči přestává být metoda přímé integrace užitečná – nevíme jak se náboje po povrchu vodičů rozdělí. To, že povrch vodiče je ekvipotenciální plocha znamená, že $d\Phi = \text{grad } \Phi \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ pro všechna posunutí $d\vec{l}$ po povrchu vodiče, tedy, že elektrická intenzita je kolmá k povrchu (známá relace siločar a ekvipotenciál). Z Gaussovy věty pak za uvážení nulového pole uvnitř vodiče vyplývá

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} , \quad (54)$$

kde \vec{n} je vnější normála k povrchu vodiče. S výjimkou dostatečně jednoduchých situací lze pole buzené nabitými vodiči hledat jen přibližnými (obzvláště numerickými) metodami. Na této přednášce se soustředíme na výše uvedené výjimky. Půjde obvykle o “kulatá” tělesa, a řešení nedokážeme nalézt s použitím kartézských souřadnic.

Příklad: Koncentrické vodivé sféry s využitím $\Delta\Phi(r) = r^{-1}(r\Phi(r))''$. Význam integračních konstant.

Křivočaré souřadnice

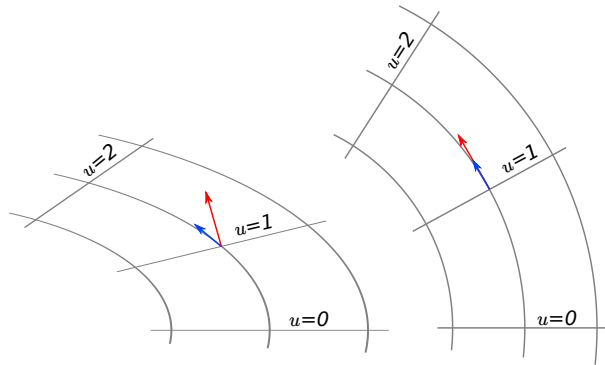
Polohu bodu můžeme udávat pomocí vhodné trojice souřadnic – ne nezbytně kartézských (např. zeměpisné souřadnice + “nadmořská” výška tvoří docela komplikované, nicméně praktické souřadnice). V elektrodynamice až na výjimky vystačíme se souřadnicemi kartézskými, válcovými a sférickými. Protože budeme potřebovat v daných souřadnicích vyjadřovat i vektorové veličiny a také umět počítat s nabla, nevystačíme s pouhým zavedením souřadnic. Nejdříve připomeneme zavedení válcových a sférických souřadnic kde uvedeme i veličiny jejichž význam se vyjasní až poté, co se vrátíme k vektorové analýze v libovolných ortogonálních křivočarých souřadnicích.

Vektory a křivočaré souřadnice

Víme, že přizpůsobení souřadnic symetrii problému vede k zjednodušení rovnic. Protože v našich rovnicích vystupují také vektorová pole, je potřeba zavést bázová vektorová pole a symetrická vektorová pole popisovat koeficienty vzhledem k této bázi.

Důležitým poznatkem bude skutečnost, že na rozdíl od kartézských bázových vektorových polí bázová pole respektující symetrie nemusí být konstantní vektory, jen jejich velikost budeme požadovat rovnou jedné. V důsledku toho pole s konstantními koeficienty v křivočaré bázi není konstantní vektorové pole!

Označme křivočaré souřadnice obecně q_1, q_2, q_3 . Jaké máme kandidáty na naše bázová pole v křivočarých souřadnicích?



Obrázek 4: Vektory ∇u (červená) a $\partial\vec{x}/\partial u$ (modře) v křivočarém souřadném systému obecném (vlevo) a ortogonálním (vpravo).

(1) Měníme-li vybranou souřadnici q_i opisuje bod příslušnou souřadnicovou čáru. Pro trojici souřadnic tak máme v každém bodě 3 tečné vektory k souřadnicovým čarám procházejícím tímto bodem $\frac{\partial\vec{x}}{\partial q_1}, \frac{\partial\vec{x}}{\partial q_2}, \frac{\partial\vec{x}}{\partial q_3}$

(2) Protože souřadnice q_1, q_2, q_3 lze chápat jako skalární pole máme tu i druhou sadu vektorů – gradienty křivočarých souřadnic $\nabla q_1, \nabla q_2, \nabla q_3$.

Jak spolu obě sady vektorů souvisí objasní jejich zápis ve složkách

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad \text{vs.} \quad \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \quad (55)$$

tedy jde o Jakobiány navzájem inverzních transformací $q_1, q_2, q_3 \rightarrow x, y, z$ resp. $x, y, z \rightarrow q_1, q_2, q_3$, tedy

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{bmatrix} \quad \text{vs.} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \frac{\partial q_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} & \frac{\partial q_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial q_3}{\partial x_1} & \frac{\partial q_3}{\partial x_2} & \frac{\partial q_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (56)$$

To, že jde o navzájem inverzní matice se dá zapsat též jako $\nabla q_i \cdot \partial\vec{x}/\partial q_j = \delta_{ij}$. Z tohoto vztahu vyplývající kolmost, řekněme, ∇q_1 a $\partial\vec{x}/\partial q_2$ neříká ovšem nic o tom jestli vektory ∇q_1 a $\partial\vec{x}/\partial q_1$ jsou navzájem rovnoběžné. Abychom vektory vzniklé derivací polohy podle parametru (třeba rychlost) a vektory (formy) vzniklé derivací podle polohy (gradient potenciálu) nemuseli odlišovat a mohli je vyjadřovat pohodlně ve stejné bázi budeme požadovat aby i v křivočarých souřadnicích zůstala přece jen zachována nějaká vlastnost kartézských souřadnic – rovnoběžnost gradientů souřadnic a tečen k souřadnicovým čarám. Abychom toho dosáhli, potřebujeme aby souřadnicové čáry byly na sebe navzájem kolmé. Platí totiž, že jsou-li $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \perp \vec{v}_3 \perp \vec{v}_1$ pak pro matici složenou z vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ platí

$$[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{|\vec{v}_1|^2} \vec{v}_1 \\ \frac{1}{|\vec{v}_2|^2} \vec{v}_2 \\ \frac{1}{|\vec{v}_3|^2} \vec{v}_3 \end{bmatrix}, \quad (57)$$

z čehož je srovnáním s výše uvedenými Jacobiho maticemi zřejmé, že v *ortogonálních křivočarých souřadnicích*, pro něž platí, že v každém bodě jsou souřadnicové čáry na sebe navzájem kolmé $\partial\vec{x}/\partial q_1 \perp \partial\vec{x}/\partial q_2 \perp \partial\vec{x}/\partial q_3 \perp \partial\vec{x}/\partial q_1$ se vektory $\partial\vec{x}/\partial q_i$ a ∇q_i liší jen svou velikostí. Jejich shodný směr označíme \vec{e}_i a zvolíme jej za bázový vektor. Píšeme

$$\frac{\partial\vec{x}}{\partial q_i} = h_i \vec{e}_i \quad \nabla q_i = \frac{1}{h_i} \vec{e}_i \quad (58)$$

a těmito vztahy zavádíme Laméovy koeficienty h_i , které určují skutečnou velikost posunutí při změně křivočaré souřadnice o dq_i . (Také platí, že pokud je nějaká křivočará souřadnice bezrozměrná, má příslušný Laméův koeficient rozměr délky.)

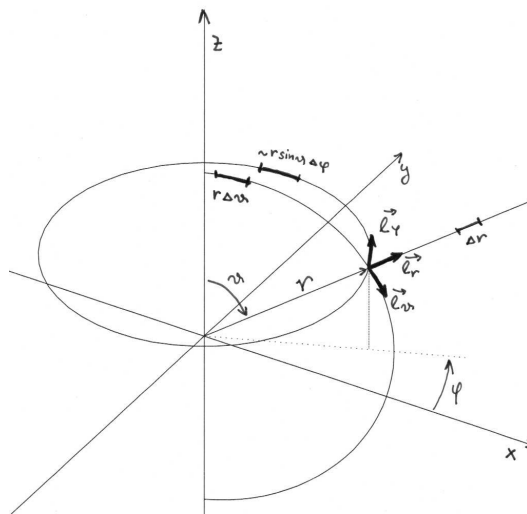
Pro vektor posunutí při změně křivočarých souřadnic platí

$$\vec{dl} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_3} dq_3 = h_1 \vec{e}_1 dq_1 + h_2 \vec{e}_2 dq_2 + h_3 \vec{e}_3 dq_3, \quad (59)$$

a pro kvadrát velikosti tohoto posunutí pak

$$dl^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2. \quad (60)$$

Na tomto vztahu je pozoruhodné, že chápeme-li Laméovy koeficienty jako funkce křivočarých souřadnic, nejsou v tomto vztahu patrné žádné pozůstatky kartézského souřadného systému z nějž jsme vycházeli a přitom popisuje vzdálenosti v prostoru. V kontextu této přednášky tato *metrika* třírozměrného euklidovského prostoru v křivočarých souřadnicích představuje především nejkompaktnější způsob jak si pro dané souřadnice zapamatovat jejich Laméovy koeficienty.



Obrázek 5: Bázové vektory a délky oblouků souřadnicových čar ve sférických souřadnicích.

Vztah (59) přímo použijeme při výpočtu integrálních veličin. Např pro vektorové pole \vec{U} je cirkulace přes křivku $\gamma : \{\vec{x}(s) | s \in (s_1, s_2)\}$

$$\oint_{\gamma} \vec{U} \cdot d\vec{l} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{U} \cdot \frac{d\vec{l}}{ds} ds = \int_{s_1}^{s_2} \vec{U} \cdot \left(h_1 \vec{e}_1 \frac{dq_1}{ds} + h_2 \vec{e}_2 \frac{dq_2}{ds} + h_3 \vec{e}_3 \frac{dq_3}{ds} \right) ds \quad (61)$$

Podobně se v plošném integrálu objeví

$$d\vec{S} = \frac{\partial \vec{l}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{l}}{\partial v} du dv. \quad (62)$$

Samozřejmým důsledkem ortogonalit souřadnic je také možnost transformovat vektory z jedné báze do druhé prostřednictvím skalárního součinu s bázovými vektory – skalární součiny bázových vektorů s rozkládaným vektorem totiž dávají příslušné koeficienty, například

$$\vec{e}_z = (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r + (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta) \vec{e}_\theta + (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\phi) \vec{e}_\phi = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta + 0 \vec{e}_\phi. \quad (63)$$

Samozřejmá vlastnost křivočarých bázových polí – to, že nejsou konstantní, ale jde o funkce souřadnic – způsobí že bázové vektory nemůžeme vytýkat před derivace a integrály, jak jsme zvyklí u báze kartézské. V případě derivací nám toto nepohodlí vynahradí dále uvedené vzorce pro výpočet gradientu, divergence atd., při integraci vektorové veličiny nám ovšem nezbyde než se tím či oním způsobem vrátit k integraci složek vzhledem k nějaké konstantní bázi.

Příklad: Pokud při výpočtu polohy těžiště polokoule počítáme $\int \vec{r} dV = \int (r \vec{e}_r) r^2 dr d\Omega = \vec{e}_r 2\pi \int r^3 dr = \dots$ dospějeme rychle k výsledku, ovšem špatnému. Pole \vec{e}_r mění v objemu tělesa (i mimo něj) směr.

$x = r \sin \theta \cos \phi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad r \in \langle 0, \infty \rangle$
$y = r \sin \theta \sin \phi$	$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \theta \in \langle 0, \pi \rangle$
$z = r \cos \theta$	$\phi = \arg(x + iy) \quad \phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$
$d\vec{l} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} d\phi = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi$	
$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$	
$h_r = 1$	$\vec{e}_r = [\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta]$
$h_\theta = r$	$\vec{e}_\theta = [\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta]$
$h_\phi = r \sin \theta$	$\vec{e}_\phi = [-\sin \phi, \cos \phi, 0]$
$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$	
$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} E_\phi$	
$\Delta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Phi \right]$	

Tabulka 2: Sférické souřadnice a související vztahy.

V následujících tabulkách jsou pro **sférické souřadnice** a **válcové souřadnice** shrnuty transformace mezi těmito souřadnicemi a souřadnicemi kartézskými, kartézské komponenty básových vektorů, Laméovy koeficienty a vztahy pro výpočet gradientu, divergence a Laplaceova operátoru na skalární funkci.

Pro úplnost je ještě třeba uvést, že často budeme ve sférických souřadnicích počítat plošné integrály přes plochu sféry $r = \text{konst.}$, kde má plošný element směr a velikost $d\vec{S} = dS \vec{e}_r = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{e}_r$.

Objemový element ve sférických souřadnicích je $dV = r^2 dr d\Omega = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$. Ve válcových souřadnicích jsou plošné elementy na ploše $R = \text{konst.}$ případně $z = \text{konst.}$ rovny $d\vec{S} = dS \vec{e}_R = R d\phi dz \vec{e}_R$, resp. $d\vec{S} = dS \vec{e}_z = R d\phi dR \vec{e}_z$.

Gradient

Operace označovaná grad se objevuje přirozeně v prvním diferenciálu skalární funkce souřadnic

$$f(\vec{x}_0 + d\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = f(\vec{x}_0) + d\vec{x} \cdot \nabla \Phi = f(\vec{x}_0) + d\vec{x} \cdot \text{grad} \Phi \quad (64)$$

a tedy označuje-li \vec{n} jednotkový vektor má $\vec{n} \cdot \text{grad} \Phi$ význam derivace v tomto směru. V této přednášce neodlišujeme vektory a formy a tak $\nabla \Phi$ můžeme chápat jako vektorové pole vzniklé ze skalárního. V každém bodě má gradient směr největšího vzrůstu skalárního pole a velikost rovnou derivaci v tomto směru.

S využitím věty o úplném diferenciálu dostáváme výraz pro gradient v křivočarých souřadnicích

$$\nabla f(q_i(x_j)) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \nabla q_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \left(\frac{1}{h_i} \vec{e}_i \right) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \vec{e}_3 \quad (65)$$

Přítomnost Laméových koeficientů ve jmenovateli si zapamatujeme tak, že gradient je změna na jednotku délky ne na radián.

Příklad: Pro funkci $f = z = r \cos \theta$ dostáváme tato alternativní návod na transformaci $\vec{e}_z = \nabla z$ do sférických souřadnic

$$\vec{e}_z = \nabla(r \cos \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial \phi} \vec{e}_\phi = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta + 0 \vec{e}_\phi \quad (66)$$

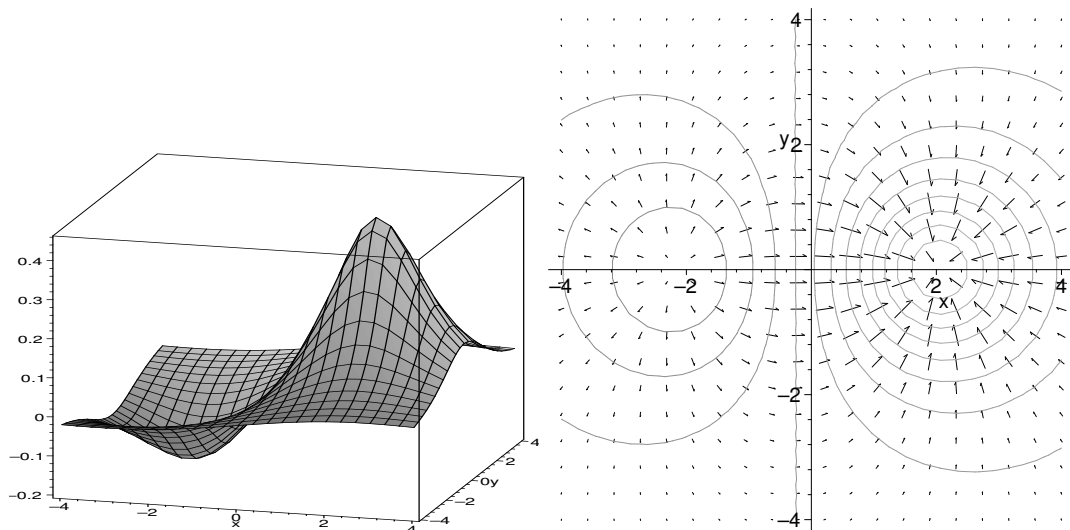
Divergence

Divergenci je možno chápat jako objemovou hustotu výtoku pole z okolí nějakého bodu

$$\text{div } \vec{E}(\vec{x}) = \lim_{V_\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{V_\Omega} \oint_{\partial \Omega_{\vec{x}}} \vec{E}(\vec{x}') \cdot d\vec{S}' \quad (67)$$

$x = R \cos \phi$	$R = \sqrt{x^2 + y^2}$	$R \in \langle 0, \infty \rangle$
$y = R \sin \phi$	$\phi = \arg(x + iy)$	$\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$
$z = z$	$z = z$	$z \in \langle -\infty, \infty \rangle$
$d\vec{l} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial R} dR + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \vec{x}}{\partial z} dz = dR \vec{e}_R + R d\phi \vec{e}_\phi + dz \vec{e}_z$ $dl^2 = dR^2 + R^2 d\phi^2 + dz^2$		
$h_R = 1$	$\vec{e}_R = [\cos \phi, \sin \phi, 0]$	
$h_\phi = R$	$\vec{e}_\phi = [-\sin \phi, \cos \phi, 0]$	
$h_z = 1$	$e_z = [0, 0, 1]$	
$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z$ $\text{div } \vec{E} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(R E_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi}(E_\phi) + \frac{\partial}{\partial z} E_z$ $\Delta \Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$		

Tabulka 3: Válcové souřadnice a související vztahy.



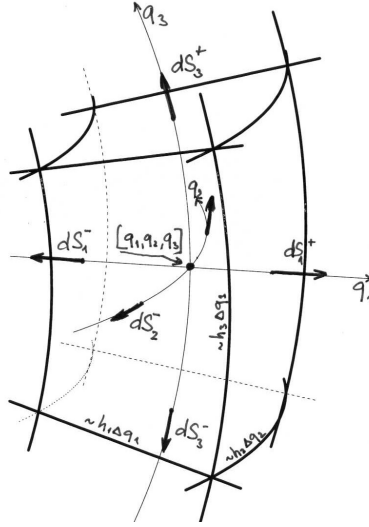
Obrázek 6: Příklad ve dvou dimenzích: funkce a vektorové pole jejího gradientu.

Za těleso V_Ω , jehož objem pošleme k nule zvolíme kvádřík $\langle q_1 - \frac{\Delta q_1}{2}, q_1 + \frac{\Delta q_1}{2} \rangle \times \langle q_2 - \frac{\Delta q_2}{2}, q_2 + \frac{\Delta q_2}{2} \rangle \times \langle q_3 - \frac{\Delta q_3}{2}, q_3 + \frac{\Delta q_3}{2} \rangle$ v prostoru křivočarých souřadnic u nějž se při limitním procesu nebude měnit poměr stran, tedy $\Delta q_1 = Q_1 \epsilon, \dots, \Delta q_3 = Q_3 \epsilon$ při $\epsilon \rightarrow 0$. Jemu v prostoru odpovídá objem ohraničený šesti (obecně křivými) souřadnicovými plochami $q'_i = q_i \pm \frac{\Delta q_i}{2}$. Normály k těmto plochám jsou právě vektory křivočaré báze a tak na každé ze stěn k toku vektorového pole přispěje právě jedna z (křivočarých) komponent vektorového pole \vec{E} . Pro takto zvolený objem bude přímo vidět geometrický význam vztahu pro divergenci vektorového pole v křivočarých souřadnicích.

Při odvození diferenciálního výrazu pro divergenci v ortogonálních křivočarých souřadnicích použijeme vlastnost střední hodnoty hladké funkce na obdélníku $\Omega = \langle x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2} \rangle \times \langle y - \frac{\Delta y}{2}, y + \frac{\Delta y}{2} \rangle$ o stranách Δx a Δy se středem v bodě $[x, y]$

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = (f(x, y) + o(\epsilon)) \Delta x \Delta y \quad (68)$$

kde $o(\epsilon)$ popisuje limitní chování, když položíme $\Delta x = X\epsilon, \Delta y = Y\epsilon$ a jdeme s $\epsilon \rightarrow 0$.



Obrázek 7: K odvození divergence v křivočarých souřadnicích.

Při výpočtu toku pole podle (67) budeme integrovat přes šest stěn ohraničujících uvažovaný kvádr

$$\oint_{\partial\Omega_{\vec{x}}} \vec{E}(\vec{x}') \cdot d\vec{S}' = \int_{1^+} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1^+ + \int_{1^-} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1^- + \int_{2^+} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2^+ + \int_{2^-} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2^- + \int_{3^+} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3^+ + \int_{3^-} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3^- \quad (69)$$

Indexy u integrálu označují, která z souřadnicových čar k ní tvoří normálu a jak je orientovaná. Například

$$d\vec{S}_1^+ = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q'_2} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial q'_3} dq'_2 dq'_3 = h_2 \vec{e}_2 \times h_3 \vec{e}_3 dq'_2 dq'_3 = h_2 h_3 \vec{e}_1 dq'_2 dq'_3 \quad (70)$$

zatímco $d\vec{S}_1^- = -h_2 h_3 \vec{e}_1 dq_2 dq_3$ se liší orientací. Ovšem \int_{1^+} počítáme přes pravou stěnu kvádru, zatímco \int_{1^-} přes levou. Proto nesmíme zapomenout, že Laméovy koeficienty se různých koncích kvádru liší. V každém z bodů stěn 1^\pm je vnější normála rovna $\pm \vec{e}_1$ a tak jen první komponenta pole \vec{E} bude při integraci hrát roli. Pro integrandy můžeme psát

$$\vec{E} \cdot d\vec{S}_1^+ = (E_1 h_2 h_3 dq'_2 dq'_3)_{|\vec{x}=[q_1 + \frac{\Delta q_1}{2}, q'_2, q'_3]} \quad (71)$$

a výsledek integrace přes obdélník $[q'_2, q'_3] \in \langle q_2 - \frac{\Delta q_2}{2}, q_2 + \frac{\Delta q_2}{2} \rangle \times \langle q_3 - \frac{\Delta q_3}{2}, q_3 + \frac{\Delta q_3}{2} \rangle$ bude

$$\int_{1^+} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1^+ = \left[(E_1 h_2 h_3)_{|\vec{x}=[q_1 + \frac{\Delta q_1}{2}, q_2, q_3]} + o(\epsilon) \right] \Delta q_2 \Delta q_3 \quad (72)$$

a je tedy až na zanedbatelné opravy určen hodnotou $E_1 h_2 h_3$ ve středu stěny 1^+ . Podobně

$$\int_{1^-} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1^- = - \left[(E_1 h_2 h_3)_{|\vec{x}=[q_1 - \frac{\Delta q_1}{2}, q_2, q_3]} + o(\epsilon) \right] \Delta q_2 \Delta q_3 \quad (73)$$

je určeno hodnotou $E_1 h_2 h_3$ ve středu stěny 1^- . Cyklickou záměnou pak dostáváme hodnoty toku pole přes zbylé stěny kvádrů

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = [E_1 h_2 h_3]_{[q_1 - \frac{\Delta q_1}{2}, q_2, q_3]}^{[q_1 + \frac{\Delta q_1}{2}, q_2, q_3]} \Delta q_2 \Delta q_3 + [E_2 h_1 h_3]_{[q_1, q_2 - \frac{\Delta q_2}{2}, q_3]}^{[q_1, q_2 + \frac{\Delta q_2}{2}, q_3]} \Delta q_1 \Delta q_3 + [E_3 h_1 h_2]_{[q_1, q_2, q_3 - \frac{\Delta q_3}{2}]}^{[q_1, q_2, q_3 + \frac{\Delta q_3}{2}]} \Delta q_1 \Delta q_2. \quad (74)$$

Pro určení hustoty potřebujeme znát hodnotu objemu kvádríku, která je jak snadno nahlédneme

$$V_\Omega = \int dV = \int h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 = \left[(h_1 h_2 h_3)_{|\vec{x}=[q_1, q_2, q_3]} + o(\epsilon) \right] \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 \quad (75)$$

Nyní se ukáže proč je možno v limitě přiblížit tok stěnami hodnotou součinu délky stran a normálové složky pole. Po vydělení objemem tělesa je třeba zanedbat výraz

$$\frac{o(\epsilon) \Delta q_2 \Delta q_3}{[(h_1 h_2 h_3) + o(\epsilon)] \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3} \sim \frac{o(\epsilon)}{\Delta q_1} \sim \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \rightarrow 0, \quad (76)$$

kde je použit předpoklad o stejnoměrném smršťování kvádrů ve všech směrech. Za použití definice parciální derivace

$$\frac{f(q_1 + \frac{\Delta q_1}{2}, q_2, q_3) - f(q_1 - \frac{\Delta q_1}{2}, q_2, q_3)}{\Delta q_1} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial q_1} \Big|_{\vec{x}=[q_1, q_2, q_3]} \quad (77)$$

dostaneme limitu střední hodnoty toku pole z objemu Ω jako

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (E_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (E_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (E_3 h_1 h_2) \right\} \quad (78)$$

Tento vzorec vyjadřuje návod ke spočtení divergence vektorového pole známe-li složky pole v křivočaré a nikoli kartézské bázi. Samozřejmě v případě kartézských souřadnic s $h_x = h_y = h_z = 1$ přejde na $\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z$.

Příklad: Divergenci vektorového pole \vec{e}_r můžeme spočítat jak přímo

$$\text{div } \vec{e}_r = \nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \nabla \cdot \left(\vec{r} \frac{1}{r} \right) = \nabla \cdot \left(\vec{r} \right) \frac{1}{r} + (\vec{r}) \cdot \nabla \frac{1}{r} = \frac{3}{r} + \vec{r} \cdot \frac{-\vec{e}_r}{r^2} = \frac{2}{r} \quad (79)$$

a nebo s použitím právě odvozeného vztahu

$$\text{div } \vec{e}_r = \frac{1}{h_r h_\theta h_\phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (1 h_\theta h_\phi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (0 h_r h_\phi) + \frac{\partial}{\partial \phi} (0 h_r h_\theta) \right\} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta) = \frac{2}{r} \quad (80)$$

Rotace

Vyjdeme ze Stokesovy věty

$$\int_\Sigma \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial \Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (81)$$

Pokud plochu Σ rozdělíme na mnoho “čtverečků” tak, že ty sousední spolu sdílejí opačně orientované strany, je možno Stokesovu větu chápat jako důsledek vyrušení se všech příspěvků k cirkulaci pole \vec{E} přes tyto sdílené strany. Jen ty strany čtverečků, jež leží na hranici Σ se nemají s čím vyrušit a “pospojování” dají cirkulaci \vec{E} přes hranici Σ .

Projekci rotace do směru \vec{n} pole tedy můžeme spočítat jako plošnou hustotu cirkulace pole

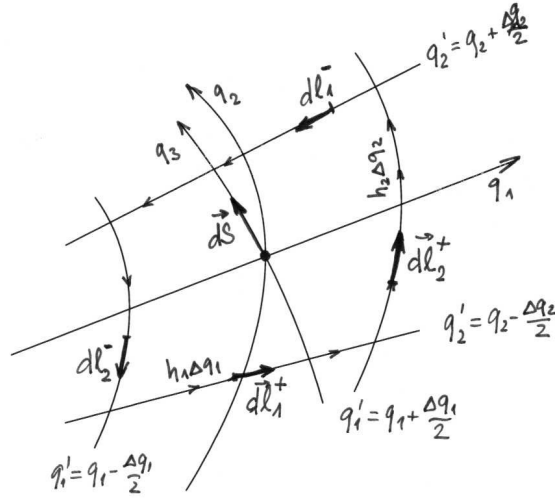
$$\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{E}(\vec{x}) = \lim_{S_\Sigma \rightarrow 0} \frac{1}{S_\Sigma} \oint_{\partial S_\Sigma, \vec{n}} \vec{E}(\vec{x}') \cdot d\vec{l}' \quad (82)$$

kolem plošky $S_{\vec{x}, \vec{n}}$ s normálou ve směru \vec{n} , jež se v limitě smršťuje do bodu \vec{x} .

Pro nalezení (diferenciálního) výrazu pro rotaci pole v křivočarých souřadnicích zvolíme za ploškou S_Σ obdélník (v prostoru křivočarých souřadnic) $\Sigma = \langle q_1 - \frac{\Delta q_1}{2}, q_1 + \frac{\Delta q_1}{2} \rangle \times \langle q_2 - \frac{\Delta q_2}{2}, q_2 + \frac{\Delta q_2}{2} \rangle$ jež v prostoru leží na ploše $q_3 = \text{konst.}$, je ohraničen příslušnými úseky souřadnicových čar a v každém bodě má normálu $\vec{n} = \vec{e}_3$. Pro zjednodušení budeme opět předpokládat neměnný poměr stran během limitního procesu $\Delta q_i \sim \epsilon$.

Cirkulaci pole okolo této plochy vyjádříme jako součet

$$\oint_{\partial \Sigma} \vec{E}(\vec{x}') \cdot d\vec{l}' = \int_{1^+} \vec{E} \cdot d\vec{l}_1^+ + \int_{1^-} \vec{E} \cdot d\vec{l}_1^- + \int_{2^+} \vec{E} \cdot d\vec{l}_2^+ + \int_{2^-} \vec{E} \cdot d\vec{l}_2^- \quad (83)$$



Obrázek 8: K odvození rotace v křivočarých souřadnicích.

Protože $d\vec{l}_1^\pm = \pm h_1 \vec{e}_1 dq_1$ je křivkový integrál podél protilehlých stran 1^\pm

$$\int_{1^\pm} \vec{E} \cdot d\vec{l}_1^\pm = \pm \left[(E_1 h_1)_{|\vec{x}=[q_1, q_2 \mp \frac{\Delta q_2}{2}, q_3]} + o(\epsilon) \right] \Delta q_1 \quad (84)$$

a podél protilehlých stran 2^\pm

$$\int_{2^\pm} \vec{E} \cdot d\vec{l}_2^\pm = \pm \left[(E_2 h_2)_{|\vec{x}=[q_1 \pm \frac{\Delta q_1}{2}, q_2, q_3]} + o(\epsilon) \right] \Delta q_2 \quad (85)$$

Po dosazení plošky obdélníčka $S_\Sigma = h_1 h_2 \Delta q_1 \Delta q_2 + o(\epsilon)$ máme plošnou hustotu ve směru \vec{e}_3

$$\vec{e}_3 \cdot \text{rot } \vec{E} = \frac{1}{h_1 h_2 \Delta q_1 \Delta q_2} \left\{ [E_1 h_1 \Delta q_1]_{+\frac{\Delta q_2}{2}}^- + [E_2 h_2 \Delta q_2]_{-\frac{\Delta q_1}{2}}^+ + o(\epsilon) \Delta q_1 + o(\epsilon) \Delta q_2 \right\} \quad (86)$$

tedy po limitě, která vede k parciálním derivacím, vložení jednotky ve tvaru $1 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3$ a rozšíření zlomku koeficientem h_3

$$\vec{e}_3 \cdot \text{rot } \vec{E} = \vec{e}_3 \cdot \frac{1}{h_1 h_2 h_3} h_3 \vec{e}_3 \left\{ -\frac{\partial}{\partial q_2} (E_1 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_1} (E_2 h_2) \right\} \quad (87)$$

Tento vztah můžeme zapsat s použitím determinantu jako

$$\vec{e}_3 \cdot \text{rot } \vec{E} = \vec{e}_3 \cdot \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & 0 \\ h_1 E_1 & h_2 E_2 & 0 \end{vmatrix} \quad (88)$$

a nepřekvapí, že všechny složky rotace získáme vyčíslením determinantu

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 E_1 & h_2 E_2 & h_3 E_3 \end{vmatrix} \quad (89)$$

Tento vzorec také ilustruje axiální charakter pole $\nabla \times \vec{E}$ – prohozením souřadnic a příslušných vektorů báze změni rotace znaménko. Protože jsme při odvození předpokládali, že křivka na obrázku má orientovanou normálu ve směru \vec{e}_3 , platí tento vztah pouze pro orientovanou bázi splňující $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$. To znamená, že u souřadnic je důležité pořadí. Proto volíme q_1, q_2, q_3 jako x, y, z pro kartézské, r, θ, ϕ pro sférické a R, ϕ, z pro válcové souřadnice.

Laplaceův operátor na skalární funkci

V eletrostatice budeme pracovat především s operátorem Δ

$$\Delta \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi = \text{div grad } \Phi \quad (90)$$

složením již známého křivočarého vyjádření obou operátorů dostáváme

$$\Delta \Phi = \text{div grad } \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \right) \right\} \quad (91)$$

Příklad: Pole nabitého kruhového disku

Zavedeme zploštělé sferoidální souřadnice

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{s^2 + a^2} \sin v \cos \phi \\y &= \sqrt{s^2 + a^2} \sin v \sin \phi \\z &= s \cos v\end{aligned}$$

jejich jméno je dáno faktem, že plocha $s = \text{konst.}$ je rotační elipsoid s polárním poloměrem menším než rovníkový

$$\left(\frac{x}{\sqrt{s^2 + a^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{s^2 + a^2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{s}\right)^2 = 1. \quad (92)$$

V nekonečnu, kde $\sqrt{s^2 + a^2} \sim s$ přecházejí v souřadnice sférické ($s \rightarrow r$, $v \rightarrow \theta$). Plocha $s = 0$ je disk o poloměru a . Inverzní transformace $s(x, y, z)$ resp. $\cos v(x, y, z)$ získáme sečtením resp. odečtením výrazů

$$\begin{aligned}\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^2 + 4z^2 a^2} &= s^2 + a^2 \cos^2 v \\x^2 + y^2 + z^2 - a^2 &= s^2 - a^2 \cos^2 v\end{aligned}$$

Tečné vektory k souřadnicovým čarám jsou

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} = h_s \vec{e}_s = \left[\frac{s}{\sqrt{s^2 + a^2}} \sin v \cos \phi, \frac{s}{\sqrt{s^2 + a^2}} \sin v \sin \phi, \cos v \right] \quad (93)$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial v} = h_v \vec{e}_v = \left[\sqrt{s^2 + a^2} \cos v \cos \phi, \sqrt{s^2 + a^2} \cos v \sin \phi, -s \sin v \right] \quad (94)$$

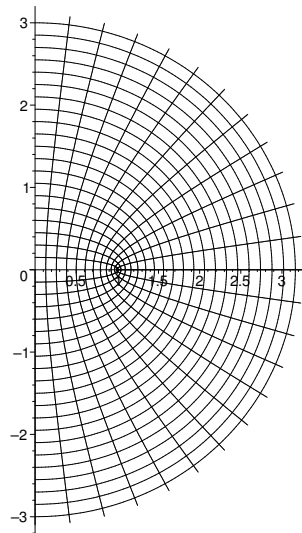
$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} = h_\phi \vec{e}_\phi = \left[-\sqrt{s^2 + a^2} \sin v \sin \phi, \sqrt{s^2 + a^2} \sin v \cos \phi, 0 \right] \quad (95)$$

Laméovy koeficienty jsou

$$h_s = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \right| = \sqrt{\frac{s^2 + a^2 \cos^2 v}{s^2 + a^2}} \quad (96)$$

$$h_v = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right| = \sqrt{s^2 + a^2 \cos^2 v} \quad (97)$$

$$h_\phi = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} \right| = \sqrt{s^2 + a^2} \sin v \quad (98)$$



Obrázek 9: Sferoidální souřadnice v polorovině $x - z$. Souřadnice v prostoru vzniknou jejich rotací, tj přidáním souřadnice ϕ . Půlky elips na obrázku přejdou na rotační elipsoidy a pro $\Phi(s)$ tvoří ekvipotenciální plochy.

Budeme hledat obdobu pole bodového náboje ve sférických souřadnicích, kde $\Phi(r)$, tedy potenciál $\Phi(s)$ závisí jen na souřadnici s . Až uspějeme, získáme pole tvořené vodiči ve tvaru zploštělého rotačního

elipsoidu, případně kruhového disku, protože to je tvar ploch $s = \text{konst.}$ a potenciál, jenž závisí jen na této souřadnici musí mít ekvipotenciální plochy stejné.

Laplaceova rovnice pro potenciál $\Phi(s)$ má tvar

$$0 = \Delta\Phi(s) = \frac{1}{h_s h_v h_\phi} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{h_v h_\phi}{h_s} \frac{\partial}{\partial s} \Phi(s) \right] \quad (99)$$

tedy po dosazení Laméových koeficientů a vykrácení faktoru $h_s h_v h_\phi$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[(s^2 + a^2) \frac{\partial}{\partial s} \Phi(s) \right] = 0. \quad (100)$$

Protože uvažujeme závislost potenciálu na jediné souřadnici musíme řešit jen obyčejnou diferenciální rovnici a její řešení s dvěma integračními konstantami α a β je

$$\Phi(s) = \alpha \left(\arctan \frac{s}{a} + \beta \right) \quad (101)$$

Hodnotu $\beta = -\pi/2$ určíme z podmínky $\Phi(s = \infty) = 0$. Určit hodnotu α můžeme několika způsoby. Jednou možností je spočítat náboj jako tok elektrického pole skrze plochu $s = \text{konst.}$. Zde je $d\vec{S} = (h_v dv) (h_\phi d\phi) \vec{e}_s$ a elektrické pole spočteme známým vztahem pro gradient a získáme tak

$$Q = - \oint (\epsilon_0 \nabla \Phi) \cdot d\vec{S} = \dots = \int -a \epsilon_0 \alpha \sin v \, dv \, d\phi = -4\pi \epsilon_0 a \alpha \quad (102)$$

Druhou možností je rozvinout v okolí nekonečna funkci

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int^x \frac{dx}{x^2 + 1} = \int^x dx \frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} \\ &= \int^x \frac{dx}{x^2} \left[1 - \frac{1}{x^2} \pm \dots \right] = \int^x dx \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \pm \dots \right] = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} \mp \dots \end{aligned} \quad (103)$$

tedy

$$\Phi(s) \sim \alpha \left(\beta + \frac{\pi}{2} - \frac{a}{s} + \dots \right) \quad (104)$$

a uvážit, že potenciál se zde musí chovat jako $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{s}$ neboť pro velká s tato souřadnice splývá se sférickou souřadnicí r . Tedy výsledný potenciál má tvar

$$\Phi(s) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{s}{a} \right) \quad (105)$$

Budeme-li uvažovat, že plocha $s = s_0$ je vyplněna vodičem a spočteme skok elektrické intenzity na jeho povrchu dostáváme plošnou nábojovou hustotu

$$\sigma = \epsilon_0 \text{Div } \vec{E} = \epsilon_0 \vec{e}_s \cdot \vec{E}_{vně} = -\epsilon_0 \frac{1}{h_s} \frac{\partial}{\partial s} \Phi(s)_{s=s_0} = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{s_0^2 + a^2}} \frac{1}{\sqrt{s_0^2 + a^2} \cos^2 v} \quad (106)$$

Případ $s_0 \neq 0$ popisující pole nabitého rotačního elipsoidu nabízí cvičení: jak souvisí plošná nábojová hustota na rovníku a na pólech s poloosami elipsoidu? Zde si všimneme situace, kdy se pro $s_0 = 0$ elipsoid redukuje na nabitý vodivý disk. Tehdy roste nábojová hustota na kraji disku do nekonečna

$$\sigma(x, y) = \frac{Q}{4\pi a} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad (107)$$

Integrací můžeme ověřit, že celkový náboj na disku je stále Q , přičemž tak jak disk vznikl zploštěním tělesa, je uvedená nábojová hustota přítomna z obou stran disku.

Kapacitu kruhového disku dostáváme

$$C = \frac{Q}{\Phi(s = s_0)} = 8\epsilon_0 a \quad (108)$$

tedy $\pi/2$ krát menší než je kapacita koule stelného průměru. Cavendish roku 1773 experimentálně určil tento poměr jako 1.541 ! (Zájemci o zavedení co nejuvěrnější repliky toho experimentu do praktika necht' kontaktují příslušná vyšší místa.)

Greenovy věty

Když v identitě $\operatorname{div} f\vec{A} = \vec{A}\cdot\operatorname{grad} f + f\operatorname{div} \vec{A}$ položíme $\vec{A} = \operatorname{grad} g$ dostáváme

$$f\Delta g = \nabla\cdot(f\nabla g) - \nabla f \cdot \nabla g \quad (109)$$

s použitím Gaussovy věty pak první Greenovu větu (identitu) $\operatorname{IGV}[f,g]$

$$\int_{\Omega} f\Delta g \, d^3x = \oint_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot d\vec{S} - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, d^3x. \quad (110)$$

Druhá Greenova věta vznikne jako rozdíl $\operatorname{IIGV}[f,g] = \operatorname{IGV}[f,g] - \operatorname{IGV}[g,f]$

$$\int_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f) \, d^3x = \oint_{\partial\Omega} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\vec{S}. \quad (111)$$

Střední hodnota řešení Laplaceovy rovnice

Nechť funkce Φ splňuje Laplaceovu rovnici $\Delta\Phi = 0$. S použitím druhé Greenovy identity dokážeme, že hodnota Φ ve středu koule $\Omega = K_a(0)$ je rovna průměru hodnot na jejím povrchu, tedy sféře $\partial\Omega = S_a(0)$. Pak $\operatorname{IIGV}[1/r, \Phi]$ dává

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{r}\Delta\Phi - \Phi\Delta\frac{1}{r}\right) d^3x = \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r}\nabla\Phi - \Phi\nabla\frac{1}{r}\right) \cdot d\vec{S}. \quad (112)$$

Príslušné čtyři integrály (zleva doprava) jsou 0, $+4\pi\Phi(0)$ (proto jsme volili funkci $1/r$), 0 (důsledek nepřítomnosti náboje v kouli) a $\frac{1}{a^2} \int \Phi dS$, a tedy platí

$$\Phi(0) = \oint_{S_a(0)} \Phi \frac{dS}{4\pi a^2}. \quad (113)$$

Samozřejmě tato zajímavá vlastnost řešení Laplaceovy rovnice platí i pro sféry se středem mimo počátek souřadnic a má za důsledek, že řešení Laplaceovy rovnice na nějaké oblasti může nabývat extrému jen na její hranici. (Jednoduchý důkaz sporem).

Formulace úlohy v elektrostatičce

Protože předem nevíme jak se náboje ve vodiči rozmístí, vyjmeme oblast vyplněnou vodičem z prostoru a Poissonovu rovnici řešíme jen na zbytku, oblasti Ω , kde je nábojová hustota známa. Na hranici (okraji) této oblasti, již tvoří nekonečno (nebeská sféra) a hranice jednotlivých vodičů pak předepíšeme hodnoty potenciálu – určíme *okrajové podmínky*.

Existence řešení takto zadané úlohy není samozřejmá. Jako příklad špatně zadané úlohy může posloužit hledání potenciálu jež v nekonečnu vymizí ale v počátku souřadnic má konečnou hodnotu. Protože symetrie úlohy dává řešení $\Phi(r) = A + B/r$, vidíme, že pro $B \neq 0$ nemůže být v počátku souřadnic řešení konečné. Podobně ze cvičení známé řešení popisující pole protáhlého rotačního elipsoidu jasně říká, že ani úsečka není dobrou oblastí, kde bychom mohli určit potenciál. Jako poučení z toho plyne, že z ploch, jež tvoří hranici oblasti Ω a na nichž chceme zadat potenciál (obvykle to jsou povrchy vodičů), nesmějí vychuhovat úsečkám podobné hroty.

Jednoznačnost

Máme-li dvě řešení Φ_1 a Φ_2 stejné elektrostatičké úlohy, víme že jejich rozdíl splňuje Laplaceovu rovnici a vymizí na hranici. Tyto dvě vlastnosti anulují dva ze tří integrálů v první Greenově větě $\operatorname{IGV}[\Phi_1 - \Phi_2, \Phi_1 - \Phi_2]$ a tak platí, že integrál kvadrátu gradientu rozdílu obou potenciálů přes objem oblasti $\int |\nabla(\Phi_1 - \Phi_2)|^2 d^3x$ je nulový. Protože se oba potenciály hranici shodují, jsou tedy stejné i kdekoli uvnitř.

Matice kapacit soustavy vodičů

Pokud se mimo povrch vodičů nenacházejí žádné náboje jsou při daném tvaru a poloze vodičů jediným volným parametrem hodnoty potenciálu na povrchu vodičů V_A . Každé z řešení Φ můžeme složit kombinací $\sum_A U_A \Psi_A$ “bázových” řešení $\Psi_A(\vec{x})$ splňujících okrajové podmínky $\Psi_A(\vec{x} \in \partial V_B) = \delta_{AB}$. Samozřejmě, nalézt tato bázová řešení je stejně obtížné jako vyřešit původní zadání. Pomohou nám ale pochopit význam matice kapacit. Ta popisuje souvislost napětí na vodičích a nábojů na nich.

$$Q_B = \oint_{\partial V_B} (-\epsilon_0 \nabla \Phi) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial V_B} (-\epsilon_0 \nabla \sum_A U_A \Psi_A) \cdot d\vec{S} = \sum_A U_A \oint_{\partial V_B} (-\epsilon_0 \nabla \Psi_A) \cdot d\vec{S} = \sum_A C_{BA} U_A, \quad (114)$$

kde jsme zavedli matici kapacit $C_{BA} = \oint_{\partial V_B} (-\epsilon_0 \nabla \Psi_A) \cdot d\vec{S}$. A -tý sloupec matice kapacit udává, jaký náboj je třeba umístit na vodiče určené indexem B , aby na vodiči V_A byl jednotkový potenciál a na ostatních nula. Tato souvislost koeficientů matice kapacit a funkcí Ψ_A umožňuje nahlédnout, že diagonální koeficienty musejí být kladné, zatímco koeficienty nediagonální musejí být záporné, případně nulové. To proto, že řešení Laplaceovy rovnice Ψ_A nabývá extrému na vodičích. V okolí toho z vodičů, na němž je jednotkový potenciál, je potenciál nižší než na jeho povrchu a nábojová hustota na jeho povrchu musí být kladná, v okolí vodičů s nulovým potenciálem je naopak vyšší potenciál než na jejich povrchu a nábojová hustota zde musí být záporná (příp. nulová, je-li celý obklopen jiným uzemněným vodičem). Jinými slovy, siločáry pole Ψ_A vedou z jediného vodiče s nenulovým potenciálem V_A do nekonečna nebo na některý z jiných vodičů. Pokud některé ze siločar končí na vodiči B , musí tento být nabit záporně. Nulový potenciál tedy automaticky nezmená nulový váboj.

S využitím vztahu $\Psi_A(\vec{x} \in \partial V_B) = \delta_{AB}$ a druhé Greenovy identity je vidět, že matice kapacit je symetrická

$$C_{BA} - C_{AB} = \oint_{\partial V_B} (-\epsilon_0 \nabla \Psi_A) \cdot d\vec{S} - \oint_{\partial V_A} (-\epsilon_0 \nabla \Psi_B) \cdot d\vec{S} = \quad (115)$$

$$\oint_{\bigcup \partial V_X} \Psi_B (-\epsilon_0 \nabla \Psi_A) \cdot d\vec{S} - \oint_{\bigcup \partial V_X} \Psi_A (-\epsilon_0 \nabla \Psi_B) \cdot d\vec{S} = +\epsilon_0 \int_{\Omega} (\Psi_B \Delta \Psi_A - \Psi_A \Delta \Psi_B) d^3x = 0,$$

přičemž změna znaménka před objemovým integrálem je zapříčiněna opačnou orientací hranice oblasti $\partial\Omega$ a hranice vodičů $\bigcup \partial V_X$.

Energie elektrostického pole

Energie soustavy bodových nábojů se v rámci elektrostiky konstruuje jejich postupným stěhováním z nekonečna, kde předpokládáme, že jsou od sebe natolik vzdáleny abychom mohli počáteční energii takto rozptýlené soustavy zanedbat. Při stěhování A -tého náboje z nekonečna do bodu x_A na něj působí již přestěhovaných $A - 1$ nábojů a vykonáme práci (díky $\text{rot } \vec{E} = 0$ nezávislou na cestě) proti silám pole na náboj jenž stěhujeme

$$W_A = - \int_{\infty}^{x_A} q_A \vec{E}_A \cdot d\vec{l} = \int_{\infty}^{x_i} q_A (+\text{grad } \Phi_{A-1}) \cdot d\vec{l} = \int_{\infty}^{x_i} q_A d\Phi_{A-1} = q_A \Phi_{A-1}. \quad (116)$$

Pro přestěhování všech nábojů je potřeba vykonat práci

$$W = \sum_A q_A \sum_{B < A} \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_A - \vec{x}_B|} = \frac{1}{2} \sum_A \sum_{B \neq A} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}_A - \vec{x}_B|} q_A q_B \quad (117)$$

Tentýž vztah lze psát

$$W = \frac{1}{2} \sum_A q_A \Phi'_A(\vec{x}_A) \quad (118)$$

kde $\Phi'_A(\vec{x}_A)$ označuje elektrický potenciál v bodě \vec{x}_A pokud by tam nebyl náboj q_A .

Vyjádřit energii elektrostického pole spojitěho rozložení nábojů můžeme po náhradě $q_A \rightarrow \rho(\vec{x}') d^3x'$

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}') \Phi(\vec{x}') d^3x' = \frac{1}{2} \iint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{x}') \rho(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' d^3x \quad (119)$$

přičemž pro spojitě rozložení nemáme zapotřebí vynechávat z potenciálu $\Phi(\vec{x}')$ vliv nábojové hustoty v bodě \vec{x}' . Toto nevynechání je ovšem zdrojem rozdílů mezi tímto vztahem a výše uvedeným vztahem pro soustavu bodových nábojů. Například soustava tvořená jediným náboje má kvůli $\sum_{A \neq B}$ nulovou energii. Ovšem, pokusíme-li se spočítat energii tohoto jediného náboje integrací (singulární) nábojové hustoty $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$, neuspějeme.

Pokud místo bodového náboje zkoumáme pole rovnoměrně nabitě kuličky o poloměru a a náboji Q budící okolo sebe pole

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3a^2 - r^2}{2a^3} & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r \geq a \end{cases}, \quad (120)$$

dostáváme pro $a \rightarrow 0$ energii rostoucí do nekonečna $W = \frac{1}{2} \int \Phi \rho d^3x = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\frac{4}{3}\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \rightarrow \infty$.

Bodové náboje tedy podle tohoto vztahu mají nekonečnou *vlastní energii* a to i když sedí opuštěny v nekonečnu. Tak lze chápat nesoulad mezi spojitým a diskretním vztahem pro energii v elektrostice. Protože proces vzniku reálných protějšků bodových nábojů – třeba elektronů – nespadá do elektrostiky nepředstavuje zde nekonečná vlastní energie vážnější komplikaci. Upozorňuje ale na fakt, že bodový náboj

by měl především sloužit jako pomůcka při řešení lineárních rovnic pole, např. $\Delta POLE = ZDROJ$, kde jej ještě navíc můžeme nazývat Greenovou funkcí – ale do nelineárních vztahů, např. $\int(ZDROJ * POLE)$ nezapadá.

V místě bodových a lineárních nábojů je hodnota potenciálu nekonečná a tak můžeme očekávat nekonečnou energii takovýchto objektů. Energie plošného rozložení náboje již může být konečná. Dobře to vidíme u energie soustavy vodičů popsanych maticí kapacity

$$W = \frac{1}{2} \int \Phi \rho d^3x = \frac{1}{2} \sum_A \sum_B C_{AB} U_A U_B = \frac{1}{2} \sum_A \sum_B C_{AB}^{-1} Q_A Q_B \quad (121)$$

Energie elektrostatického pole. Prozatím jsme mluvili o *energii nábojů*. S použitím Poissonovy rovnice a IGV $[\Phi, \Phi]$ dostáváme

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi \rho d^3x = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi (-\epsilon_0 \Delta \Phi) d^3x = \frac{1}{2} \int_{\partial \mathbb{R}^3} \Phi (-\epsilon_0 \nabla \Phi) \cdot d\vec{S} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \Phi \cdot (-\epsilon_0 \nabla \Phi) d^3x . \quad (122)$$

Pokud platí, že $\Phi(\infty) = 0$, vymizí příslušný plošný integrál a energii můžeme vyjádřit jako objemový integrál *hustoty energie elektrostatického pole* $w = \epsilon_0 |\vec{E}|^2$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \Phi|^2 d^3x \quad (123)$$

V rámci elektrostatiky nelze rozhodnout, zda tato energie pole má samostatný význam – pole bude v každém okamžiku svázáno s náboji.

Zajímavá je tato rovnost například pro soustavu vodičů, kdy energie je popsána jednak kvadratickou formou potenciálů na vodičích (121), jednak integrálem z hustoty energie elektrického pole – nabízí se tu analogie z mechaniky, kde energie deformace tělesa $\int(\text{deformace})^2 dV$ dává potenciální energii soustavy pružinami pospojovaných těles $\sum V_{AB} x_A x_B$ charakterizovanou posunutími z rovnovážné polohy x_A .

Příklad: Spočítejte energii pole nabitě sféry oběma způsoby. Můžete zkusit i pro pole nabitěho disku.

Příklad: Síla mezi deskami konenzátoru (kde se vezme faktor 1/2, pole jedné nabitě desky a jeho působení na druhou desku).

Nehomogenní úloha

Vložíme-li do blízkosti vodiče náboj, přeskupí se nosiče náboje ve vodiči tak aby jejich pole vyrušilo tečnou složku elektrického pole buzeného nábojem. Proto je za přítomnosti vodičů řešení Poissonovy úlohy mnohem obtížnější. Pokud bychom znali hodnoty pole $G(\vec{r}, \vec{r}')$ v bodě \vec{r} , jaké budí jednotkový bodový náboj $\rho = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$ umístěný do bodu \vec{r}' , můžeme výsledné pole popsat jako jejich superpozici. Potenciál bodového náboje $G(\vec{r}, \vec{r}')$ splňuje Poissonovu (Greenovu) rovnici

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (124)$$

s nulovými okrajovými podmínkami $G(\vec{r} \in \partial\Omega, \vec{r}') = 0$. Řešení Poissonovy rovnice s hustotou $\rho(\vec{x})$ pak získáme jako

$$\Phi(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d^3r' , \quad (125)$$

což představuje obdobu vztahu (33), přičemž ovšem takto spočtený potenciál nyní navíc splňuje nulové okrajové podmínky na hranici uvažované oblasti.

Problém: Jaká zajímavá vlastnost vyplyne z IIGV $[G(\vec{r}, \vec{a}), G(\vec{r}, \vec{b})]$?

O funkci G víme, že protože jde o pole bodového náboje ovlivněné přítomností nábojů vně Ω je možno psát

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}') \quad (126)$$

kde $F(\vec{r}, \vec{r}')$ popisuje pole od nábojů ve vodičích.

Metoda zrcadlení

Hledání funkce F není snadné a analytické výsledky je možné získat jen pro speciální tvar vodičů. V případě bodového náboje v blízkosti nekonečné uzemněné roviny $z = 0$ je možné za funkci F zvolit pole

bodového z náboje s opačným znaménkem v místě zrcadlového obrazu bodu \vec{r}' , $\vec{r}'' = [x', y', -z']$. Takto zvolená poloha fiktivního náboje způsobí, že

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right] \quad (127)$$

jen nulová v $z = 0$ nezávisle na \vec{x}' .

Cvičení: ukažte, že na povrchu roviny sídlí nábojová hustota

$$\sigma(x, y) = -\frac{Q}{4\pi} \frac{2z'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2]^{3/2}} \quad (128)$$

umístíme-li do bodu \vec{r}' náboj Q .

Kulová inverze

Ještě jeden tvar vodiče umožňuje explicitně nalézt $G(\vec{r}, \vec{r}')$ – koule. Máme-li funkci $\Psi(r, \theta, \phi)$ splňující rovnici

$$\Delta \Psi = \chi \quad (129)$$

splňuje funkce

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{a}{r} \Psi\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \phi\right) \quad (130)$$

rovnici

$$\Delta \Phi(r, \theta, \phi) = \frac{a^5}{r^5} \chi\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \phi\right) \quad (131)$$

Speciálně tak kulovou inverzí

$$\vec{r}'' = \left(\frac{a}{|\vec{r}'|}\right)^2 \vec{r}' \quad (132)$$

přechází jedno řešení Laplaceovy rovnice na druhé tak, že vnitřek přejde na vnějšek a naopak a navíc se hodnoty na povrchu koule nezmění (proto faktor a/r).

Příklad: Funkce $\Psi = 1$ je triviální řešení Laplaceovy rovnice, jeho kulová inverze $\Phi = a/r$ pak představuje Coulombické pole. Zatímco funkce $\Psi = z = r \cos \theta$ popisuje homogenní elektrické pole. Její kulová inverze $\Phi \sim \cos \theta / r^2$ je potenciál elektrického dipólu.

Cvičení: Všimněte si, že rozdíl $\Psi - \Phi$ je nulový na sféře o poloměru a . Nenechají-li se zdroje potenciálu Ψ ovlivnit vložením vodivé koule, lze výsledný potenciál nalézt právě jako tento rozdíl. Ukáže, že po vložení vodivé koule o poloměru a do homogenního pole $\Psi = Er \cos \theta$ má výsledný potenciál tvar $\Psi - \Phi = E(r - a^3/r^2) \cos \theta$. Spočítejte plošnou nábojovou hustotu na povrchu této vodivé koule.

Je zajímavé, že kulovou inverzí pole bodového náboje vznikne též pole bodového náboje a tak

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\frac{a}{|\vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \right] \quad \vec{r}'' = \left(\frac{a}{|\vec{r}'|}\right)^2 \vec{r}' \quad (133)$$

kde \vec{r}'' je poloha fiktivního náboje nacházejícího se uvnitř koule. S rostoucí vzdáleností od vodiče klesá i jeho náboj $\frac{a}{|\vec{r}'|}$. To lze popsat tak, že s rostoucí vzdáleností od vodiče klesá počet siločar, které skončí na vodiči s nulovým potenciálem a roste počet těch, které skončí v nekonečnu.

Řešení Laplaceovy rovnice ve sférických souřadnicích

Velký praktický význam má studovat pole vytvářené zdrojem s omezeným objemem. Tušíme, že daleko od zdroje si takové můžeme představit jako známé řešení Laplaceovy rovnice – pole bodového náboje $1/r$. Jako proměnná charakterizující vzdálenost od tělesa se zde přirozeně objeví sférické souřadnice. Než zjistíme jak vypadá další člen, jehož přítomnost můžeme v potenciálu daleko od zdroje očekávat, zkusíme se blíže seznámit s prostorem funkcí, které představují další řešení Laplaceovy rovnice ve sférických souřadnicích.

Úloha s předepsaným potenciálem na sféře

Předpokládejme, že uvnitř jednotkové koule splňuje pole Φ Laplaceovu rovnici. Víme, že zadáme-li jeho hodnoty na její hranici – jednotkové sféře, máme nejvýše jedno řešení. Předpokládejme, že hraniční podmínka zní

$$\Phi(\theta, \phi) = U \cos^2 \theta, \quad (134)$$

tedy zvolili jsme konkrétní hladkou funkci na sféře. Platí, že na sféře je zadaný potenciál roven

$$\Phi(\theta, \phi) = Uz^2, \quad (135)$$

tedy je úměrný kvadrátu souřadnice z . Za pokus tedy stojí hledat řešení $\Phi(x, y, z)$ na prostoru polynomů stupně ≤ 2 v kartézských souřadnicích. Vyřešení téhle úlohy vyžaduje nalézt všechny rovnice pro neznámé koeficienty. Pro polynomy takto nízkého stupně vyjde jen jedna rovnice z podmínky $\Delta\Phi = 0$, zatímco zbylé jsou dány průběhem hodnoty potenciálu na hranici, kde je třeba sféru parametrizovat pomocí θ a ϕ a požadovat rovnost koeficientů u všech nezávislých trigonometrických funkcí. Po určení všech koeficientů jako řešení soustavy lineárních rovnic nalezneme řešení uvnitř koule

$$\Phi(x, y, z) = \frac{U}{3}(1 + 2z^2 - x^2 - y^2). \quad (136)$$

Protože kulovou inverzí se vše, co bylo uvnitř dostane ven a zároveň se hodnoty na povrchu koule nezmění, tento invertovaný potenciál

$$\Phi(x, y, z)' = \frac{U}{3} \left(\frac{1}{|r|} + \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{|r|^5} \right) \quad (137)$$

popisuje pole vně koule s výše předepsanými okrajovými podmínkami.

Počet polynomů ve třech proměnných x, y a z stupně právě L je $n_L = (L+1)(L+2)/2$. Například máme 6 polynomů stupně právě 2 – x^2, y^2, z^2, xy, yz a zx . Počet polynomů stupně $\leq L$ je $N_L = \sum n_L = (L+1)(L+2)(L+3)/6$. Laplaceův operátor snižuje řád polynomu od dva, a tak Laplaceova rovnice představuje n_{L-2} resp. N_{L-2} podmínek. Uvažujeme-li polynomy stupně právě L , bude mezi nimi právě $n_L - n_{L-2} = 2L+1$ nezávislých polynomů řešících Laplaceovu rovnici. Působení Laplaceova operátoru na kvadratické polynomy dává konstantu a tedy dimenze oboru hodnot na tomto prostoru je 1. Proto máme $6 - 1 = 5$ nezávislých kvadratických polynomů splňujících Laplaceovu rovnici, např. $2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2, xy, yz$ a zx . Uvažujeme-li polynomy stupně $\leq L$ bude mezi nimi

$$(L+1)^2 = \sum_{l=0}^L (2l+1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2L+1) \quad (138)$$

nezávislých řešení Laplaceovy rovnice.

Tato řešení nelze katalogizovat ve tvaru s rovnoprávně zastoupenými souřadnicemi x, y a z . Například tři funkce $x^2 + y^2 - 2z^2, y^2 + z^2 - 2x^2$ a $z^2 + x^2 - 2y^2$ dají nulový součet a při vylučování “té závislé” vneseme do seznamu asymetrii. Nejúspornější je pak následující zápis katalogu polynomiálních řešení Laplaceovy rovnice

$$\begin{aligned} \phi_{00} &= 1 \\ \phi_{10} &= z & \phi_{1\pm 1} &= x \pm iy \\ \phi_{20} &= 2z^2 - x^2 - y^2 & \phi_{2\pm 1} &= z(x \pm iy) & \phi_{2\pm 2} &= (x \pm iy)^2 \\ &\dots \end{aligned} \quad (139)$$

v němž je využito komplexní kombinace $x \pm iy$ pro dosažení co nejjednoduššího zápisu. Samozřejmě $\text{Re } \phi_{lm}$ a $\text{Im } \phi_{lm}$ představují alternativu k ϕ_{lm} a $\bar{\phi}_{lm} = \phi_{l-m}$. Komplexní zápis ale přijde vhod při počítání $\Delta\phi_{lm}$, protože $\Delta u(x+iy) = 0$ pro každou holomorfní funkci u , tedy i m -tou mocninou $(x+iy)^m$. Navíc v takto uspořádaném seznamu je tvar každé z bázevých funkcí ϕ_{lm} až na její normování jednoznačně určen, protože má tvar součinu polynomu $(x+iy)^{|m|}$ stupně $|m|$ a polynomu $Q_l^{|m|}(z, x^2+y^2)$ stupně $l-|m|$ a pro takovéto funkce představuje Laplaceova rovnice právě odpovídající počet rovnic pro neznámé koeficienty polynomu $Q_l^{|m|}$.

Separace Laplaceovy rovnice ve sférických souřadnicích

Laplacián ve sférických souřadnicích má tvar

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \Phi \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \Phi \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega \Phi, \quad (140)$$

zde definujeme úhlovou část Laplaceovu Δ_Ω . Oddělíme závislost na jednotlivých proměnných do tvaru součinu

$$\Phi(r, \theta, \phi) = f(r) g(\theta) h(\phi) . \quad (141)$$

čímž Laplaceova rovnice získá tvar

$$\Delta(f(r) g(\theta) h(\phi)) = \frac{1}{r}(rf)''gh + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta g')'fh + \frac{1}{\sin^2\theta}h''fg \right] = 0 . \quad (142)$$

Rovnici vydělíme součinem fgh a v souladu s principem separace proměnných funkcí $h(\phi)$ zvolíme tak, aby splňovala rovnici $h''/h = \text{konst.}$ tedy $h = e^{\lambda\phi}$. Pro nutně periodickou funkci $h(\phi)$ periodické souřadnice ϕ zvolíme $\lambda = im$, tedy $h(\phi) = e^{im\phi}$. Poté přepíšeme Laplaceovu rovnici $\Delta\Phi$ do tvaru

$$\frac{1}{f}r(rf)'' = -\frac{1}{g} \left[\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta g')' - \frac{m^2}{\sin^2\theta}g \right] . \quad (143)$$

Na levé straně vystupují pouze funkce (a derivace podle) r , na pravé straně pouze funkce (a derivace podle) θ , obě tedy musí představovat nějakou konstantu. Její zápis je zřejmý z faktu, že levá strana $\frac{1}{f}r(rf)'' = \text{konst.}$ představuje diferenciální rovnici s polynomiálními řešeními a tak tuto konstantu zapíšeme jako $l(l+1)$ a řešení i s integračními konstantami má tvar

$$f_l(r) = ar^l + \frac{b}{r^{l+1}} . \quad (144)$$

Očividně jde o dvě navzájem kulově inverzní funkce.

Naopak pravá strana (143) představuje netriviální Legendrovu diferenciální rovnici a nalézt a analyzovat její řešení není snadné. Proto mají svoje označení $P_l^m(\cos\theta)$. Výsledné separované řešení má tvar

$$\Phi = \left(ar^l + \frac{b}{r^{l+1}} \right) P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (145)$$

Separovaná řešení a kulové funkce

Zatímco pro každé l existuje alespoň jedno v počátku regulární řešení $f_l(r)$, funkce $\sin\theta$ vystupující ve jmenovateli členů v Legendrově diferenciální rovnici je nulová na obou pólech $\theta = 0, \pi$. Ukazuje se, že požadavek, aby funkce $g(\theta)$ představovala regulární funkce, omezuje hodnoty l na celá nezáporná čísla a m na celá čísla taková, že $|m| \leq l$.

Připomeňme, že nalezení separovaného řešení má praktický význam. Bude-li množina řešení $f_l(r)$ tvořit hustou bázi ve vhodném prostoru funkcí jedné proměnné r , množina řešení $g_k(\vartheta)$ tvořit hustou bázi v prostoru funkcí jedné proměnné ϑ a podobně pro $h_m(\phi)$, budou funkce $\Psi_{klm}(\vec{r}) = f_l(r) g_k(\vartheta) h_m(\phi)$ tvořit hustou bázi v prostoru funkcí všech tří proměnných. Nalezení separovaných řešení Laplaceovy rovnice pak umožní pro každé l, m nalézt takové $k(l, m)$, že $\Phi_{klm}(\vec{r}) = f_l(r) g_{klm}(\vartheta) h_m(\phi)$ je hustou bázi prostoru řešení Laplaceovy rovnice. V následujících odstavcích ukážeme, že tato separovaná řešení mají ještě hlubší matematický i fyzikální význam, speciálně, že koeficienty pole splňujícího Laplaceovu rovnici vně omezeného zdroje jsou přímo určeny rozložením náboje uvnitř zdroje.

Místo řešení diferenciální rovnice můžeme Legendrovu funkci $P_l^m(\cos\theta)$ až na normalizační faktor nalézt srovnáním separovaného řešení s již dříve nalezenými polynomiálními řešeními, jež odpovídají volbě $f(r) = r^l$. Například pro $l = 2, m = 1$ máme

$$\phi_{21} = z(x + iy) = (r \cos\theta) (r \sin\theta \cos\phi + ir \sin\theta \sin\phi) = (r^2)(\cos\theta \sin\theta)(\cos\phi + i \sin\phi) \quad (146)$$

kde můžeme jasně identifikovat funkce $f(r), g(\theta)$ a $h(\phi)$, tedy i hledaný tvar $P_2^1(\cos\theta) \sim \cos\theta \sin\theta$.

Je praktické sloučit závislost za úhlových proměnných do jedné funkce a separovaná řešení psát v podobě

$$\Phi = \left(ar^l + \frac{b}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \phi) . \quad (147)$$

Původ konkrétní volby normalizace funkcí $Y_{lm}(\theta, \phi)$ se vyjeví v zápětí, nejprve si ale ukažme jak některé vypadají zapsány v kartézských souřadnicích na jednotkové sféře $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:

$$Y_{00} = \lambda_{00} \times 1$$

$$Y_{10} = \lambda_{10} z, \quad Y_{1\pm 1} = \lambda_{1\pm 1} (x \pm iy),$$

$$Y_{20} = \lambda_{20} (z^2 - x^2 - y^2), \quad Y_{2\pm 1} = \lambda_{2\pm 1} z(x \pm iy), \quad Y_{2\pm 2} = \lambda_{2\pm 2} (x \pm iy)^2,$$

$$Y_{30} \approx z(2z^2 - 3x^2 - 3y^2), Y_{3\pm 1} \approx (4z^2 - x^2 - y^2)(x \pm iy), Y_{3\pm 2} \approx z(x \pm iy)^2, Y_{3\pm 3} \approx (x \pm iy)^3.$$

Vidíme tedy onu strukturu funkcí ϕ_{lm} v podobě součinu polynomu $Q_l^{|m|}(z, x^2 + y^2)$ a faktoru $(x \pm iy)^{|m|}$. Normalizace zvolíme podobně jak je zvykem v úvodních kursech kvantové mechaniky $\int |Y_{lm}|^2 d\Omega = 1$, kde $d\Omega$ představuje plochu na jednotkové sféře, $\int d\Omega = 4\pi$. Proto $\lambda_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$. S použitím (147) a IIGV lze pak ukázat, že pro dvě různé kulové funkce musí střední hodnota jejich součinu přes sféru vymizet, přesněji

$$\int Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (148)$$

Takovou situaci známe z Fourierových řad, kde funkce $e_m(x) = e^{imx}/\sqrt{2\pi}$ nejen splňují $\int_0^{2\pi} e_m(x) e_{m'}^*(x) dx = \delta_{mm'}$, ale jejich sada $m \in \mathbb{Z}$ představuje úplnou bázi v prostoru vhodných funkcí na intervalu $(0, 2\pi)$. Podobně funkce $Y_{lm}(\theta, \phi)$ představují úplnou bázi funkcí na sféře, hezkou funkci $u(\theta, \phi)$ můžeme zapsat

$$u(\theta, \phi) = \sum_{\substack{l=0,1,2,\dots \\ m=-l,\dots,l}} u_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (149)$$

kde koeficienty příslušného rozvoje jsou

$$u_{lm} = \int u(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) d\Omega. \quad (150)$$

Nyní čistě matematickým trikem ukážeme, že koeficienty rozvoje potenciálu na nějaké sféře S obklopující zdroje jsou přímo určeny vlastnostmi (momenty) rozložení náboje ve zdroji. Jako motivaci vezmeme skutečnost, že střední hodnota potenciálu na sféře okolo zdroje souvisí s celkovým nábojem, podle Gaussovy věty je

$$\int_{\text{int } S} \Delta \Phi d^3x = -\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_S \nabla \Phi d\vec{S}. \quad (151)$$

Pokud lze zapsat Φ v separovaném tvaru s $\Phi(r = \infty) = 0$, vidíme, že Q hraje roli koeficientu u členu $1/r$ (ostatní členy mj. ubývají s rostoucím poloměrem S rychleji, než roste plocha S).

Nyní využijeme toho, že známe řešení Laplaceovy rovnice $\Delta \Psi = 0$ v separovaném tvaru, a položíme $\Psi = r^l Y_{lm}^*(\theta, \phi)$. Předpokládáme-li, že potenciál Φ lze vně sféry zapsat v podobě rozvoje (147) s nulovými koeficienty u členů $\sim r^l$ (aby $\Phi \rightarrow 0$ v nekonečnu), tedy

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_{lm} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \phi)}{r^{l+1}}, \quad (152)$$

pak s použitím IIGV

$$\int_K (\Psi \Delta \Phi - \Phi \Delta \Psi) d^3x = \oint_S (\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) \cdot \vec{e}_r dS, \quad (153)$$

kam na levé straně dosadíme $\Delta \Psi = 0$ a na pravé $\nabla \Psi \cdot \vec{e}_r = l r^{l-1} Y_{lm}^*$ a uvnitř sumy (152) $\nabla(Y_{lm}/r^{l+1}) \cdot \vec{e}_r = -(l+1)(Y_{lm}/r^{l+2})$ po vytknutí všeho, co nezávisí na úhlových proměnných, dostaneme na pravé straně integrál v podobě (148). Členy v podobě $\delta_{ll'} \delta_{mm'}$ pak z původně nekonečné sumy ponechají jen jediný člen a dostaneme

$$\int_K (-\rho/\epsilon_0) r^l Y_{lm}^* d^3x = -q_{lm} \frac{2l+1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}, \quad (154)$$

tedy po vyjádření

$$q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int_K \rho(r, \theta, \phi) r^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) d^3x. \quad (155)$$

Tím jsme dosáhli cíle: má-li řešení vně nějaké sféry tvar rozvoje v podobě sumy separovaných řešení Laplaceovy rovnice (152), pak koeficienty tohoto rozvoje dokážeme spočítat podobně jako náboj jako jisté celkové vlastnosti zdroje (momenty náboje). Momenty proto, že členy $r^l Y_{lm}^*(\theta, \phi)$ násobící pod integrálem nábojovou hustotu v (155), jak víme, jsou polynomy v x, y, z .

Pole daleko od zdroje

Řešení Poissonovy rovnice v celém prostoru má známý tvar

$$4\pi\epsilon_0 \Phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'. \quad (156)$$

V situaci, kdy jsou zdroje umístěny v ohraničené oblasti V , pro niž platí $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'| \quad \forall \vec{r}' \in V$, se nabízí použít Taylorův rozvoj funkce $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{1}{1!} \left. \frac{\partial'_i}{\partial |\vec{r} - \vec{r}'|} \right|_{\vec{r}'=0} r'_i + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial'_{ij}}{\partial |\vec{r} - \vec{r}'|} \right|_{\vec{r}'=0} r'_i r'_j + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial'_{ijk}}{\partial |\vec{r} - \vec{r}'|} \right|_{\vec{r}'=0} r'_i r'_j r'_k + \dots \quad (157)$$

Příslušné parciální derivace

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial'_i}{\partial |\vec{r} - \vec{r}'|} \right|_{\vec{r}'=0} &= \frac{M_i^{(1)}(\vec{r})}{r^3}, & M_i^{(1)}(\vec{r}) &= r_i, \\ \left. \frac{\partial'_{ij}}{\partial |\vec{r} - \vec{r}'|} \right|_{\vec{r}'=0} &= \frac{M_{ij}^{(2)}(\vec{r})}{r^5}, & M_{ij}^{(2)}(\vec{r}) &= 3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}, \\ \left. \frac{\partial'_{ijk}}{\partial |\vec{r} - \vec{r}'|} \right|_{\vec{r}'=0} &= \frac{M_{ijk}^{(3)}(\vec{r})}{r^7}, & M_{ijk}^{(3)}(\vec{r}) &= 15r_i r_j r_k - 3(\delta_{ij} r_k + \delta_{jk} r_i + \delta_{ki} r_j) r^2 = 15r_i r_j r_k - 9 \delta_{(ij} r_k) r^2, \end{aligned}$$

přestávají být pro větší řády l použitelné pro praktické počítání. Protože jsou to úplně symetrické tenzory může být z jejich 3^l složek, nanejvýš $(l+1)(l+2)/2$ nezávislých. Navíc splňuje každý z polynomů-tenzorů $M_{ijk\dots}^{(l)}(\vec{r})$ podmínku nulové stopy, neboť v uvažované oblasti $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ je splňuje (157) Laplaceovu rovnici, což sníží počet nezávislých komponent tohoto tenzoru na pouhých $2l+1$. To je vidět nejnázne z toho, že kulovou inverzí funkce $M_{ijk\dots}^{(l)}(\vec{r})/r^{2l+1}$ dostáváme polynom $M_{ijk\dots}^{(l)}(\vec{r})$ stupně l . Počet nezávislých polynomů tohoto stupně, jež splňují Laplaceovu rovnici jsme již dříve určili jako $2l+1$.

Nulovost stop můžeme využít k tomu, že taylorovské polynomy např. $r'_i r'_j r'_k$ nahradíme $1/15 M_{ijk}^{(3)}(\vec{r}')$ atp., čímž rozvoj získá symetrický tvar

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{M_i^{(1)}(\vec{r}) M_i^{(1)}(\vec{r}')}{r^3} + \frac{1}{2! \cdot 3} \frac{M_{ij}^{(2)}(\vec{r}) M_{ij}^{(2)}(\vec{r}')}{r^5} + \frac{1}{3! \cdot 15} \frac{M_{ijk}^{(3)}(\vec{r}) M_{ijk}^{(3)}(\vec{r}')}{r^7} + \dots \quad (158)$$

Přestože pro vyšší řády jde o velmi neefektivní vzorec, můžeme rozvoj dosadit do (156). Zavedeme označení pro tenzorové momenty nábojové hustoty, tedy pro integrály součinu polynomů v souřadnicích a nábojové hustoty $Q_{ijk\dots}^{(l)} = \int M_{ijk\dots}^{(l)}(\vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3 r'$ a poté pro potenciál daleko od zdroje můžeme psát

$$4\pi\epsilon_0 \Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{Q_i^{(1)} M_i^{(1)}(\vec{r})}{r^3} + \frac{Q_{ij}^{(2)} M_{ij}^{(2)}(\vec{r})}{r^5} + \frac{Q_{ijk}^{(3)} M_{ijk}^{(3)}(\vec{r})}{r^7} + \dots \quad (159)$$

Jde o součet, v němž l -tý člen ubývá do nekonečna jako $1/r^{l+1}$ a koeficienty v tomto rozvoji jsou:

- koeficient u členu s $l=0$ je skalár a má význam celkového náboje $Q = \int \rho(\vec{r}') d^3 r'$.
- koeficient u členu s $l=1$ je vektor a jde o celkový dipólový moment zdroje $Q_i^{(1)} = \int r'_i \rho(\vec{r}') d^3 r'$
- koeficient u členu s $l=2$ je tenzor druhého řádu (symetrický, bezstopý) a jde o tzv. kvadrupólový moment soustavy $Q_{ij}^{(2)} = \frac{1}{6} \int (3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}') d^3 r'$

Poznámka. členy všech výše uvedených rozvoju pro $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ splňují Laplaceovu rovnici v \vec{r}' všude kromě počátku. Jak je možné, že jejich poskládáním vznikne funkce $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$, která nespĺňuje Laplaceovu rovnici pro $\vec{r} = \vec{r}'$? Za tímto nesouladem stojí otázka konvergence uvažovaných řad. Jak mnohem zřetelněji uvidíme dále, rozvoje $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ konvergují jen vně (či uvnitř) koule o poloměru $|\vec{r}'|$ a tedy rozvoje potenciálu mají smysl jen vně koule obsahující všechny náboje.

Multipólový rozvoj v kulových funkcích

Stále platí, že v rozvoji (159) jsou příslušné součiny tenzorů formálně součtem 3^n členů, i když se dá ukázat, že v každém takovém součtu je jen $2l+1$ nezávislých sčítanců. Při jejich hledání bychom museli učinit velkou spoustu objevů, abychom nakonec zjistili, že klíč leží v následující formuli, která představuje konečný dokonale optimalizovaný tvar Taylorova rozvoje funkce $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^l \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^* \left(\frac{\vec{r}'}{r'} \right) Y_{lm} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (160)$$

kde kulová funkce $Y_{lm}(\vartheta, \phi)$ je až na normalizaci dána vztahem

$$\phi_{lm} = Q_{l-|m|}(z, x^2 + y^2) (x \pm iy)^{|m|} \sim r^l Y_{lm} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right), \quad (161)$$

kde ϕ_{lm} jsou již dříve zmíněná báze polynomů v kartézských souřadnicích x, y, z stupně právě l , jež splňují Laplaceovu rovnici.

Integrací (160) s nábojovou hustotou dostáváme

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_{lm} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \phi)}{r^{l+1}} \quad (162)$$

s koeficienty q_{lm} udávajícími jak rozložené jsou náboje vytvářející pole

$$q_{lm} = \int_V \rho(\vec{r}') \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \phi') d^3\vec{r}' \quad (163)$$

Význam tohoto rozvoje týž jako u (159), pouze místo tenzorových, ve vyšších řádech silně nadbytečných, koeficientů $Q_{ijk..}^{(l)}$ máme koeficienty multipólové q_{lm} . Díky vhodnému normování kulových funkcí je koeficient q_{00} roven celkovému náboji Q tělesa a první člen rozvoje tak říká, že $\Phi \approx Q/(4\pi\epsilon_0 r)$. Podobně s kvadrátem vzdálenosti ubývá příspěvek dipólového momentu náboje daného trojicí veličin $q_{1,-1}, q_{1,0}$ a $q_{1,1}$.

Kulové funkce

Především, kulové funkce jsou komplexní funkce reálných sférických proměnných ϑ a ϕ . Důvod je stejný, jako v případě fourierovské báze na intervalu $x \in \langle -1, 1 \rangle$, kterou v teoretických úvahách volíme e^{imx} spíše než $1, \sqrt{2} \cos(nx), \sqrt{2} \sin(nx)$ a to kvůli jednoduchosti. V případě kulových funkcí je to závislost tvaru $e^{im\phi}$.

Již v oddíle věnovaném separaci proměnných v kulových souřadnicích jsme viděli, že nalézt část řešení závislé na ϑ znamenalo zkoumat složitou diferenciální rovnici. Její řešení $P_l^m(\cos \theta)$ lze nalézt pomocí Rodriguesovy formule

$$P_l^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (164)$$

Přidáním separované části závislé na ϕ a dodáním normovacího a fázového koeficientu dostáváme z přidruženého Legendera polynomu kulovou funkci

$$Y_{lm}(\vartheta, \phi) = (-1)^m \left(\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right)^{1/2} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\phi} \quad (165)$$

Pro takto normované kulové funkce platí

$$Y_{l-m}(\vartheta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\vartheta, \phi) . \quad (166)$$

Pozn. Při hledání separovaného řešení Laplaceovy rovnice jsme zjistili že $P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\phi}$ je vlastní funkce úhlové části Laplaceovy rovnice Δ_Ω s vlastní hodnotou $-l(l+1)$. To má za následek, že kulové funkce tvoří ortonormální bázi na prostoru funkcí na sféře.

Příklad Použijeme předcházející vztahy k výpočtu tvaru funkce Y_{32} . Pro zjednodušení budeme počítat nejdříve Y_{3-2} k čemuž nám stačí jen jedenkrát derivovat při výpočtu P_l^m podle (164).

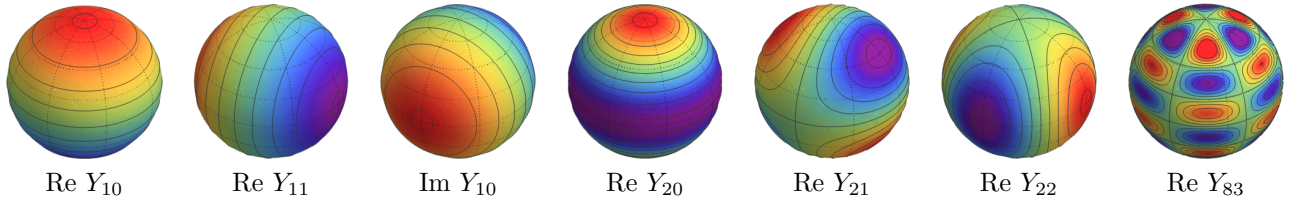
$$P_3^{-2} = \frac{(1-x^2)^{-1}}{2^3 3!} [(x^2-1)^3]' = \frac{1}{8}(x^2-1)x \quad (167)$$

$$Y_{3-2} = \sqrt{\frac{7 \cdot 5!}{4 \pi 1! 8}} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta e^{-2i\phi} = \sqrt{\frac{105}{32 \pi}} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta e^{-2i\phi} \quad (168)$$

Tedy

$$Y_{32} = \sqrt{\frac{105}{32 \pi}} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta (\cos \phi + i \sin \phi)^2 = \sqrt{\frac{105}{32 \pi}} \frac{z(x+iy)^2}{r^3} \quad (169)$$

Poznámka: Vykreslíme-li na povrch koule znaménko reálné či imaginární části této funkce uvidíme čtyři kladné a čtyři záporné oblasti. Uvažujeme-li řešení Laplaceovy rovnice $r^{-4} Y_{32}(\vartheta, \phi)$, víme, že nemá v oblasti $r > 0$ extrém. Proto z extrému na nějaké sféře po radiále dojdeme až do počátku, kde si můžeme představit natěsnané čtyři kladné a čtyři záporné náboje. Členům rozvoje s $l = 1, 2, 3$ se říká dipólové, kvadrupólové a oktopólové. Toto pojmenování souvisí s tím, že zdroje budící potenciál Y_{lm}/r^{l+1} si lze představit jako těsnou dvojici zdrojů s l o jednu menším, dipól jako dva monopóly, kvadrupól jako dva dipóly, atd. Pro větší l lze ale vystačit s menším počtem nábojů, než je 2^l . Zadání úlohy do sbírky



Obrázek 10: Hodnoty některých kulových funkcí. Poslední obrázek má ilustrovat, že reálná (ale i imaginární) část Y_{lm} odpovídá $2m \times (l + 1 - m)$ nábojům alternující polarity podél rovnoběžek \times poledníků.

Pěstujeme kulové funkce: Zkuste vymyslet kolik nábojů potřebujete aby bylo vzdálená pole popsáno $l = 4$ a proč je běžně užívané označení hexadekapól špatné?

Kulové funkce díky svým zázračným vlastnostem například umožňují okamžitě řešit úlohu, kdy na povrchu koule je předepsán průběh napětí $U(\vartheta, \phi)$ a je třeba určit pole daleko od ní. My jsme to dokázali v případě, kdy potenciál byl na povrchu koule roven nějakému polynomu v kartézských souřadnicích tím, že jsme řešili soustavu lineárních rovnic danou z části okrajovými podmínkami a z části Laplaceovou rovnicí. Protože multipólový rozvoj automaticky řeší polní rovnice, stačí určit koeficienty v rozvoji tak aby byly splněny okrajové podmínky. Proto s pomocí kulových funkcí zapíšeme potenciál prostoru okolo hraniční sféry ve tvaru multipólového rozvoje

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l U_{lm} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \phi)}{r^{l+1}} \quad (170)$$

a jedna z mnoha kouzelných vlastností kulových funkcí

$$\int Y_{lm}(\vartheta, \phi) Y_{l'm'}^*(\vartheta, \phi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (171)$$

zvaná relace ortogonality nám umožňuje spočítat přímo koeficienty rozvoje pro libovolný průběh funkce $U(\vartheta, \phi)$ takto

$$\Phi(|\vec{r}| = a) = U(\vartheta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l U_{lm} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \phi)}{a^{l+1}} \quad | \times Y_{l'm'}^* \int d\Omega \quad (172)$$

a tedy

$$\int U(\vartheta, \phi) Y_{l'm'}^*(\vartheta, \phi) d\Omega = \frac{U_{l'm'}}{a^{l'+1}}, \quad (173)$$

neboli

$$U_{lm} = a^{l+1} \int U(\vartheta, \phi) Y_{lm}^*(\vartheta, \phi) d\Omega. \quad (174)$$

Axiálně symetrická pole

Protože pro osově souměrné rozložení nábojů vymizí integrál $\int_0^{2\pi} e^{im\phi} d\phi$ pro $m \neq 0$, zjednoduší se součet přes m na jediný člen, odpovídající momentům

$$q_l = \int_V \rho(\vec{r}') r'^l P_l(\cos \vartheta') d^3\vec{r}', \quad (175)$$

kde jsme zavedli $q_l = q_{l0}$ a $P_l(x) = P_l^0(x)$. Za předpokladu axiální symetrie rozložení nábojů tak pro potenciál platí

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} q_l \frac{P_l(\cos \vartheta)}{r^{l+1}} \quad (176)$$

Jak je z definice vidět, jsou $P_l(x)$ polynomy stupně l . Například

$$P_0(x) = 1 \quad (177)$$

$$P_1(x) = x \quad (178)$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad (179)$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \quad (180)$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} \quad (181)$$

Také je na místě uvést vztah

$$P_l(x) = \frac{2l-1}{l}xP_{l-1}(x) - \frac{l-1}{l}P_{l-2}(x) \quad (182)$$

kteřý umožňuje ze snadno zapamatovaných hodnot $P_0(x) = 1$ a $P_1(x) = x$ určit všechny další, stejně tak, jako dokázat užitečnou vlastnost

$$P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l \quad (183)$$

Příklad. Spočtete momenty q_l náboje o velikosti $Q = 4\pi\epsilon_0$ umístěného na ose z ve vzdálenosti z' od počátku a z toho, že budí známé coulombovské pole, odvoďte známý generující vzorec pro Legendrovy polynomy

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\cos\vartheta+x^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l P_l(\cos\vartheta) \quad (184)$$

Legendrovy polynomy jsou vzorovým příkladem ortogonální báze funkcí, na rozdíl od kulových funkcí je jejich normalizace a fáze volena vztahem $P_l(1) = 1$ a tak relace ortogonalitě vypadá následovně

$$\int_{-1}^{1r} P_l(z)P_{l'}(z)dz = \int_0^\pi P_l(\cos\vartheta)P_{l'}(\cos\vartheta)d\cos\vartheta = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \quad (185)$$

a úplnost dokládá vzorec

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\cos\vartheta)P_l(\cos\vartheta') = \delta(\cos\vartheta - \cos\vartheta') = \frac{1}{\sin\vartheta}\delta(\vartheta - \vartheta') \quad (186)$$

Zde je explicitně připomenut vztah $\delta(f(x)) = 1/f' \delta(x - x_0)$.

Příklad. Jako prototyp netriviálního elektrostatického pole nám nyní poslouží rovnoměrně nabitá tyčka (náboj Q , délka $2a$):

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{2a} \ln \frac{z-a-\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}}{z+a-\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}} \quad (187)$$

Uvažujme hodnoty potenciálu na poloose $z > 0$

$$4\pi\epsilon_0\Phi(z) = \frac{Q}{2a} \ln \frac{z+a+\sqrt{(z+a)^2}}{z-a+\sqrt{(z-a)^2}} = \frac{Q}{2a} \ln \frac{z+a}{z-a} = \frac{Q}{2a} \ln \frac{1+\frac{a}{z}}{1-\frac{a}{z}} \quad (188)$$

Při uvážení rozvoje $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \dots$ dostaneme

$$4\pi\epsilon_0\Phi(z) = \frac{Q}{z} \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{a}{z}\right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{a}{z}\right)^6 + \dots \right) \quad (189)$$

Protože platí, že $P_l(\cos 0) = 1$, musí $Q, Qa^2/3, Qa^4/5$ atd. být koeficienty q_0, q_2, q_4 atd. v rozvoji (176).

Pokud platí (175), (176) musí tyto koeficienty souhlasit s přímo spočtenými multipólovými koeficienty (175)

$$q_l = \int_{-a}^a \frac{Q}{2a} |z|^l P_l(\cos\vartheta) dz, \quad \cos\vartheta = \frac{z}{|z|} = \operatorname{sgn} z \quad (190)$$

Pro lichá l je integrand lichá funkce (nebot $P_{2k+1}(\pm 1) = \pm 1$) a tak nenulové zůstanou jen sudé koeficienty

$$q_{2n} = \frac{Q}{2n+1} a^{2n} \quad (191)$$

což jsme věděli již z Taylorova rozvoje potenciálu podél osy z .

Příklad Elektrostatické pole rovnoměrně nabitě kružnice. Integrací je tento příklad řešen v Kvasnicově učebnici a vede na eliptický integrál. (Pozor na tiskovou chyбку na str. 328, správně je $A = [r^2 + a^2 + 2ar \sin\vartheta]^{1/2}$.) My si povšimneme, že integrál (156) lze snadno spočíst na ose z , kde platí

$$4\pi\epsilon_0\Phi(Z) = \frac{Q}{\sqrt{a^2+z^2}} \quad (192)$$

Protože

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \begin{cases} v(z) & z < 1 \\ \frac{1}{z}v(\frac{1}{z}) & z > 1 \end{cases}, \quad (193)$$

kde

$$v(z) = 1 - \frac{1}{2^1 \cdot 1} z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} z^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} z^6 + \dots + \frac{(-1)^k 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2^k \cdot k!} z^{2k} + \dots \quad (194)$$

známe rozvoj $\Phi(Z)$ v okolí nuly i nekonečna:

$$4\pi\epsilon_0\Phi(Z) = \frac{Q}{a} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{Z}{a} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{Z}{a} \right)^4 - \dots \right] \quad Z < a \quad (195)$$

$$= \frac{Q}{Z} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{Z} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{Z} \right)^4 - \dots \right] \quad Z > a \quad (196)$$

Víme, že řešení Laplaceovy rovnice lze psát jako

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \vartheta), \quad \cos \Theta = \frac{z}{r} \quad (197)$$

pro dostatečně velká r a podobně

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \bar{q}_l r^l P_l(\cos \vartheta), \quad (198)$$

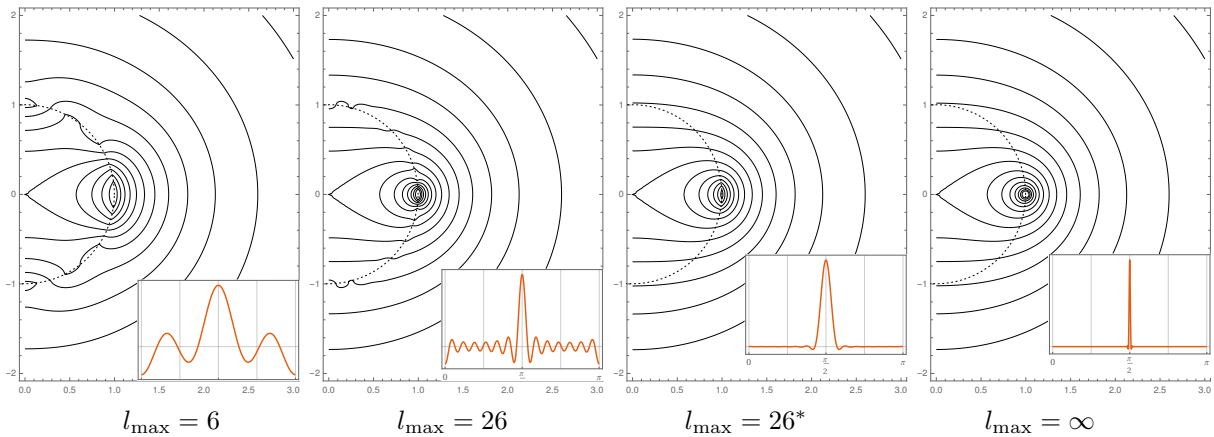
v okolí počátku, platí-li tam, že $\Delta\Phi = 0$.

Proto můžeme v (195-196) nahradit členy Z^l výrazem $R^l P_l(\cos \Theta)$ ve vnitřním rozvoji a členy Z^{-l-1} výrazem $R^{-l-1} P_l(\cos \Theta)$ v rozvoji vnějším, tedy platí

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{a} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{a} \right)^2 P_2(\cos \Theta) + \frac{3}{8} \left(\frac{R}{a} \right)^4 P_4(\cos \Theta) - \dots \right] \quad Z < a \quad (199)$$

$$= \frac{Q}{R} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R} \right)^2 P_2(\cos \Theta) + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{R} \right)^4 P_4(\cos \Theta) - \dots \right] \quad Z > a \quad (200)$$

Uvažujeme-li součet až do členů $P_6(\cos \Theta)$, resp $P_{26}(\cos \Theta)$, dopadne porovnání součtu řady a přesného řešení takto:



Obrázek 11: Ekvipotenciály přesného pole prstence (vpravo) a různě dlouhých součtů řad multipólového rozvoje. Protože prstenec představuje singulární zdroj v podobě δ -funkce, je jeho plošná nábojová hustota (oranžově) rozložena do podoby nehezky konvergující Fourierovy řady. Tuto Konvergenci lze urychlit vhodným utlumením koeficientů rozvoje blízkých l_{\max} . Tím je sice měníme, ale pokud to uděláme dobře vypadá výsledek lépe, než když sčítání řady prudce ukončíme u $l = l_{\max}$.

U ekvipotenciál přibližného řešení na Obrázku 11 můžeme pozorovat *poruchy* poblíž koule $r = a$. Ty jsou způsobeny koncem konvergence řady, můžeme se na ně také ale dívat jinak.

Cvičení: Řekněme, že budeme studovat výše zkonstruované pole jež získáme uvnitř i vně rozvojem do nějakého konečného l . Jaké nábojové hustotě odpovídá? Návod: Nejsnáze lze výsledek spočíst spočtením skoku elektrické intenzity na povrchu sféry $r = a$ bereme-li uvnitř (199) a vně (200).