

OPAKOVÁNÍ: Maxwellovy rovnice – nestacionární pole

Na základě skutečnosti, že rotace vektorového pole má nulovou divergenci, usoudil Maxwell, že v diferenciální verzi Ampérova zákona je třeba v nestacionárním případě, kdy $\operatorname{div} \vec{j} \neq 0$ nahradit proudovou hustotu kombinací $\vec{j} + \partial_t \vec{D}$, jejíž divergence vymizí v důsledku Gaussovy věty a zákona zachování elektrického náboje. Divergence toho “opraveného proudu” je nulová proto, že za použití Gaussovy věty přechází na rovnici kontinuity pro elektrickou nábojovou hustotu

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (1)$$

Od té doby chování elektromagnetického pole popisují Maxwellovy rovnice

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \partial_t \vec{D} = \vec{j}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (5)$$

Ty je samozřejmě třeba doplnit materiálovými vztahy. Budeme předpokládat, že $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$ a $\vec{H} = \vec{H}(\vec{B})$, se složitějšími vztahy jste se seznámili v optice u dispersních médií – komplikované vztahy jsou zapříčiněny komplikovaným materiálem. Náboje a proudy vystupující na pravé straně Maxwellových rovnic jsou dány vlastnostmi hmoty a skrze ně elektromagnetické pole na hmotu působí. Nepřeborné množství jevů s tím souvisejících patří do jiných přednášek.

Pro ujasnění si významu rovnic (2-5) budeme až na explicitně uvedené výjimky předpokládat, že materiálové vztahy jsou popsány skalární permitivitou ϵ a permeabilitou μ . Charakter rovnic může, jak jsme na příkladu skinového jevu viděli, také ovlivnit závislost zdrojů na poli samotném. Proto prozatím budeme proudy a nábojové hustoty považovat za dané funkce času a prostoru.

Maxwellovy rovnice – počáteční úloha

Vzmemme-li elektromagnetické pole v nějakém okamžiku, řekněme $t = 0$, můžeme se ptát, co pro jeho hodnoty vyplývá z Maxwellových rovnic. Okamžitě vidíme, že rovnice udávající divergence \vec{B} a \vec{D} přikazují, jaká pole jako funkce prostorových souřadnic jsou v libovolný okamžik povolena. Např. zřídlová magnetická pole nejsou možná. Rovnice (3) a (5) představují *vazby*.

Oproti tomu rovnice, kde vystupují rotace polí mají jiný charakter. Pokud pozorujeme, že v daném okamžiku $\operatorname{rot} \vec{E} \neq 0$, je takové pole přípustné, ovšem znamená to, že buď

- mění se magnetické pole je zdrojem cirkulace elektrického pole a nebo
- nenulová cirkulace elektrického pole zapříčiní změnu magnetického pole.

Jak rozhodnout, která z obou možností je správná? Jaký experiment by to mohl rozhodnout? V každém případě rovnice (4) svazuje časové a prostorové změny elektromagnetického pole. Nestací na to ale sama – o jejím významu rozhoduje, čím tuto rovnici doplníme (viz cvičení níže).

Nejprve si povšimneme, že obě vazby (3) a (5) se zachovávají. Časová derivace

$$\partial_t \operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \partial_t \vec{B} = \operatorname{div} (-\operatorname{rot} \vec{E}) \equiv 0 \quad (6)$$

a podobně je to díky rovnici kontinuity elektrického náboje i s rovnicí (3):

$$\partial_t (\operatorname{div} \vec{D} - \rho) = \operatorname{div} \partial_t \vec{D} - \partial_t \rho = \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{H} - \vec{j}) - \partial_t \rho = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} - (\operatorname{div} \vec{j} + \partial_t \rho) \equiv 0. \quad (7)$$

Nabízí se následující interpretace: Vazby (3) a (5) určují jaká pole přicházejí do úvahy v čase $t = 0$. Rotace elektrického pole a rotace magnetického pole opravená o proud

$$\partial_t \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \vec{B} - \frac{1}{\epsilon} \vec{j}, \quad (8)$$

$$\partial_t \vec{B} = -\operatorname{rot} \vec{E}, \quad (9)$$

$$(10)$$

pak udávají změny pole. Jsou to *pohybové rovnice* pro elektromagnetické pole, které zachovávají vazby. Tato soustava představuje tzv. hyperbolický systém parciálních diferenciálních rovnic – tato čeleď rovnic je pojmenována podle znamének – + + + ve vlnové rovnici.

Cvičení. Předpokládejte, že zdroje jsou dané funkce času a prostoru a že prostředí je homogenní. Uvažujte fourierovský rozklad do prostorových vln charakteru $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ všech veličin a dosad'te jej do rovnic (8) a (9). Nalezněte obdobu těchto rovnic pro fourierovské komponenty $\vec{E}(\vec{k}, t)$ a $\vec{B}(\vec{k}, t)$. Ukažte, že jde o soustavu obyčejných lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty (\vec{k} je vzhledem k času samozřejmě konstanta). Na zjednodušeném příkladě s $\vec{j}(\vec{k}, t) = 0$ tuto soustavu vyřešte pro zadané $\vec{E}(\vec{k}, t = 0)$ a $\vec{B}(\vec{k}, t = 0)$ a ukažte, co by znamenalo opačné znaménko v Lenzově principu. Při řešení soustavy šesti lineárních diferenciálních rovnic pro šest neznámých je výhodné zavést proměnné $\vec{b}^\pm(\vec{k}, t) = \vec{B}(\vec{k}, t) \pm \frac{1}{c|\vec{k}|}\vec{k} \times \vec{E}(\vec{k}, t)$, neboť představují (levé) vlastní vektory příslušné matice, v nichž má homogenní soustava Maxwellových rovnic pro prostorové Fourierovy komponenty tvar $\partial_t \vec{b}^\pm = \mp ic|\vec{k}|\vec{b}^\pm$ a lze ji snadno řešit.

Relaxační mechanismy v elektromagnetismu

Jaký je vztah těchto evolučních rovnic k rovnicím, které jsme doposud studovali? Jak jsme ukázali, počínaje rovnicemi elektrostatiky a konče kvazistacionárním přiblížením, představovali doposud zkoumané rovnice rovnováhu polí se statickými, stacionárními a kvazistacionárními zdroji.

Této rovnováhy nabyde elektromagnetické pole různými relaxačními procesy. Nejprve zmíníme dva související s ohmickou vodivostí. Prvním, již zmíněným, je skinový jev, konkrétně skutečnost, že (a to i v plném elektromagnetismu) dochází k difuzi magnetického pole směrem k rovnovážnému stavu. Další mechanismus související s vodivostí je dán evolucí zřídlové části elektrického pole. Ta se řídí rovnicí kontinuity (1) a po dosazení Ohmova zákona $\vec{j} = \gamma \vec{E} = \gamma \epsilon^{-1} \vec{D}$ máme

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = \partial_t \rho + \operatorname{div} (\gamma \epsilon^{-1}) \vec{D} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_t \rho + (\gamma \epsilon^{-1}) \rho = -\vec{D} \cdot \operatorname{grad} \frac{\gamma}{\epsilon}. \quad (11)$$

Uvnitř vodiče, kde pravé strana vymizí tak dochází k exponenciálnímu zániku volné nábojové hustoty – náboj se stěhuje na povrch vodiče. Relaxační čas u běžných vodičů je velmi malý a je dán jen materiálovými konstantami, narozdíl od skinového jevu, kde souvisí i s rozměry a tvarem vodiče.

Oba zmíněné disipativní procesy ve vodičích vedou k ustavení statického stavu $\vec{j} = 0$ a v důsledku Ohmova zákona i $\vec{E} = 0$ uvnitř vodiče. To je elektrostatika. Za působení vnějších zdrojů či jiných sil se rovnováha ustanoví v souladu s buzením, pro pomalu se měnící zdroje tak dostaneme kvazistacionární pole.

Předběhneme-li další výklad, je tu ještě jeden relaxační mechanismus. Odchyłka od kvazistacionárního přiblížení je, jak uvidíme, dána přítomností elektromagnetického vlnění. Pokud to situace dovolí, jsou tyto vlny buď pohlceny disipativním prostředím, nebo odletí do daleka, v obou případech je tu tendence řešení blížit se (kvazi) stacionárnímu stavu. To je samozřejmě vyloučeno, když zdroje samy se mění v časech kratších, než jaké záření potřebuje k vytracení se.

První experimentální důkaz oprávněnosti Maxwellovy konstrukce – Hetřův experiment dokázal, že při jiskrovém výboji se část z původně elektrostatické energie místo na teplo přemění v elektromagnetické vlny.

Elektromagnetické potenciály pro nestacionární pole

Již víme, že homogenní Maxwellovy rovnice (5) a (4), lze automaticky vyřešit za pomoci zavedení potenciálů. Nezřídlové \vec{B} dává $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ a tak dostáváme

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \partial_t \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = 0 \quad (12)$$

a protože rotace součtu $\vec{E} + \partial_t \vec{A}$ je nulová musí to být gradient nějaké skalární funkce. Proto zavádíme elektromagnetické potenciály vztahy

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (13)$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \partial_t \vec{A}. \quad (14)$$

Jejich dosazením do zbývajících rovnic dostáváme

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} - \partial_t \epsilon (-\operatorname{grad} \Phi - \partial_t \vec{A}) = \vec{j}, \quad (15)$$

$$\operatorname{div} \epsilon (-\operatorname{grad} \Phi - \partial_t \vec{A}) = \rho, \quad (16)$$

$$(17)$$

V homogenním prostředí můžeme vytknout příslušné materiálové konstanty $\mu\epsilon = c^{-2}$ a za použití Z.I.V.A. dostáváme polní rovnice pro elektromagnetické potenciály

$$\left(-\Delta\vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\vec{A}\right) + \text{grad}\left(\text{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t\Phi\right) = \mu\vec{j}, \quad (18)$$

$$\Delta\Phi + \partial_t\text{div}\vec{A} = -\frac{1}{\epsilon}\rho. \quad (19)$$

Magnetické pole \vec{B} je vírové povahy a je dáno rotací vektorového potenciálu. Zřídlová část vektorového potenciálu je veličina která se na magnetickém poli nijak neprojeví. Tato veličina je určitelná z $\text{div}\vec{A}$ a tedy tato divergence vektorového potenciálu není nijak dána. Protože ovšem časová derivace vektorového potenciálu vystupuje v (14) je třeba opravit po změně vektorového potenciálu i potenciál Φ . Změna kalibrace je dána vztahy

$$\vec{a}' = \vec{A} + \nabla\chi \quad (20)$$

$$\Phi' = \Phi - \partial_t\chi \quad (21)$$

Dosazením do (13) a (14) lze ověřit, že tato změna potenciálů nemění elektrické ani magnetické pole. Také vidíme, že $\text{div}\vec{a}' - \text{div}\vec{A} = \Delta\chi$ a daná změna $\text{div}\vec{A}$ vede na Poissonovu rovnici.

Maxwellovy rovnice v Coulombově kalibraci

Při řešení (18) a (19) si nejprve vybereme postaru možnost $\text{div}\vec{A} = 0$. Po zavedení d'Alembertiánu

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2}\partial_{tt} \quad (22)$$

a dosazení $\text{div}\vec{A} = 0$ je

$$\square\vec{A} = -\mu\vec{j} + \frac{1}{c^2}\partial_t\text{grad}\Phi, \quad (23)$$

$$\Delta\Phi = -\frac{1}{\epsilon}\rho. \quad (24)$$

Toto jsou Maxwellovy rovnice pro potenciály v tzv. Coulombově kalibraci. Potenciál Φ se řídí Poissonovou rovnicí, zatímco vektorový potenciál splňuje v $\vec{A}(\vec{x}, t = 0)$ vlnovou rovnici se zdrojem na pravé straně. V nestacionárním případě je $\text{div}\vec{j} \neq 0$ a z rovnice kontinuity je vidět, že pozůstatek Maxwellova proudu zajišťuje, tak jako dříve, aby zdroj měl čistě vírový charakter. Jinak by nebylo možno vybranou kalibrační podmínku dodržet. Lze ukázat, že ačkoli v této kalibraci jsou hodnoty potenciálů v celém prostoru okamžitě ovlivněny změnou zdroje (nadsvětelné šíření), jde o změny, které mají povahu změny kalibrace a změny elektrického i magnetického pole se šíří právě rychlostí světla.

Z rozboru vlnové rovnice $\square u = 0$ (např. jako limity mechanického systému) je známo, že řešení v čase $t > 0$ je dáno zadáním hodnoty $u(\vec{x}, t = 0)$ a její časové derivace $\dot{u}(\vec{x}, t = 0)$. Tyto dvě funkce představují libovůli, již připouští vlnová rovnice – jejich hodnota je libovolná ale dány v nějakém okamžiku již plně říkají jak řešení vypadá v libovolném čase.

Vidíme, že při daných zdrojích Maxwellovy rovnice dovolují zadat dvě vektorové funkce čistě vírového charakteru $\vec{A}(\vec{x}, t = 0)$ a $\vec{\dot{A}}(\vec{x}, t = 0)$ a ty již plně určují elektromagnetické pole ve všech časech. Hodnota $\vec{A}(\vec{x}, t = 0)$ skrze rotaci určuje počáteční hodnotu magnetického pole. Hodnota $\vec{\dot{A}}(\vec{x}, t = 0)$ opravená o gradient řešení Poissonovy rovnice (to žádnou libovůli při daných zdrojích nepřipouští) určuje počáteční hodnotu elektrického pole.

Libovůle při zadávání počátečních podmínek elektromagnetického pole spočívá v zadání vírové části elektrického a magnetického pole. Co se týče libovůle při zadávání zřídlové části polí, magnetické pole žádnou nemá, elektrické sice ano, ale ta je fixována Gaussovou větou. Libovůle při umísťování nábojů nás teď nezajímá, neboť ta souvisí s pohybovými rovnicemi této nabitě látky. Ty, stejně jako evoluční rovnice elektromagnetického pole, musejí zaručovat zachování náboje.

Kalibrační libovůle se v Coulombově kalibraci smršťuje na funkce χ řešící v každém okamžiku Laplaceovu rovnici.

Maxwellovy rovnice v Lorenzově kalibraci

Pohledem na rovnici (18) je vidět, že kalibrační podmínka

$$\text{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t\Phi = 0, \quad (25)$$

zvaná Lorenzova, okamžitě zjednoduší rovnici pro vektorový potenciál na rovnici vlnovou. Za člen $\partial_t \operatorname{div} \vec{A}$, jenž se objevuje v rovnici pro Φ dosadíme z Lorenzovy kalibrační podmínky a dostaneme druhou časovou derivaci. Proto v Lorenzově kalibraci mají Maxwellovy rovnice pro elektromagnetické potenciály tvar

$$\square \vec{A} = -\mu \vec{j}, \quad (26)$$

$$\square \Phi = -\frac{1}{\epsilon} \rho. \quad (27)$$

Na rozdíl od podmínky Coulombovy je ve vakuu Lorenzova kalibrační podmínka speciálně relativisticky kovariantní a stejně tak i výše uvedené rovnice pro potenciály. Také je na první pohled vidět, že informace o zdrojích se šíří rychlostí světla. V této kalibraci se nabízí větší míra kalibrační volnosti – všechny χ splňující homogenní vlnovou rovnici nezmění (25). Protože v oblastech, kde nejsou náboje splňuje Φ také homogenní vlnovou rovnici, lze zde obvykle položením $\chi = \int_0^t \Phi dt$ přejít do kalibrace, kde $\Phi' \equiv 0$ a $\operatorname{div} \vec{a}' = 0$.

Zákon zachování energie

Maxwellovy rovnice (8) a (9) popisují to, jak “torzní napětí éteru” je zdrojem časové změny pole. V analogii s mechanickým vlněním lze očekávat, že bude existovat veličina daná kvadrátem polí, popisující hustotu energie elektromagnetického pole.

S použitím vztahů $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ a $(fg)' = f'g + fg'$ si nejprve spočteme

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}), \quad (28)$$

pro jistotu ještě ve složkách

$$\partial_i (\epsilon_{ijk} E_j H_k) = \epsilon_{ijk} \partial_i (E_j H_k) = \epsilon_{ijk} (\partial_i E_j) H_k + \epsilon_{ijk} E_j (\partial_i H_k) = H_i \epsilon_{ijk} \partial_j E_k - E_i \epsilon_{ijk} \partial_j H_k. \quad (29)$$

Mechanický výkon, jakým působíme proti (tedy –) Lorentzově síle je

$$dP = -\vec{v} \cdot dQ(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = -dQ \vec{v} \cdot \vec{E} = -d\vec{J} \cdot \vec{E}, \quad (30)$$

tedy objemová hustota mechanického výkonu je s použitím Maxwellových rovnic a připravené identity (28)

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = -(\nabla \times \vec{H} - \partial_t \vec{D}) \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) + \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \quad (31)$$

Tento výraz pro hustotu výkonu lze integrovat přes nějaký objem a získat vztah

$$\text{Výkon mech. sil} = \text{Výkon potřebný ke změně el. a mag. pole} + \text{výkon odcházející povrchem}$$

konkrétně

$$\int_{\Omega} -\vec{j} \cdot \vec{E} dV = \int_{\Omega} (\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B}) dV + \oint_{\partial\Omega} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}. \quad (32)$$

Člen popisující výkon potřebný ke změně elektrického a magnetického pole obsahuje i energii potřebnou ke změně magnetizace a polarizace prostředí. V lineárním nedisperzním prostředí vede vztah $\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} = \vec{E} \cdot \partial_t \epsilon \vec{E} = \frac{1}{2} \partial_t \vec{E} \cdot \epsilon \vec{E} = \frac{1}{2} \partial_t \vec{E} \cdot \vec{D}$ a podobný vztah pro magnetické pole k zavedení hustoty energie

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (33)$$

splňující rovnici kontinuity se zdrojem

$$\partial_t w + \operatorname{div} \vec{E} \times \vec{H} = -\vec{E} \cdot \vec{j}. \quad (34)$$

Pokud chceme podobný vztah získat i např. v magneticky tvrdém materiálu, je třeba vázané magnetizační proudy přesunout do \vec{j} a chápat je jako proudy tekoucí v prostředí s $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Součin $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ se nazývá Poyntingův vektor. Jde o vektorové pole které určuje elektromagnetický výkon odcházející z objemu, přičemž jen zřídlová část tohoto pole vystupuje v zákonu zachování energie. Vztah (28) říká, že např. vložením permanentního magnetu do elektrostatického pole získáme Poyntingovo vektorové pole jehož zřídlová část je nulová, ovšem číselná velikost vírové složky \vec{S} může být ohromná.

Ve vakuu má w význam hustoty energie elektromagnetického pole, až se seznámíme s elektromagnetickými vlnami, uvidíme, že ta se může přelévat z jednoho místa do druhého, aniž jsou tam nějaké zdroje. Definitivně tak končí interpretace elektrostatické energie, jako potenciální energie nábojů. Poyntingova věta říká, že ta je jen zdání vzniklé z toho, že při změně polohy náboje dochází k rekonfiguraci pole, k níž potřebujeme vykonat práci právě rovnou změně elektromagnetické energie (a možná i víc, pokud s náboji postrkujeme příliš zbrkle a část naší práce se přemění na elektromagnetické vlnění, jenž odletí pryč).

Cvičení. Spočítejte energii magnetického pole kulového permanentního magnetu s konstantní magnetizací.

Rovinná elektromagnetická vlna

Literatura [Zangwill:16.1-16.4]

Maxwellovy rovnice představují v Lorenzově kalibraci vlnovou rovnici pro oba potenciály. Mezi nepřeborným množstvím řešení vlnové rovnice vyniká svojí jednoduchostí tzv. rovinná vlna. Na ní uvidíme, že splnění vlnových rovnic nestačí. Jak víme, Maxwellovy rovnice dávají volnost jen vírové složce obou polí a tak určují, jak uvidíme, že vlnění je příčné.

Na základě poznámky o široké možnosti volby Lorenzovky kalibrovaného potenciálu bude rovinná elektromagnetická vlna určena jen vektorovým potenciálem

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{a}(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct), \quad \text{a} \quad \Phi(\vec{r}, t) = 0. \quad (35)$$

Samozřejmě, to že jsme \vec{A} zvolili ve tvaru rovinné vlny automaticky zaručuje, že zvolený potenciál splňuje vlnovou rovnici

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \vec{A} = |\vec{n}|^2 \vec{a}'' - \frac{(-c)^2}{c^2} \vec{a}'' = 0, \quad (36)$$

pokud velikost vektoru \vec{n} určujícího směr šíření vlny je jedna.

Lorenzova kalibrační podmínka vyžaduje, aby

$$\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = \partial_i a_i (n_k r_k - ct) = n_i a'_i = \vec{n} \cdot \vec{a}' = 0, \quad (37)$$

kde \vec{a}' představuje derivaci podle parametru vektorové funkce jedné proměnné \vec{a} . Integrací této podmínky dostáváme, že pokud $\vec{a} = 0$ nebo $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ aspoň v jediném bodě prostoru, musí pak již v celém prostoru musí platit

$$\vec{n} \cdot \vec{A} = 0. \quad (38)$$

Pokud spočteme

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} = c \vec{a}' \quad (39)$$

$$\vec{B} = -\nabla \times \vec{A} = \vec{n} \times \vec{a}', \quad (40)$$

vidíme, že v každém bodě prostoru jsou \vec{n} , \vec{E} a \vec{B} na sebe navzájem kolmé a platí $c\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$. Tato úměra mezi elektrickým a magnetickým polem obsahuje jako koeficient směr šíření \vec{n} . Proto, pokud je elektromagnetické pole superpozicí rovinných vln více směrů, tento vztah nemusí platit. Například u nejjednodušší verze stojatého vlnění jsou směry dvou harmonických rovinných vln opačné a magnetické pole v daném místě vymizí právě v okamžicích, kdy je elektrické pole maximální a naopak.

Pozn. Mluvíme o rovinné vlně proto, že místa, kde \vec{E} a \vec{B} nabývají stejné hodnoty, tedy místa kde parametr $\vec{n} \cdot \vec{r} - ct$ nabývá konstantní hodnoty, jsou určena rovnicí $\vec{n} \cdot \vec{r} = \text{konst.}$, což je rovnice roviny. Maxwellovy rovnice tedy zároveň určují analytické (jde o vlnění) i algebraické vlastnosti řešení (vlnění je příčné).

Směr vektoru \vec{E} charakterizuje polarizaci vlny. Pokud je neměnný, mluvíme o lineární polarizaci. U vlny harmonického průběhu se zavádí též kruhová příp. eliptická polarizace (viz optika).

Pro rovinnou vlnu je snadné spočítat jak hustotu energie

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\vec{E}^2 + \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \vec{B}^2 \right) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2 \right) = \epsilon_0 c^2 |\vec{a}'|^2, \quad (41)$$

i Poyntingův vektor

$$\vec{S} = c \vec{a}' \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{n} \times \vec{a}' \right) = \frac{c}{\mu_0} |\vec{a}'|^2 \vec{n} = w \vec{c}. \quad (42)$$

Tuto úměru lze chápat tak, že rovinná vlna představuje transport energie w rychlostí $\vec{c} = \vec{n}c$ doprovázený hybností elektromagnetického pole $\vec{g} = w\vec{n}/c$.

Pro

$$\vec{A} = \frac{\vec{\mathcal{E}}}{c|\vec{k}|} e^{i|\vec{k}|(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct)} \quad (43)$$

dostáváme harmonickou rovinnou vlnu

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad c\vec{B} = \vec{n} \vec{\mathcal{E}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (44)$$

OPAKOVÁNÍ: Greenova funkce vlnová rovnice ve volném prostoru

Literatura [Zangwill:20.3.1] a [Kvasnica]

Příklad: Výpočet

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

Zářivé elektromagnetické pole

Literatura [Zangwill: 16.9, 20.7.1-2]

Velký význam řešení Maxwellových rovnic představujících elektromagnetické pole vyzařované nějakým objektem.

Liénard Wiechert sice našli potenciál pro pohybující bodový náboj, ze kterého je možné spočítat \mathbf{E} i \mathbf{B} , nicméně jde o pole velmi komplikované (zejména \mathbf{E}) a provádění limity pro zdroje v podobě časově proměnného elektrického a magnetického dipólu je pracné.

Hertzovy vektory

Maxwellovy rovnice pro potenciály \mathbf{A} , Φ jsou nehomogenní vlnové rovnice

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (45)$$

$$\square \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (46)$$

jen pokud potenciály splňují Lorenzovu kalibrační podmínku

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = 0. \quad (47)$$

Jinak řečeno, nalezení řešení (45) pro nějaký zdroj nezaručuje nalezení řešení Maxwellových rovnic.

Je běžné homogenní rovnice, jako je (47), automaticky vyřešit zavedením potenciálů, které rovnice *automaticky* splňují např. v důsledku různých identit. Konkrétně rovnici (47) lze splnit takto

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{\Pi}^{(mag)}, \quad \Phi = 0, \quad (48)$$

a nebo

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{\Pi}^{(el)}, \quad \Phi = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi}^{(el)}. \quad (49)$$

Oba Hertzovy vektory, magnetický a elektrický, připomínají Helmholtzův rozklad vektorového pole na skalární a vektorový potenciál, nicméně jen vzácně potřebujeme hledat rozklad daného pole do Hertzových vektorů. Jejich užitečnost spočívá v tom, že potenciály \mathbf{A} , Φ automaticky splňují Maxwellovy rovnice pokud jsou dány Hertzovými vektory $\mathbf{\Pi}^{(mag)}$ a $\mathbf{\Pi}^{(el)}$ řešícími rovnice

$$\square \mathbf{\Pi}^{(mag)} = -\mu_0 \mathbf{M}, \quad (50)$$

resp.

$$\square \mathbf{\Pi}^{(el)} = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}. \quad (51)$$

To, že veličiny na pravých stranách těchto rovnic jsou právě magnetizace \mathbf{M} , resp. polarizace \mathbf{P} lze zjistit porovnáním s výrazy pro polarizační a magnetizační proudy. Připomeňme, že Maxwellovy rovnice se zdroji

$$\nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} = \mathbf{j}, \quad (52)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (53)$$

po dosažení

$$\mathbf{H} = \mu_0^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (54)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (55)$$

jasně ukazují na vázanou proudovou a nábojovou hustotu tvořenou \mathbf{M} a \mathbf{P}

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 (\mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M} + \partial_t \mathbf{P}), \quad (56)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0^{-1} (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}). \quad (57)$$

Pole elektrického dipólu

Povšimněme si, že elektrický dipól můžeme popsat polarizací

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{p}(t) \delta^3(\mathbf{x}). \quad (58)$$

Jedna z interpretací tohoto vztahu je limita menších a menších polarizovaných kuliček, kde při zmenšování zachováváme jejich celkový elektrický dipólový moment \mathbf{p} . Také lze ukázat, že (58) představuje limitu konečného dipólu tvořeného dvěma opačnými náboji, neboť pro nábojová hustota daná polarizací $\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ je

$$\rho = -\nabla \cdot (\mathbf{p} \delta^3(\mathbf{x})) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta^3(\mathbf{x}). \quad (59)$$

Operace $\mathbf{p} \cdot \nabla f$ představuje *derivaci ve směru* a v nejjednodušší představě o derivaci při použití rozkladu $\mathbf{p} = Q\boldsymbol{\epsilon}$ máme

$$\mathbf{p} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = |\mathbf{p}| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\boldsymbol{\epsilon}|} (f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}) - f(\mathbf{x})). \quad (60)$$

Proto nábojová hustota (59) představuje dva opačné náboje Q reprezentované delta-funkcemi, přičemž $+Q$ se nachází v počátku souřadnic a náboj $-Q$ pak v $\mathbf{x} = -\boldsymbol{\epsilon}$.

Víme, že nehomogenní vlnová rovnice $\square f = -g(t, x)$ má (retardované) řešení v podobě integrálu

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{g(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (61)$$

Proto pro časově závislou polarizaci $\mathbf{P}(t, \mathbf{x})$ máme Hertzův vektor

$$\mathbf{\Pi}^{(el)}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{P}(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (62)$$

po dosazení (58) tak máme

$$\mathbf{\Pi}^{(el)}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{p}(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}) \delta(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c})}{|\mathbf{x}|}. \quad (63)$$

Následně můžeme spočítat potenciály s použitím (49), $\nabla \cdot \mathbf{w}(|\mathbf{x}|) = \mathbf{w}' \cdot \nabla |\mathbf{x}|$ a $c^{-2} = \mu_0\epsilon_0$ dostaneme

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t')}{|\mathbf{x}|}, \quad (64)$$

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{p}(t') \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t')}{|\mathbf{x}|^2} \right]. \quad (65)$$

Zde $\dot{\mathbf{p}}$ označuje časovou derivaci vzhledem k retardovanému času $t' = t - |\mathbf{x}|/c$.

Můžeme pozorovat, že (a) pro statické $\dot{\mathbf{p}} = 0$ dostáváme obvyklé elektrostatické pole dipólu, (b) členy způsobené časovou změnou $\dot{\mathbf{p}} \neq 0$ ubývají do $r \rightarrow \infty$ pomaleji a (c) prostorová změna $\nabla \cdot \mathbf{p}(t') = c^{-1} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t') \neq 0$.

V dalším kroku spočítáme

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \Phi = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p}}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{1}{c} \frac{3\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{p}} - \ddot{\mathbf{p}}}{|\mathbf{x}|} \right], \quad (66)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{1}{c} \frac{\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{x}|} \right]. \quad (67)$$

Ve výsledném poli můžeme rozeznat statické pole úměrné \mathbf{p} a radiační TEM pole $\mathbf{B}_{rad}, \mathbf{E}_{rad}$ úměrné $\dot{\mathbf{p}}$. Je důležité, že

$$c\mathbf{B}_{rad} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{rad}, \quad \mathbf{E}_{rad} = -\mathbf{n} \times c\mathbf{B}_{rad}, \quad (68)$$

tedy že velmi daleko má kulová vlna TEM charakter a že obě pole $\mathbf{E}_{rad}, \mathbf{B}_{rad}$ ubývají jen jako $1/r$. Má smysl definovat radiační zónu jako oblast dost daleko $r > L_{rad}$, aby bylo možno zanedbat jiné než radiační části pole.

Ze tvaru (67) je jasně vidět, že $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$, pokud u kulové vlny směr šíření dodefinujeme i mimo radiační zónu jako \mathbf{n} , vidíme, že jde o TM vlnu.

Vyzařovací diagram elektrického dipólu

Radiační pole má důležitou vlastnost a to směrové rozložení vyzařovaného EMP. Všimneme-li si, že faktor $\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{p}} - \ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{p}}) = (\mathbf{n} \mathbf{n} - \mathbf{1}) \cdot \dot{\mathbf{p}}$. Poslední varianta tohoto vztahu používá diadický součin $(\mathbf{n} \mathbf{n})_{ij} = n_i n_j$, $\mathbb{1}_{ij} = \delta_{ij}$ a jasně ukazuje na to, že radiační část elektrické pole je opačně orientovaná příčná projekce $\dot{\mathbf{p}}$ vzhledem ke směru \mathbf{n} . TEM charakter daný (68) pak

$$\mathbf{S} = \mu_0^{-1} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \approx \frac{|\mathbf{E}_{rad}|^2}{Z_0} \mathbf{n}, \quad (69)$$

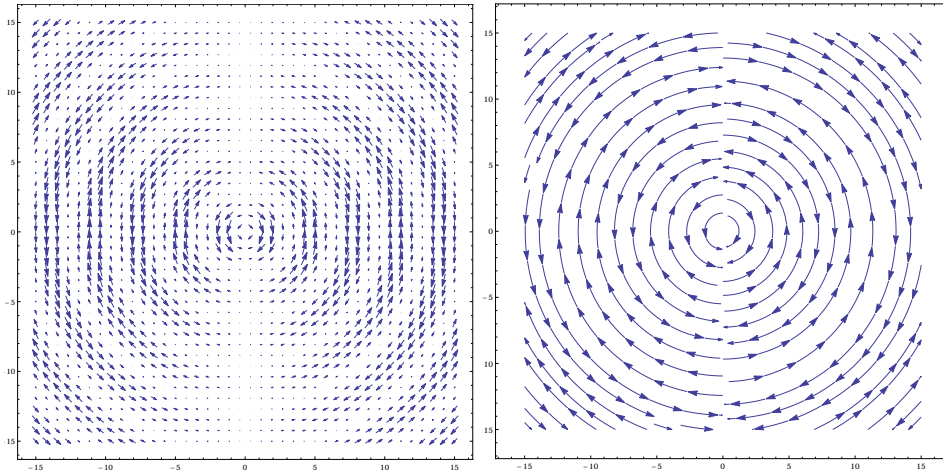
kde $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 376.73 \Omega$ je tzv. impedance vakua. Vztah popisuje odnášení energie od zdroje, druhá mocnina neumožňuje otočit směr \mathbf{S} . Původ znaménka je v retardovaném řešení (61).

Pro bodový dipól odpovídá sféře o daném poloměru tentýž retardovaný čas a v radiační zóně tedy na celé sféře je EMP určeno jedninou hodnotou $\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)$. Na takové sféře má dobrý smysl definovat úhel $\tilde{\theta}$ sevřený \mathbf{n} a $\dot{\mathbf{p}}$ a poté psát

$$\mathbf{S}_{rad} = \frac{|\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}|^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\mathbf{n}}{r^2} = \frac{|\dot{\mathbf{p}}|^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \tilde{\theta} \frac{\mathbf{n}}{r^2}. \quad (70)$$

Snadno lze i spočítat tok výkonu takovou sférou protože střední hodnota přes sféru ze $\sin^2 \tilde{\theta}$ je 2/3 a tedy

$$P_{rad}(t) = \oint \mathbf{S}_{rad} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2|\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)|^2}{3c^3}. \quad (71)$$



Obrázek 1: Pole \mathbf{E}_{rad} znázorněné za pomoci vektorů a siločar. Délky vektorů jsou pro názornost vynásobeny r .

Pole magnetického dipólu

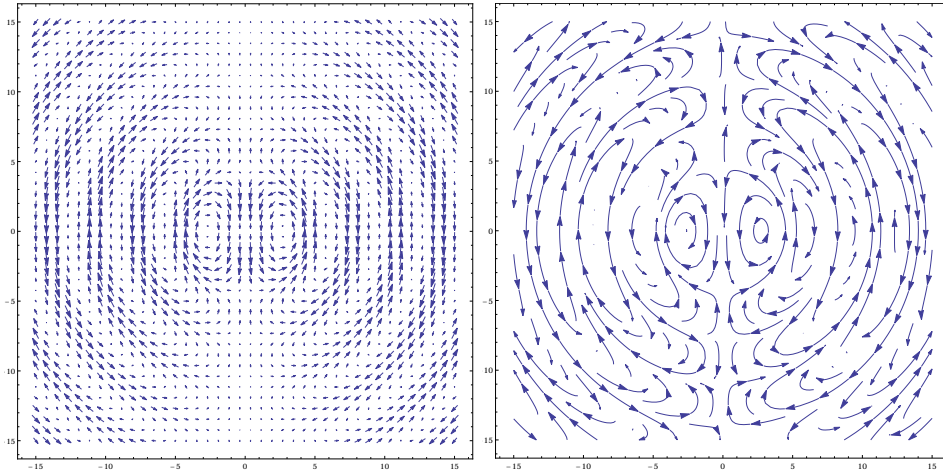
Pro magnetický dipól s $\mathbf{M} = \mathbf{m} \delta^{(3)}(\mathbf{x})$ podobně dostáváme

$$\mathbf{\Pi}^{(mag)}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c})}{|\mathbf{x}|}. \quad (72)$$

Tentokrát $\Phi = 0$ a vektorový potenciál

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{\Pi}^{(mag)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{x}|}. \quad (73)$$

Vidíme opět statické pole magnetického dipólu doplněné o ‘radiační’ část. Kdybychom přímo hledali řešení vlnové rovnice $\square \mathbf{A} = 0$ popisující rozbíhající kulovou vlnu, dostali bychom právě takové \mathbf{A} . Sice bychom nejprve mohli zkusit jednodušší (d’Alembertovu) formu $\mathbf{A} = \mathbf{f}(t - r/c)/r$, ale ta nespĺňuje Lorenzovu kalibrační podmínku, která pro $\Phi = 0$ má tvar



Obrázek 2: Celkové pole \mathbf{E} podle (66) znázorněné za pomoci vektorů a siločar. Délky vektorů jsou pro názornost vynásobeny r .

$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Vyžadováním této podmínky bychom skončili u tvaru (73), použitím Hertzových vektorů jsme si toto hledání ulehčili.

Elektromagnetické pole je pak

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = + \frac{\mu_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3 \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{1}{c} \frac{3 \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{m}} - \dot{\mathbf{m}}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{n} \mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{m}} - \ddot{\mathbf{m}}}{|\mathbf{x}|} \right], \quad (74)$$

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{1}{c} \frac{\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{x}|} \right]. \quad (75)$$

Zatímco u monopólových zdrojů Maxwellovy rovnice nejsou symetrické, pro dipólové zdroje pozorujeme kompletní dualitu, od elektrického dipólového TM pole se k TE poli magnetického dipólu dostaneme transformací

$$\mathbf{p} \rightarrow c^{-1} \mathbf{m}, \quad (76)$$

$$\mathbf{E} \rightarrow c \mathbf{B}, \quad (77)$$

$$\mathbf{B} \rightarrow -c^{-1} \mathbf{E}. \quad (78)$$

Vyzářený výkon pak je

$$P_{rad} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2|\ddot{\mathbf{m}}|^2}{3c^3}. \quad (79)$$

Poznámka: Pro dipól tvořený malou proudovou kruhovou smyčkou máme $\mathbf{m}(t) = \pi a^2 \sqrt{2} I_{eff} \sin \omega t \mathbf{e}_z$ je vystředovaný vyzářený výkon $P_{rad} = R_{rad} I_{eff}^2$, kde

$$R_{rad} = \frac{\pi}{6} \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \right)^4 Z_0. \quad (80)$$

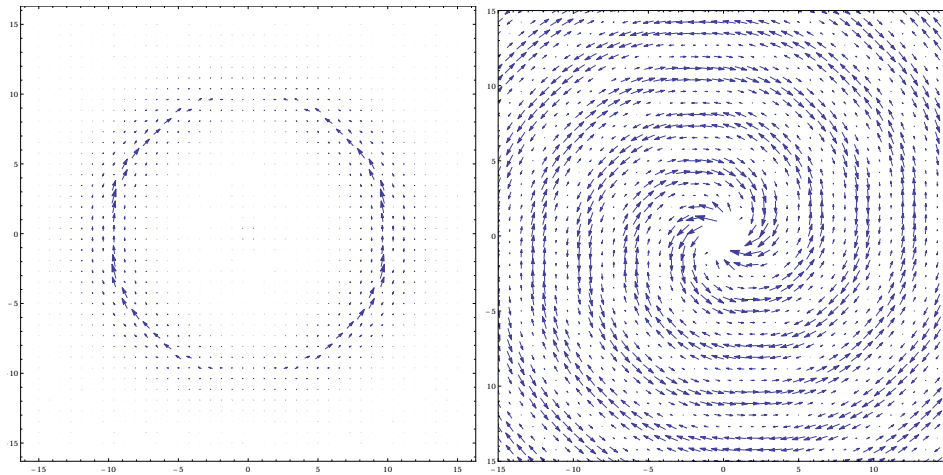
Interpretace je taková, že v důsledku vyzářování se v náhradním schématu v sérii s reaktancí malé smyčky $a \ll \lambda$ objeví reálný (činný) odpor R_{rad} . Obdobný vztah pro elektrický dipól zatím odložíme.

Dipólové zdroje

Povšimněme si, že uvažované dipólové zdroje lze popsat pomocí nábojů a proudů

$$\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (81)$$

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{M} + \partial_t \mathbf{P} \quad (82)$$



Obrázek 3: Celkové pole \mathbf{E} podle (66) pro $\mathbf{p}(t)$ představující impuls a otáčející se dipól. Délky vektorů jsou pro názornost vynásobeny r .

Elektrický dipól $\mathbf{P} = \mathbf{p} \delta^3(\mathbf{x})$ odpovídá tedy zdroji

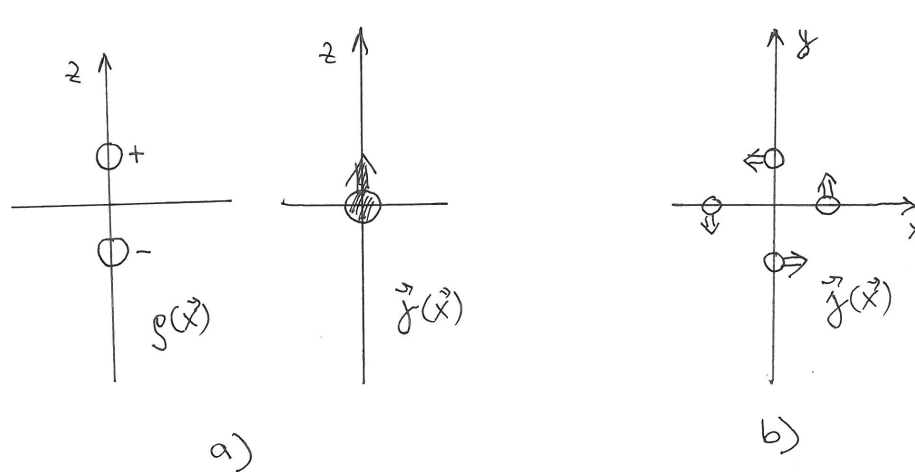
$$\rho = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta^3(\mathbf{x}), \quad (83)$$

$$\mathbf{j} = \dot{\mathbf{p}} \delta^3(\mathbf{x}). \quad (84)$$

Elektrický dipól resp. $\mathbf{M} = \mathbf{m} \delta^3(\mathbf{x})$ pak dá

$$\rho = 0, \quad (85)$$

$$\mathbf{j} = -\mathbf{m} \times \nabla \delta^3(\mathbf{x}). \quad (86)$$

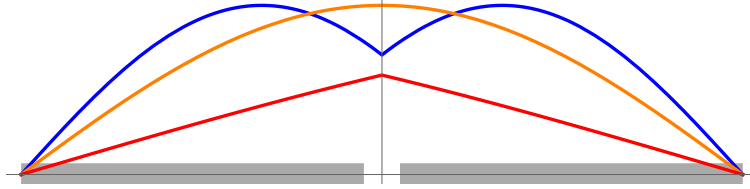


Obrázek 4: a) Nábojová a proudová hustota odpovídající bodovému elektrickému dipólu. b) Proudová hustota odpovídající bodovému magnetickému dipólu.

Hertzův dipól

Literatura [Zangwill: 20.6]

Studium pole urychleného náboje ukázalo vznik elektromagnetického záření z pohledu individuálního náboje. Velmi často ovšem vlny vznikají koordinovaným pohybem velkého množství nábojů. Důležitým modelem tohoto procesu je tzv. Hertzův dipól.



Přímý vodič (šedivě) dané délky je uprostřed přerušen a je zde napájen ze zdroje střídavého proudu. Za zjednodušujících předpokladů má proud podél vodiče podobu stojatého vlnění (viz text). Vykresleny jsou průběhy pro tři frekvence.

Viděli jsme již u skinového jevu, že určení prostorového rozložení proudu ve vodiči vyžaduje řešení Maxellových rovnic. Pro pochopení chování drátové antény ovšem zkusíme předpokládat, že proud v tenkém vodiči se chová podobně jako proud doprovázející TEM vlnu a tedy, že na konci takového vodiče se proudová vlna odrazí a pozorujeme stojaté vlnění. Vodič délky $2d$ je uprostřed přerušen a je zde napájen ze zdroje střídavého proudu. Potom bude harmonický proud podél vodiče rozložen podle

$$I(z, t) = I_0 e^{-i\omega t} \sin [k(d - |z|)]. \quad (87)$$

Jako obvykle $k = \omega/c$. (Pozn. Rozmyslete si, že pro malé frekvence popisuje toto rozložení u velmi tenkého vodiče proud doplňující směrem od přívodů uprostřed náboj rozprostírající se na vodiči – z elektrostatiky m.j. víme, že na takovém vodiči je konstantní lineární nábojová hustota.)

Budeme řešit vlnovou rovnici ve frekvenční oblasti

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (88)$$

jejíž řešení má, jak víme, podobu

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}') d^3r' \doteq \frac{\mu_0}{4\pi r} \int e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}') d^3r'. \quad (89)$$

Již zde jsme využili toho, že daleko od centra je $|\vec{r}-\vec{r}'| \sim r$ pomalu se měnící funkce. To ovšem neplatí pro komplexní exponenciálu. Zde užijeme

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^2 = (\vec{r}-\vec{r}') \cdot (\vec{r}-\vec{r}') = r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' \quad (90)$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = r \left(1 - \frac{2}{r^2} \vec{r} \cdot \vec{r}' + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{1/2} \doteq r - \vec{n} \cdot \vec{r}', \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}. \quad (91)$$

Odsud

$$\vec{A} \doteq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-ik\vec{n} \cdot \vec{r}'} \vec{j}(\vec{r}') d^3r'. \quad (92)$$

Faktor před integrálem (zejména pak po doplnění o časovou závislost $e^{-i\omega t}$ jasně popisuje odcházející slábnoucí sférickou vlnu. Integrál již závisí jen na směru \vec{n} a popisuje vyzařovací charakteristiku naší idealizované dipólové antény. Dále pokročíme nahrazením $\vec{j}(\vec{r}') d^3r' = I(z') dz' \vec{e}_z$ a dosazením $\vec{n} \cdot \vec{r}' = z' \cos \theta$. Je tedy třeba spočítat

$$\begin{aligned} \int_{-d}^d e^{ikz' \cos \theta} \sin [k(d - |z'|)] dz' &= 2 \int_0^d \cos(kz' \cos \theta) \sin [k(d - z')] dz' \\ &= \frac{2}{k \sin^2 \theta} [\cos(kd \cos \theta) - \cos(kd)] \end{aligned}$$

Tak dostáváme vektorový potenciál

$$\vec{A} \doteq \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{kr} \frac{\cos(kd \cos \theta) - \cos(kd)}{\sin^2 \theta} \vec{e}_z. \quad (93)$$

Pracujeme v Lorentzovské kalibraci a pro naše harmonicky časově závislá pole bychom mohli potenciál ϕ dopočítat z kalibrační podmínky. Protože jsme ale v odvození předpokládali, že se zajímáme jen o radiční zónu, můžeme spočítat $\vec{E} = -\vec{n} \times c\vec{B}$.

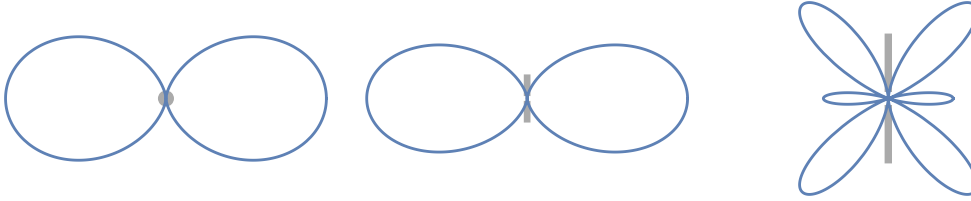
Lze snadno vidět s použitím $\nabla \times [f(\vec{r})\vec{e}_z] = \nabla f \times \vec{e}_z$, že jediný člen ubývající s $1/r$ vznikne derivováním exponenciály. Dále je $\nabla e^{ikr} = ik\vec{n}$ a $\vec{n} \times \vec{e}_z = \vec{e}_r \times \vec{e}_z = (\sin\theta\vec{e}_R + \cos\theta\vec{e}_z) \times \vec{e}_z = -\sin\theta\vec{e}_\phi$ a tedy radiační část magnetického pole je

$$\vec{B}_{\text{rad}} \doteq -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{ie^{i(kr-\omega t)}}{r} \frac{\cos(kd\cos\theta) - \cos(kd)}{\sin\theta} \vec{e}_\phi. \quad (94)$$

V radiační zóně je $\vec{E} = -\vec{n} \times c\vec{B}$ a Poyntingův vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \mu_0^{-1}(-\vec{n} \times c\vec{B}) \times \vec{B} = c\mu_0^{-1}|\vec{B}|^2\vec{n}$, tedy pro vyzařovací charakteristiku dostaneme

$$r^2 \langle \vec{n} \cdot \vec{S} \rangle = \frac{dP_{\text{rad}}}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 c I_0^2}{4\pi^2} \left(\frac{\cos(kd\cos\theta) - \cos(kd)}{\sin\theta} \right)^2. \quad (95)$$

Tato hodnota nezávisí na ϕ a lze ji tedy snadno zachytit graficky. Nezapomeňme, že anténa je dlouhá $2d$, tedy pro anténu dlouhou ξ -násobek vlnové délky $2d = \xi\lambda = \xi(2\pi)/k$, tedy $kd = \pi\xi$.



Vyzařovací charakteristika bodového dipólu (vlevo), idealizované drátové dipólové antény s délkou $\lambda/2$ (uprostřed), a $3/2\lambda$ (vpravo).

Jak se skutečnost, že anténa vyzařuje energii jeví zdroji, jenž do antény dodává proud? Z jeho pohledu má anténa reálnou část impedance. Připomeňme, že ideální kondenzátor (což je limita malých frekvencí) odebírá čistě jalový výkon. Při rostoucích frekvencích bude z pohledu zdroje střídavého proudu nutno přidat do obvodového schématu sériový odpor. Jeho hodnota bude taková, aby v něm došlo právě ke “spálení” vyzářeného výkonu. Protože svorkami protéká proud, který dostaneme dosazením $z = 0$ do (87), určíme tuto hodnotu z rovnosti

$$\frac{1}{2} R_{\text{rad}} I_{\text{svork}}^2 = \frac{1}{2} R_{\text{rad}} I_0^2 \sin^2(kd) = \int \frac{dP_{\text{rad}}}{d\Omega} d\Omega. \quad (96)$$

Pro v praxi důležitý půlvlnný dipól vyjde 73Ω . Povšimněte si, že tato úvaha nefunguje pro celovlnný dipól, pro něj by I_{svork} vyšlo nulové. To proto, že jsme proudové pole podél antény předepsali bez ohledu na splnění rovnic pole.

Vyzařovací odpor dipólové antény z Larmorovy formule

V našem prvním pokusu popsat vyzařování objektu popsaného obvodovými veličinami jsme uvažovali proudovou smyčku a získali souvislost mezi proudem smyčkou a radiačním polem.

Podobně lze postupovat pro malý elektrický symetrický dipól. V tomto případě nemáme jednoduchou relaci mezi přiváděným proudem a dipólovým momentem, takže je třeba ji hledat. První aproximace dá pro dipól délky d podél osy $z \in \langle -d/2, d/2 \rangle$ průběh proudu

$$I(z) = \dot{Q}(t) \left(1 - 2\frac{|z|}{d} \right), \quad (97)$$

tedy předpokládáme takovou lineární závislost na z , že na koncích antény proud vymizí a ve středu, kde je připojen jeho zdroj, je proud zadán, pro pohodlí jsme k popisu použili do antény pumpovaný náboj Q nikoli přímo proud. Lineární rozložení proudu podél dipólu je pouze předpoklad a není splněn ani když $d \ll \lambda$ – v důsledku vlastní kapacity je poblíž centra o něco vyšší, na celkovém dipólovém momentu se to projeví jen málo. Z rovnice kontinuity

$$\frac{d\lambda}{dt} + \frac{dI(z)}{dz} = 0 \quad (98)$$

dostáváme lineární nábojovou hustotu

$$\lambda(z) = \frac{2}{d} Q(t) \text{sgn}(z). \quad (99)$$

Nyní je snadné spočítat dipólový moment $p_z = \int z \lambda(z) dz = Qd/2$. Pro harmonický průběh proudu (a náboje) dostáváme $|\dot{p}_z| = \omega^2 |p_z| = \omega |I|d/2$ a tedy vyzářený výkon je

$$P(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d^2}{6c^3} |\ddot{Q}|^2 \quad (100)$$

a tedy pro harmonický průběh

$$P(t) = Z_0 \frac{\pi}{6} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 I_{\text{eff}}^2. \quad (101)$$

Vyzařování idealizované dipólové antény v časovém obraze

Při výpočtech jsme doposud použili několik zjednodušení: jednak jsme předpokládali podobu proudového pole v dipólové anténě a pak jsme také doposud počítali elektromagnetické pole v radiační zóně.

Druhé omezení lze vyřešit tím, že pole v celém prostoru a tedy i blízko zdroje můžeme zkonstruovat jako superpozici přesných řešení Maxwellových rovnic popisujících rozbíhavou vlnu

$$\vec{E}_0(\vec{x}) = \frac{f(r-ct)}{r \sin \theta} \vec{e}_\theta, \quad \vec{B}_0(\vec{x}) = \frac{f(r-ct)}{cr \sin \theta} \vec{e}_\phi. \quad (102)$$

Vidíme, že jde o variantu TEM vlny, protože $c\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$. Snadno ověříme, že mimo osu z pole řeší Maxwellovy rovnice. Co řešení popisuje, určíme zkoumáním jeho chování v blízkosti osy z , kde se zřejmě nacházejí zdroje. Ty mají podobu nábojové hustoty $\lambda = 2\pi\epsilon_0 f(r-ct) \text{sign } z$, protože na ose z platí $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_R = \text{sign } z$. Tuto nábojovou hustotu doprovází proud $I = 2\pi\epsilon_0 c f(r-ct)$. Protože platí $I = \pm c\lambda$, jde o pole signálu v podobě proudu a náboje posouvajícího se rychlostí světla podél osy z . (Samozřejmě jde o rychlost vzruchu, vodivostní náboje, které λ a I zprostředkovávají, se pohybují jen velmi pomalu.)

Pokud potřebujeme nalézt pole tenkého konečného dipólu stačí si povšimnout, že aby proudové pole vymizelo pro $|z| > d$ musíme přidat na konce dipólu další zdroje proudu časově zpožděné. Ty zařídí, že $I(|z| > d)$, jenomže způsobí, že podél osy se bude proudová vlna šířit zpět do centra. Proto tam musíme přidat čtvrtý člen, který popisuje absorpci vlny v místě napájení dipólové antény

$$I(t, z) = 2\pi\epsilon_0 c [f(|z| - ct) - f(|z - d| + d - ct) - f(|z + d| + d - ct) + f(|z| + 2d - ct)] \quad (103)$$

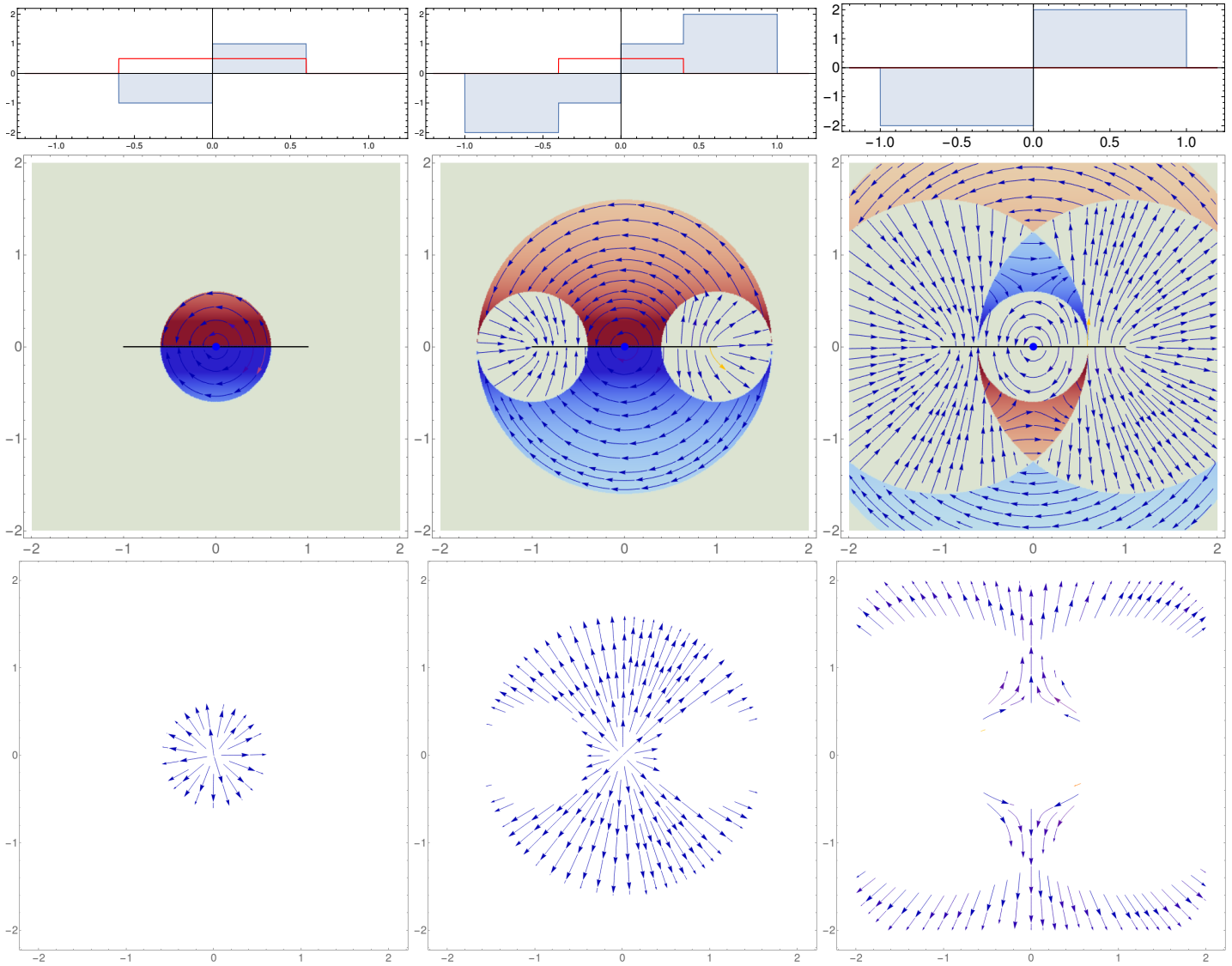
Podobně např.

$$\vec{E}_{\text{dip}}(t, \vec{x}) = \vec{E}_0(t, \vec{x}) - \vec{E}_0(t - d/c, \vec{x} - \vec{d}) - \vec{E}_0(t - d/c, \vec{x} + \vec{d}) + \vec{E}_0(t - 2d/c, \vec{x}). \quad (104)$$

Je pozoruhodné, že pro $f(t - r/c) = \Theta(t - r/c)$ dostaneme proces nabíjení rozlehlého drátového dipólu který v oblasti $r \ll ct - d$ dá elektrostatické pole dvojice opačně nabitých úseček. To ukazuje na problém této aproximace: nejde o pole dvojice opačně nabitých úseků lineárního vodiče, protože na ose z neplatí $E_z = 0$.

To se může zdát divné, protože pole \vec{E}_0 míří ve směru \vec{e}_θ , který je k na ose z kolmý k \vec{e}_z . Protože platí, že $\vec{e}_\theta = \cos \theta \vec{e}_R - \sin \theta \vec{e}_z$ a protože E_0 má ve jmenovateli $\sin \theta$, vyjde nicméně $E_z(\sin \theta = 0) \neq 0$.

Skutečnost, že na povrchu našeho nekonečně tenkého vodiče nevymizí E_z vede k tomu, že část vyzařované energie vychází v tomto modelu z osy z , zatímco v okolí dokonalého vodiče je výkon transportován podél jeho povrchu a tedy veškerá energie pochází ze zdroje proudu tedy z místa napájení dipólové antény.



Obrázek 5: Nahoře: Rozložení proudu (červená čára) a náboje podél (modře) osy z . Uprostřed: Jimi buzené elektromagnetické pole (síločáry udávají elektrické pole, barva znaménko a velikost B_ϕ). Dole: Pole Poyntingova vektoru. Sloupce odpovídají časům $ct/d = 0.6, 1.6, 2.6$ pro $f(r') = \Theta(r')$. Heavisideova funkce zhruba modeluje proces nabíjení drátové dipólové antény po připojení zdroje stejnosměrného napětí na její svorky.

Řešení Maxwellových rovnic respektující okrajové podmínky na ideálním vodiči

Literatura [Jackson 9.4.B, Orfanidis 21.1]

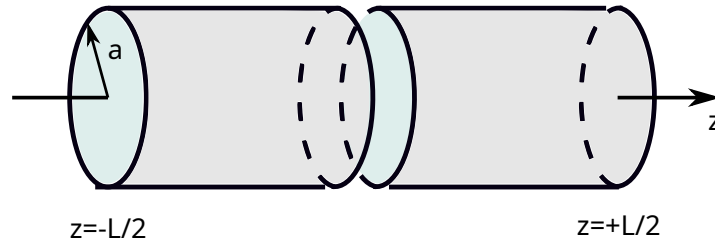
Víme, že v mnoha situacích je vlnové rovnice

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (105)$$

$$\square \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (106)$$

kde potenciály splňují Lorenzovu kalibrační podmínku $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = 0$ doplněna hraničními podmínkami, které určují, jaké proudy je třeba na pravé straně (105), (106). U vlnovodů uvidíme, že lze hledat polní řešení ze symetrie problému a následně proudy určit z hodnot polí na rozhraní vodič-vakuum.

Alternativně lze považovat proudové pole za neznámou veličinu a s využitím linearoty problému jej pak určit právě z hraničních podmínek. Nejjednodušším a zároveň důležitým problémem je vyzařování jednoduché dipólové antény.



Obrázek 6: Uvažovaný dipól má tvar pláště válce rozděleného tenkou mezerou na dvě poloviny. Plošný proud na jeho povrchu teče ve směru osy válce.

Předpokládáme, že má tvar válce $R = a, |z| < L/2$, kde R, ϕ, z jsou válcové souřadnice. V rovině $z = 0$ bude umístěn zdroj napětí, který popíšeme později. Proudů mají harmonický průběh a vyskytují se jen na plášti válce \mathcal{S} a v souladu se symetrií je $\mathbf{j}^{\text{plos}} = j_z^{\text{plos}} \vec{e}_z = (2\pi a)^{-1} I(z) \vec{e}_z$. Tedy na povrchu válce je

$$A_z(R = a, \phi, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{I(z') e^{ik\mathcal{R}}}{2\pi a \mathcal{R}} dS, \quad \mathcal{R} = \sqrt{(z - z')^2 + 2a^2(1 - \cos \phi')}, \quad (107)$$

kde \mathcal{R} je vzdálenost mezi dvěma body na povrchu válce se souřadnicemi $R = a, \phi = 0, z$ a $R' = a, \phi', z'$ a $dS = ad\phi' dz'$. Předpokládáme, že všechny polní veličiny jsou $\sim e^{-i\omega t}$ a tak z Lorenzovy kalibrační podmínky dostaneme $c^{-2} i\omega \Phi = \partial_z A_z$ a následně pak spočteme tečnou složku elektrického pole na povrchu vodiče

$$E_z(z) = -\partial_z \Phi - \partial_t A_z = -\frac{c^2}{i\omega} \left(\partial_{zz} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} d\phi' \right] I(z') dz', \quad (108)$$

tedy (za použití $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ a $k = \omega/c$)

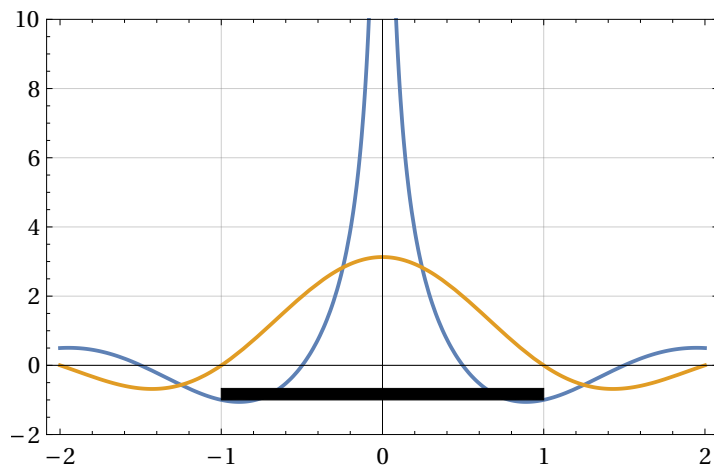
$$E_z(z) = \frac{i}{k} \frac{Z_0}{4\pi} (\partial_{zz} + k^2) \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} d\phi' \right] I(z') dz' = \frac{i}{k} \frac{Z_0 a}{4\pi} (\partial_{zz} + k^2) \int_{-L/2}^{L/2} K(z, z') I(z') dz'. \quad (109)$$

Tato rovnice se nazývá Pocklingtonova (1897). Pokud bychom studovali, jak se chová přímý vodič v poli elektromagnetické vlny, vyžadovali bychom, aby byla nulová superpozice elektrické složky pole proudů a pole dopadající vlny. Zde se budeme zabývat situací, kdy válcový vodič představuje vysílající anténu. V jejím středu je válcová plocha přerušena a je zde umístěn zdroj napětí U . Tomu odpovídá elektrické pole $E_z(z) = -U\delta(z)$, tedy

$$(\partial_{zz} + k^2) \hat{K}I = i \frac{4\pi k}{Z_0} U\delta(z). \quad (110)$$

Zde jsme integrální operátor nahradili symbolem \hat{K} .

Funkce $K(z, z') = K(|z - z'|)$ představuje tzv. jádro integrálního operátoru. Průběh funkce $K(|z - z'|)$ je na Obr. 7.



Obrázek 7: Reálná (singulární) a imaginární část funkce $K(z - z')$ pro $L = \lambda$ a $a = L/30$. I přes singulární chování v $z = z'$, funkce $K(|z - z'|)$ patří do L_1 .

Formálně můžeme psát

$$\hat{K}I = i \frac{4\pi k}{Z_0} U (\partial_{zz} + k^2)^{-1} \delta(z). \quad (111)$$

Snadno zjistíme, že

$$(\partial_{zz} + k^2) (A \cos kz + B \sin k|z|) = 2Bk\delta(z)$$

(Zde rovnou předpokládáme symetrické rozložení proudů na anténě, bez tohoto předpokladu bychom níže museli zkoumat zvlášť řešení pro $z < 0$ a zvlášť pro $z > 0$ takže bychom dostali více rovnic, jejichž řešení by pak m.j. dalo i tuto symetrii.) Tak dostaneme Hallénovu rovnici (1938)

$$\hat{K}I = i \frac{2\pi}{Z_0} U \sin k|z| + A \cos kz. \quad (112)$$

Neznámou je i zde proud $I(z) = I(|z|)$ pro $|z| < L/2$. Je obvyklé takovéto rovnice řešit přechodem k konečně-rozměrnému podprostoru funkcí, tedy položit

$$I(z) = \sum_j I_j \psi_j(z), \quad \sin k|z| = \sum_j s_j \psi_j(z), \quad \cos kz = \sum_j c_j \psi_j(z), \quad 0 < z < L/2. \quad (113)$$

Bázové funkce zvolíme Čebyševovy polynomy $T_j(s)$ posunuté z intervalu $s \in (-1, 1)$ na interval $z \in (0, L/2)$

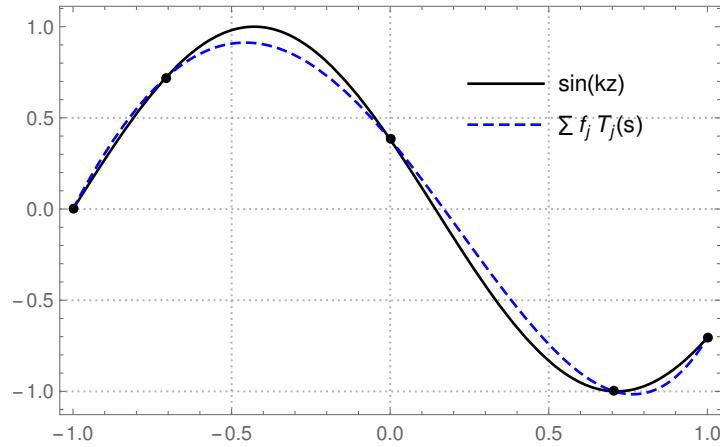
$$\psi_j(z) = T_j \left(4 \frac{|z|}{L} - 1 \right). \quad (114)$$

(Zlaté pravidlo aproximace funkcí na konečném intervalu: Použij Čebyševovy polynomy.) Máme-li funkci $f(s)$, pak koeficienty f_j konečné aproximace $f(s) = \sum_{j=0}^n f_j T_j(s)$ nalezneme nejsnáze diskretní cosinovou transformací (DCT) $\{f_j\} = \text{DCT}^{-1}\{f(s_k)\}$, protože $T_j(s) = \cos(j \arccos s)$ (nejkratší definice Čebyševových polynomů) dostaneme položením $s = \cos t$

$$f(\cos t) = \sum_{j=0}^n f_j \cos(jt).$$

Zde $s_k = \cos t_k$ a $t_k = \pi k/n$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ pokrývají rovnoměrně interval $\langle 0, \pi \rangle$. Proto hledání koeficientů výpočet náročných integrálů nebo řešení soustav rovnic efektivně nahradí slavný algoritmus podobný rychlé Fourierově transformaci (FFT).

Ten je v programu MATHEMATICA implementován ve funkci `FourierDCT` a tak následující funkce spočte koeficienty $\{f_j\}$ pro libovolnou funkci $f(s)$, kde $s \in (-1, 1)$, a řád aproximace n :



Obrázek 8: Hezké funkce jako je třeba $\sin ks$ na tomto obrázku dokáže Čebyševova aproximace nahradit velmi dobře. Kdybychom místo $n = 4$ vzali o jednu více, již bychom křivky na obrázku neodlišili. Aproximační polynom se s přesnou funkcí shoduje ve vyznačených bodech.

```

ChebKoeffs[n_, f_] := Module[{cnodes, fc, cc},
  cnodes = N[Cos[Pi Range[0, n]/n]];
  fc = Map[f, cnodes];
  cc = FourierDCT[fc, 1]*Sqrt[2/n];
  cc[[{1, -1}]] /= 2;
  cc
]

```

Jako příklad vezměme koeficienty s_j reprezentující funkci $f(s) = \sin \frac{L}{4}k(s+1)$ pro $k = 11/L$ na Obr. 8. Uvažujme funkci

$$(\hat{K}\psi_j)(z) = \int_{-L/2}^{L/2} K(z, z')\psi_j(z')dz' \quad (115)$$

kterou můžeme také rozvinout do báze $\{\psi_k\}$:

$$(\hat{K}\psi_j)(z) = \sum_k K_{kj}\psi_k(z). \quad (116)$$

Tak dostáváme maticovou aproximaci rovnice (112)

$$\sum_j K_{kj}I_j = i\frac{2\pi}{Z_0}Us_k + Ac_k. \quad (117)$$

Tuto soustavu rovnic pro neznámé I_j je ještě třeba doplnit hraniční podmínkou $I(z = L/2) = 0$ a množinu neznámých rozšířit o A .

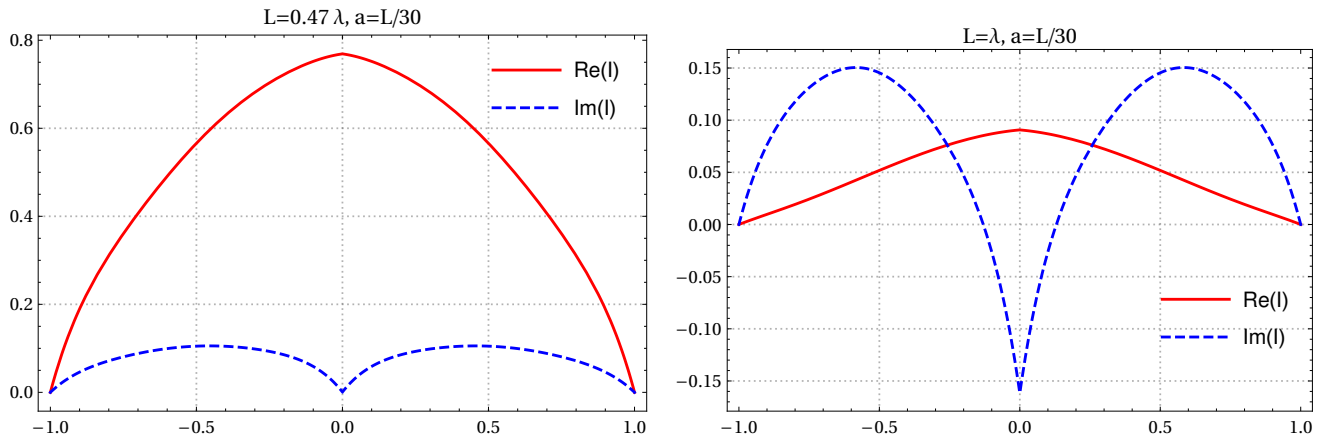
Ukazuje se, že pro nekonečně úzkou mezeru mezi částmi dipólu je roste normálová složka elektrické intenzity na povrchu válce $\sim U/z$ a tedy dostáváme nekonečnou nábojovou hustotu. Z rovnice kontinuity máme $I \sim \ln |z|$. Na Obr. 9 jsme využili skutečnosti, že pro dostatečně nízké řády rozvoje se tento detail ztratí.

TEM vlna podél vedení

Je snadné ukázat, že

$$\mathbf{E} = -[\nabla\psi(x, y)]e^{i(kz-\omega t)}, \quad (118)$$

$$c\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{E} \quad (119)$$



Obrázek 9: Průběhy proudu podél dipólové antény pro dvě frekvence a řád aproximace $n = 7$. Nižší frekvence odpovídá zhruba půlvlnnému dipólu, pro který je anténa v rezonanci, což se pozná tím, že vymizí imaginární hodnota proudu na svorkách. Vyzařovací odpor vyjde po dosazení správných jednotek 81Ω . Na vyšší frekvenci ($L = \lambda$, vpravo) se anténa chová jako kombinace odporu a kapacity.

představuje řešení Maxwellových rovnic v oblasti mezi vodiči V_a , (zde pro jednoduchost uvažujeme jen dva vodiče, $a = 1, 2$), pokud funkce ψ splňuje Laplaceovu rovnici s okrajovou podmínkou

$$\Delta\psi(x, y) = 0, \quad \psi(\partial V_a) = U_a. \quad (120)$$

Obvykle uvažujeme symetrické vedení ($U_1 = -U_2$, nebo situaci, kdy vnější vodič ($U_1 = 0$) obklopuje druhý.

Pole má podobu vlny postupující podél vodičů, Maxwellovy rovnice vyžadují aby $\omega = ck$. Proudové vodiči a napětí mezi nimi mají také podobu postupující vlny a jsou dány křivkovými integrály v rovině $z = \text{konst}$.

$$I_a = \mu^{-1} \int_{\gamma_a} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \quad (121)$$

$$U_{ab} = \epsilon \int_{\Gamma_{ab}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (122)$$

kde Γ_{ab} je křivka od povrchu jednoho vodiče k druhému, kde γ_a je křivka okolo příslušného vodiče. Máme-li dva vodiče a představuje-li \hat{z} interval vedení délky ℓ podél osy z , jsou

$$C = C_1 \ell = \frac{\epsilon}{U_{ab}} \int_{\gamma_a \times \hat{z}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (123)$$

$$L = L_1 \ell = \frac{1}{I_a} \int_{\Gamma_{ab} \times \hat{z}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (124)$$

statická kapacita a stacionární indukčnost kusu vedení délky ℓ a C_1, L_1 tytéž na jednotku délky vedení. Souvislosti příslušných $d\mathbf{l}$ a $d\mathbf{S}$ vedou k tomu, že čtyři veličiny I, U, C, L jsou určeny geometrií vedení pouze skrze dva integrály $\int \nabla\psi \cdot d\vec{l}$ – okolo a mezi vodiči. Proto platí dva vztahy

$$\mu\epsilon = C_1 L_1 = \frac{1}{c^2}, \quad (125)$$

$$\frac{U}{I} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = Z_0, \quad (126)$$

Z_0 se nazývá impedance vedení.

Zatímco pro vlnu postupující jedním směrem je poměr napětí a proudu dán parametry vedení, obecné harmonické řešení je složeno z vln šířících se opačnými směry: $U_1 e^{i(kz - \omega t)} = Z I_1 e^{i(kz - \omega t)}$, $U_2 e^{i(-kz - \omega t)} = -Z I_2 e^{i(kz - \omega t)}$.

Příklad: Důležitý problém představuje otázka, jak se z hlediska zdroje na začátku vedení o impedanci Z a délky d jeví zátěž (impedance Z_L) připojená na jeho konec. Pokud je $Z \neq Z_L$ dochází na konci vedení k odrazu vlny a ta zpět na začátek dorazí z nějakým fázovým posunem a tam tak pozorujeme obecně komplexní impedanci Z_i :

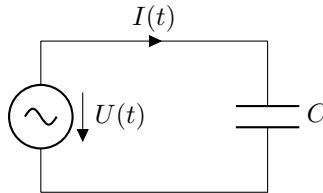
```
J=j1 Exp[I (k z - ω t) ] + j2 Exp[I (-k z - ω t) ]
U=Z j1 Exp[I (k z - ω t) ] -Z j2 Exp[I (-k z - ω t) ]
Solve[ {U == ZL J /. z -> d, U == Zi J /. z -> 0 }, {j2,Zi}] // FullSimplify
```

$$j_2 = -j_1 e^{2ikd} \frac{Z_L - Z}{Z_L + Z}, \quad (127)$$

$$Z_i = Z \frac{Z_L - iZ \tan(kd)}{Z - iZ_L \tan(kd)}. \quad (128)$$

Důležité jsou případy $kd = \pi/2, \pi$ a $Z_L = 0, \infty$. Například je vidět, že krátký kus na konci zkratovaného vedení se chová jako cívka (indukčnosti $L = L_1 d + O(d^3)$), podobně krátký kus na konci otevřeného vedení se chová jako kondenzátor (pro fázový faktor $e^{-i\omega t}$ má indukčnost zápornou imaginární impedanci a kondenzátor kladnou!). Pro $kd = \pi/2$, tedy $d = \lambda/4$ je impedance zkratovaného vedení nekonečná. Vedení $d = \lambda/4$ impedance $Z = \sqrt{R_L Z_i}$ se dá použít jako “transformátor” pro bezodrazové navázání dvou vedení odlišných impedancí.

Nejprve si připomeňme, jak vypadá v naší konvenci $\sim e^{-i\omega t}$ impedance kondenzátoru. Ta je dána jako poměr napětí a proudu v obvodu



Protože pro $U(t) = U e^{-i\omega t}$ je

$$I(t) = C \frac{dU}{dt} = -i\omega C U = Z^{-1} U \quad (129)$$

dostáváme pro kapacitu (a podobně cívku) hodnoty impedance (reaktance)

$$Z_C = \frac{1}{-i\omega C}, \quad (130)$$

$$Z_L = -i\omega L. \quad (131)$$

Pokud tedy vezmeme krátký úsek vedení (takže $\tan kd \sim kd$) a položíme $Z_L = 0, \infty$ dostaneme

$$Z_{i0} \doteq -i Z kd = -i Z \frac{\omega}{c} d = -i \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \frac{\omega}{\sqrt{\frac{1}{L_1 C_1}}} = -i \omega L_1 d, \quad (132)$$

$$Z_{i\infty} \doteq \frac{Z}{-ikd} = \dots = \frac{1}{-i\omega C_1 d}. \quad (133)$$

Krátké zkratované ($Z_L = 0$) vedení se tedy chová jako indukčnost $L_1 d$, krátké otevřené vedení jako kapacita $C_1 d$.

Vlnovody

Výše uvažovaná TEM vlna kvůli vlastnostem řešení Laplaceovy rovnice vyžaduje dva vodiče, zejména uvnitř dutého válcového vodiče má řešení $\psi \equiv \text{konst.}$ a TEM pole tedy vymizí. Ze sférických vln víme, že transverzální \mathbf{E}^{TE} doprovází složitější \mathbf{B}^{TE} a proto zkusíme položit

$$\mathbf{E}^{TE} = [\mathbf{e}_z \times \nabla \psi^{TE}(x, y)] e^{i(kz - \omega t)}, \quad (134)$$

takže $\nabla \cdot \mathbf{E}^{TE} = 0$ a magnetické pole vzít ve tvaru (166)

$$\mathbf{B}^{TE} = \frac{1}{i\omega} \nabla \times \left\{ [\mathbf{e}_z \times \nabla \psi^{TE}(x, y)] e^{i(kz - \omega t)} \right\} = \left[\frac{1}{i\omega} \mathbf{e}_z \Delta \psi^{TE}(x, y) - \frac{k}{\omega} \nabla \psi^{TE}(x, y) \right] e^{i(kz - \omega t)}. \quad (135)$$

Vektorový součin zařídí, že $[\mathbf{e}_z \times \nabla \psi^{TE}(x, y)] e^{i(kz - \omega t)} = \mathbf{e}_z \times \nabla [\psi^{TE}(x, y) e^{i(kz - \omega t)}]$ a tedy vlnová rovnice

$$0 = \square \mathbf{E}^{TE} = \mathbf{e}_z \times \nabla \left[e^{i(kz - \omega t)} \left(\Delta - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi(x, y) \right] \quad (136)$$

dává, že $\psi(x, y)$ musí být vlastní funkcí Laplaceova operátoru v rovině xy a pokud příslušnou vlastní hodnotu označíme $-k_{\perp}^2$ máme

$$k_{\perp}^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (137)$$

Hraniční podmínky na povrchu ideálního vodiče s normálou \mathbf{n} jsou

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad (138)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (139)$$

Pro TE tedy máme

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} \sim \mathbf{n} \times (\mathbf{e}_z \times \nabla \psi) = \mathbf{e}_z (\mathbf{n} \cdot \nabla \psi) = 0, \quad (140)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \sim \mathbf{n} \cdot \nabla \psi = 0. \quad (141)$$

Obě podmínky tedy vedou na stejnou (Neumannovu) hraniční podmínku

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \psi(\partial V) = 0. \quad (142)$$

Podobně TM pole

$$\mathbf{B}^{TM} = \frac{1}{c} [\mathbf{e}_z \times \nabla \psi^{TM}(x, y)] e^{i(kz - \omega t)}, \quad (143)$$

$$\mathbf{E}^{TM} = -\frac{c^2}{i\omega} \nabla \times \frac{1}{c} \left\{ [\mathbf{e}_z \times \nabla \psi^{TM}(x, y)] e^{i(kz - \omega t)} \right\} = \left[-\frac{c}{i\omega} \mathbf{e}_z \Delta \psi^{TM}(x, y) + \frac{ck}{\omega} \nabla \psi^{TM}(x, y) \right] e^{i(kz - \omega t)} \quad (144)$$

vyžaduje splnění Dirichletovy podmínky

$$\psi(\partial V) = 0. \quad (145)$$

Vlnovody jako elektromagnetické rezonátory

Je přirozené zkoumat, zda uzavřením vlnovodu na obou jeho koncích v $z = 0$ a $z = L$, tedy vyžadováním $\vec{E}_{\parallel} = 0$ a $B_z = 0$ vede na podmínky vzniku stojatého vlnění. Pro TE dostáváme

$$\mathbf{E}_{\parallel}^{TE} = [\mathbf{e}_z \times \nabla \psi^{TE}(x, y)] \sin kz e^{i\omega t}, \quad B_{\perp} = \frac{1}{i\omega} \Delta \psi^{TE}(x, y) \sin kz e^{i\omega t} \quad (146)$$

pro TM

$$\mathbf{E}_{\parallel}^{TM} = \left[\frac{ck}{\omega} \nabla \psi^{TM}(x, y) \right] e^{i(kz - \omega t)} \sin kz e^{i\omega t}, \quad B_{\perp} = 0. \quad (147)$$

Sférické elektromagnetické vlny

Literatura [Zangwill 16.8, Jackson 9.6-7]

Separace vlnové rovnice ve sférických souřadnicích

Pro skalární funkci

$$\psi(t, \mathbf{x}) = f(r)Y_{lm}(\theta, \phi)e^{-i\omega t} \quad (148)$$

máme ($k^2 = \omega^2/c^2$)

$$\square\psi = \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\psi = \frac{1}{r^2}(r^2 f')' - \frac{l(l+1)}{r^2}f + \frac{\omega^2}{c^2}f = 0. \quad (149)$$

Příslušné vlastní funkce jsou

$$f_{lm}(k; r) = \begin{cases} j_l(kr) \\ n_l(kr) \\ h^{(1,2)}(kr) = j_l \pm in_l \end{cases} \quad (150)$$

Zde

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+1/2}(x), \quad n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{l+1/2}(x) \quad (151)$$

a $h^{(1)}, h^{(2)}$ jsou sférické Besselovy (resp. Neumannovy a Hankelovy) funkce. Asymptotický rozvoj dává

Series[SphericalHankelH1[1, r] Exp[-I t], {r, Infinity, 1}]

$$\frac{i}{r}e^{-i\frac{\pi}{2}l+i(r-t)}$$

tedy

- $h_l^{(1)}$ představuje odcházející vlnu,
- $h_l^{(2)}$ představuje přicházející vlnu,
- j_l představuje funkci regulární v počátku.

Vektorové harmoniky

Multipóly představují bodové zdroje elektromagnetického záření, a i když jejich statické pole ubývá jako $1/r^{l+2}$, v radiační zóně vždy převládá zářivá část úměrná $1/r$. Z rozměrových důvodů chybějící faktor $1/r^{l+1}$ nahradí mocnina velikosti vlnového vektoru k^{l+1} . Spolu s duálním polem, za kterým si lze představit magnetické multipóly, dostáváme kompletní zářivé pole daleko od libovolného objektu, funkce

$$\mathbf{Y}_{lm}^{(mag)} = \mathbf{x} \times \nabla Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (152)$$

$$\mathbf{Y}_{lm}^{(el)} = -\mathbf{n} \times (\mathbf{x} \times \nabla Y_{lm}(\theta, \phi)) = r\nabla Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (153)$$

představují kompletní bázi funkcí pro rozklad vektorových polí tečných ke sféře, tzv. vektorové harmonické funkce. Ty lze doplnit o bázi radiálních vektorových polí

$$\mathbf{Y}_{lm}^{(rad)} = \mathbf{n} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (154)$$

Cvičení: Ukažte, že $\int \mathbf{Y}_{lm}^{(el)} \cdot \mathbf{Y}_{l'm'}^{*(el)} = l(l+1)\delta_{ll'}\delta_{mm'}$. Využijte $\Delta Y_{lm} = -l(l+1)/r^2 Y_{lm}$ a faktu, že pro ke sféře tečná \mathbf{A} vymizí integrál přes sféru $\oint \nabla \cdot \mathbf{A}(\theta, \phi) d\Omega = 0$.

[Thorne, K. S. 1980, Rev. Mod. Phys., 52, 299] proto zavádí lépe normalizované

$$\mathbf{Y}_{lm}^B = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{x} \times \nabla Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (155)$$

$$\mathbf{Y}_{lm}^E = -\mathbf{n} \times \mathbf{Y}_{lm}^B = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} r \nabla Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (156)$$

$$\mathbf{Y}_{lm}^R = \mathbf{n} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (157)$$

$$(158)$$

Vektorová vlnová rovnice

Vektorová pole v separovaném tvaru splňující jednak vlnovou rovnici jednak vazbu nulové divergence získáme poté, co vypočteme

$$\Delta \mathbf{Y}_{lm}^{(mag)} = \Delta (\mathbf{x} \times \nabla Y_{lm}(\theta, \phi)) = -\frac{l(l+1)}{r^2} \mathbf{Y}_{lm}^{(mag)}, \quad (159)$$

Proto pro

$$\mathbf{A} = f(r) \mathbf{Y}_{lm}^{(mag)} \quad (160)$$

$$\Delta \mathbf{A} = \left(\Delta f - \frac{l(l+1)}{r^2} f \right) \mathbf{Y}_{lm}^{(mag)} \quad (161)$$

a tedy jedno separované řešení vlnové rovnice má podobu

$$\mathbf{B}^{\text{TM}} = f_{lm}(r) \mathbf{Y}_{lm}^{(mag)}(\theta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad (162)$$

$$-i\omega \mathbf{E}^{\text{TM}} = c^2 \nabla \times \mathbf{B}^{\text{TM}}, \quad (163)$$

kde $f_{lm}(r)$ je dáno (150). Protože

$$\text{div} \left(f(r) \mathbf{Y}_{lm}^{(el)} \right) = -\frac{l(l+1)}{r} f(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \neq 0, \quad (164)$$

nepředstavují přímo $\mathbf{Y}_{lm}^{(el)}$ ty správné funkce pro rozvoj elektromagnetického pole a využívá se dualita:

$$\mathbf{E}^{\text{TE}} = g_{lm}(r) \mathbf{Y}_{lm}^{(mag)}(\theta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad (165)$$

$$-i\omega \mathbf{B}^{\text{TE}} = -\nabla \times \mathbf{E}^{\text{TE}} \quad (166)$$

a výsledné pole je součtem TE a TM komponenty.

Pro úplnost je třeba uvést, že

$$\nabla \times \left(f(r) \mathbf{Y}_{lm}^{(mag)} \right) = -\frac{l(l+1)}{r} f(r) \mathbf{Y}_{lm}^{(rad)} - \left(f'(r) + \frac{f(r)}{r} \right) \mathbf{Y}_{lm}^{(el)}. \quad (167)$$

To dává výše použitý postup do souvislosti s [Bouwkamp & Casimir, Physica 20, 539 (1954)], kde se vychází z pozorování, že

$$\Delta (\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{A} + 2 \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (168)$$

a nenulové radiální složky $\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}^{\text{TE}}$ resp $\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}^{\text{TM}}$ tak splňují skalární vlnovou rovnici. Chytrou manipulací pak lze ukázat, že tyto radiální složky polí určují transverzální složky druhého pole, např.

$$(\mathbf{x} \times \nabla) \cdot \mathbf{E}^{\text{TE}} = \mathbf{x} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^{\text{TE}}) = \mathbf{x} \cdot (i\omega \mathbf{B}^{\text{TE}}). \quad (169)$$

Jak píše [Jackson], úvaha o snižování a zvyšování m při působení

$$\hat{\mathbf{L}} = \frac{1}{i} (\mathbf{x} \times \nabla) \quad (170)$$

známého z kvantové mechaniky vede k tomu, že pole \mathbf{E}^{TE} musí mít tvar (165) $\sim \hat{\mathbf{L}} Y_{lm}$ – právě $\hat{\mathbf{L}}^2$ totiž nemění m a skalární Y_{lm} má tedy šanci být vlastní funkcí.

Sférická kalibrace

Ukazuje se, že výše uvedený postup je ekvivalentní jistému triku s kalibrací. Volbou čistě radiálního potenciálu $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r$, a modifikace Lorenzovy kalibrace ($\partial_r A_r \neq \nabla \cdot \mathbf{A}$!)

$$\partial_r A_r + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = 0 \quad (171)$$

dostaneme polní rovnici

$$\square \frac{A_r}{r} = 0. \quad (172)$$

Protože

$$\mathbf{B} = \nabla \times (r \frac{A_r}{r} \mathbf{e}_r) = -\mathbf{x} \times \nabla \frac{A_r}{r} \quad (173)$$

představuje právě (162), je $A_r/r = -f_{lm}(r)Y(\theta, \phi)e^{-i\omega t}$. TE pak odpovídají duálnímu potenciálu $\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{F}$, kde $\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r$.

Sférický elektromagnetický rezonátor

Literatura [Zangwill 19.6.3]

Hraniční podmínky pro elektromagnetické pole uvnitř dokonale vodivé sféry jsou splněny pro $[r f_{lm}(kr)]'_{r=a} = 0$ a $g_{lm}(r=a) = 0$. Rezonanční frekvence $\omega_{lm}^{\text{TE, TM}}$ jsou tedy dány kořeny $j_l(ka) = 0$ a extrémy $[x j_l(x)]' = 0$. Nejnižší frekvence pro dané a odpovídá TM_{1m} módům

$$ka = \frac{\omega}{c} a \doteq 2.7437.$$

Rozptyl rovinné vlny na dielektrické kouli

Literatura [Zangwill 21.5.2]

Důležitým klasickým výsledkem je výpočet rozptylu rovinné elektromagnetické vlny na dielektrické kouli (G. Mie 1908). Použijeme jej jako ilustraci použití vektorových harmonik (ačkoli Mie se obešel bez nich).

Protože jde o delší výpočet, použijeme k výpočtu program Mathematica. Nejprve definujeme vektorové harmonický

```
Ymag = Cross[ {r, 0, 0}, Grad[ Y[θ, φ], {r, θ, φ}, "Spherical"] ]
Yel = r Grad[ Y[θ, φ], {r, θ, φ}, "Spherical"]
```

Následně je třeba dodat identity, které tyto harmoniky splňují. Bohužel, mnoho pravidel asociovaných s funkcemi SphericalHarmonicY mění l, m a tak jsou nepoužitelné v následujícím výpočtu (např. chceme aby \mathbf{E} a \mathbf{B} byly vyjádřeny s použitím týchž l, m – zkuste si spočít $D[\text{SphericalHarmonicY}[1, m, \theta, \phi], \{\theta, 2\}]$!). Takto zkonstruujeme pravidla pro likvidaci druhých a vyšších derivací s použitím identity $\Delta Y_{lm} = -l(l+1)Y_{lm}/r^2$ a jejich parciálních derivací

```
ident1 = Laplacian[ Y[θ, φ], {r, θ, φ}, "Spherical"] == -l(l+1)/r^2 Y[θ, φ]
Solve[ident1, Y^(2,0)[θ, φ]]
Yzeros = Flatten[ {
%,
( Solve[ D[ident1, θ], Y^(3,0)[θ, φ] ] /. % ),
( Solve[ D[ident1, φ], Y^(0,3)[θ, φ] ] /. % )
}]
```

Následující funkce pak tato pravidla použije a výsledek upraví tak, že vytkne úhlové závislosti

```
CY[f_] := Collect[f/.Yzeros//FullSimplify, {Y^(1,0)[θ, φ], Y^(0,1)[θ, φ], Y[θ, φ]}
```

Již víme, že pole rozvíjíme do TE a TM módů, např. \mathbf{E}^{TE} je úměrné $\mathbf{Y}^{(\text{mag})}$, zatímco \mathbf{B}^{TE} (obsahující i radiální složku) zkonstruujeme z příslušné Maxwellovy rovnice pro jeho časovou derivaci s použitím $\partial_t \rightarrow -i\omega$:

```
Ete = f[r] Ymag
Bte = 1/(I ω) Curl[ Ete, {r, θ, φ}, "Spherical"] // CY
Btm = g[r] Ymag
```

```
Etm = 1/(-I ω ε μ) Curl[ Btm, {r, θ, φ}, "Spherical"] // CY
```

```
kontrola ->(Ete - 1/(-I ω ε μ) Curl[ Bte, {r, θ, φ}, "Spherical"] /.
  f->Function[r,j[w k r] ]/.ε -> w^2/(μ c^2) /.ω -> c k ) /.
  j'' -> Function[x, ( 1 (1+1)/x^2 -1 )j[x] - 2/x j'[x]] // CY
kontrola ->(Btm - 1/(I ω) Curl[ Etm, {r, θ, φ}, "Spherical"] /.
  g->Function[r,j[w k r] ]/.ε -> w^2/(μ c^2) /.ω -> c k ) /.
  j'' -> Function[x, ( 1 (1+1)/x^2 -1 )j[x] - 2/x j'[x]] // CY
```

(Poslední dva příkazy jen kontrolují, že \mathbf{E}^{TE} a \mathbf{B}^{TE} resp. \mathbf{E}^{TM} a \mathbf{B}^{TM} splňují Maxwellovy rovnice, na to potřebujeme aby f, g řešily příslušnou radiální diferenciální rovnici.)

Uvnitř koule máme jen regulární řešení úměrné $j_l(kr)$, $\mu_r = 1$ a index lomu $w = \sqrt{\epsilon_r} > 1$, vně je jednak dopadající vlna (opět úměrná $j_l(kr)$, viz dále) a také vlna odražená $\sim h_l^{(1)}(kr)$ a $\epsilon_r = \mu_r = 1$:

```
uvnitr = {
  \[Epsilon] -> w^2/(c^2 \[Mu]) ,
  f -> Function[ r, Dlm J[w k r] /(w k r) ],
  g -> Function[ r, Elm J[w k r] /(w k r)]}
venku = {\[Epsilon] -> 1/(c^2 \[Mu]) ,
  f -> Function[ r, A1lmTE J[k r] /(k r) + B1lm H1[k r] /(k r)],
  g -> Function[ r, A2lmTM J[k r] /(k r) + C1lm H1[k r] /(k r)]}
```

Kde jsme definovali koeficienty transmise a odrazu D_{lm} , E_{lm} a B_{lm} , C_{lm} . Dopadající vlna je určená amplitudami A_{lm}^{TE} a A_{lm}^{TM} . Tyto koeficienty určují podobu dopadající vlny – ještě uvidíme, že protože níže budeme uvažovat dopad rovinné vlny, je vhodné dopadající vlnu rozložit do j_l nikoli $h_l^{(2)}$. Výše jsme také použili malý trik, který zjednoduší výsledné výrazy – místo sférických Besselových funkcí j_l, n_l, \dots jsou použity funkce $J_l(x) = x j_l(x), N_l(x) = x n_l(x), \dots$ a to proto, že ve sférických souřadnicích máme lapacián $\Delta j = (rj)''/r = J''/r$ a tak se vtahy s použitím J_l, N_l oproti těm s j_l, n_l o něco zjednoduší. (Přesněji řečeno je to výraz pro rotaci $\mathbf{E}^{TM}, \mathbf{B}^{TM}$, ale ten s lapaciánem souvisí.) I Wronskián $J_l(x)H_l^{(1)}(x) - H_l^{(1)}(x)J_l'(x) = i$ se trochu zjednoduší.

Neznámé koeficienty nalezneme řešením rovnic na rozhraní. Protože $\mu_r = 1$ jsou rovnice pro TE snadné (radiální, nespojitá složka \mathbf{E} zde vymizí)

```
(Ete /. venku) == (Ete/.uvnitr)
(Bte /. venku) == (Bte/.uvnitr)
Solve[ {%,%},{B1m,D1m}] //Simplify //Factor
% /. J[k r] H1'[k r]-H1[k r] J'[k r]->i
```

Pro TM vlnu musíme zapsat podmínky na rozhraní s např. použitím složek

```
Dot[ {1,0,0}, (Etm /. venku) ] == w^2 Dot[ {1,0,0}, (Etm/.uvnitr)];
Dot[ {0,1,0}, (Etm /. venku) ] == Dot[ {0,1,0}, (Etm/.uvnitr)];
Dot[ {0,0,1}, (Etm /. venku) ] == Dot[ {0,0,1}, (Etm/.uvnitr)];
(Btm /. venku) == (Btm/.uvnitr);
Solve[ {%,%,%,%,%},{C1m,E1m}] //Simplify //Factor;
% /. J[k r] H1'[k r]-H1[k r] J'[k r]->i
```

Tak dostáváme

$$B_{lm} = -A_{lm}^1 \frac{J_l(wka)J_l'(ka) - wJ_l(ka)J_l'(wka)}{J_l(wka)H_l^{(1)}(ka) - wH_l^{(1)}(ka)J_l'(wka)}, \quad D_{lm} = A_{lm}^1 \frac{iw}{J_l(wka)H_l^{(1)}(ka) - wH_l^{(1)}(ka)J_l'(wka)}, \quad (174)$$

$$C_{lm} = -A_{lm}^2 \frac{wJ_l(wka)J_l'(ka) - J_l(ka)J_l'(wka)}{wJ_l(wka)H_l^{(1)}(ka) - H_l^{(1)}(ka)J_l'(wka)}, \quad E_{lm} = A_{lm}^2 \frac{iw^2}{wJ_l(wka)H_l^{(1)}(ka) - H_l^{(1)}(ka)J_l'(wka)}. \quad (175)$$

Tyto vztahy představují odpověď na otázku, jaká prošlá a rozptýlená vlna odpovídá konkrétní parciální vlně, např $f(r) = B_{lm}h_l^{(1)}(kr)$.

Rozklad rovinné vlny do parciálních vln je standardní záležitost ve vlnové mechanice, zde se ale navíc přidává otázka polarizace (t.j. TE/TM) a proto je na místě pár poznámek. Rovinnou EM vlnu uvažujem ve tvaru

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{B} = \frac{E_0}{c} e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_y. \quad (176)$$

Z ortogonality $\int \mathbf{Y}_{lm}^{(mag)} \cdot \mathbf{Y}_{l'm'}^{*(mag)} = l(l+1)\delta_{ll'}\delta_{mm'}$ máme

$$A_{lm}^1 = \frac{1}{l(l+1)} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{Y}_{lm}^{*(mag)} d\Omega, \quad (177)$$

$$A_{lm}^2 = \frac{1}{l(l+1)} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y}_{lm}^{*(mag)} d\Omega. \quad (178)$$

Vyjádříme-li $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ z (176) ve sférické bázi, pak obsahují členy $\cos \phi, \sin \phi$ a tedy pouze členy s $m = \pm 1$ budou nenulové

$$A_{l\pm 1}^1 = \pm i^{l-1} \sqrt{\frac{2l+1}{l(l+1)}} \pi E_0, \quad (179)$$

$$A_{l\pm 1}^2 = \mp i^l \sqrt{\frac{2l+1}{l(l+1)}} \pi \frac{E_0}{c}. \quad (180)$$

Odvození těchto amplitud ze známé generující formule

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (181)$$

zahrnuje použití definic kulových funkcí, vztahů pro derivace Legendrových polynomů atp., lze je ale snadno ověřit pro konkrétní l :

```
LL = 4
eY = Grad[ r Sin[θ] Sin[φ], {r, θ, φ}, "Spherical"]
EO/c Exp[ I k r Cos[θ] ] eY
Dot[ %, Conjugate[Ymag] ] % /. Y -> Function[{θ, φ}, SphericalHarmonicY[LL, 1, θ, φ]];
Assuming [ k r ∈ Reals && θ ∈ Reals && φ ∈ Reals , Simplify [%]]
Integrate[ % Sin[θ], {φ, -Pi, Pi}, {θ, 0, Pi} ]
%/SphericalBesselJ[LL, k r]/(LL (LL + 1)) // FullSimplify
%/ ( I^(LL) Sqrt[(2 LL + 1)/LL/(LL + 1) Pi] EO )
```