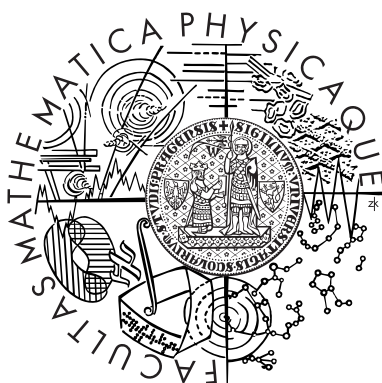


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Marián Simon

Vlnová rovnice v okolí černé díry

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Tomáš Ledvinka Ph.D.,
Studijní program: obecná fyzika

2006

Rád by som poďakoval vedúvemu mojej práce, za jeho trpezlivosť a značnú pomoc pri výpočtoch, ktoré by bez pomoci z jeho strany ešte stále nefungovali.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 10.8.2006

Marián Simon

Obsah

1	Teoretický úvod	6
1.1	Vlnová rovnica	6
1.2	Vlnová rovnica v priestore so Schwarzschildovou metrikou	7
2	Riešenie vlnovej rovnice v zakrivenom priestore	11
2.1	Počiatocne dáta a ich rozklad	11
2.2	Numerické riešenie vlnovej rovnice	15
3	Obrázky vlny v okolí čiernej diery v rôznych časoch	18
4	Dodatky	29
4.1	Odvedenie rovnice (1.32) zo vzťahu (1.28)	29
4.2	Program na počítanie transformácie $r(r_*)$	30
4.3	Program na počítanie integálov Gaussovou metódou	31
	Literatúra	35

Název práce: Vlnová rovnice v okolí černé díry
Autor: Marián Simon
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Tomáš Ledvinka Ph.D.
e-mail vedoucího: ledvinka@mbox.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: V predloženej práci študujeme vývoj vlnovej rovnice na čiernodierovom pozadí. Vlnovú rovnicu separujeme v Schwarzschildových súradniciach a tým rozložíme vlnovú rovnicu do sústavy jednoduchších rovníc. Jednotlivé rovnice ešte zjednodušíme pomocou tzv. *korytnačej* súradnice. Po niekoľkých úpravách už máme rovnice v tvare, v ktorom ich budeme riešiť. Rozklad konkrétne robíme pre počiatočnú podmienku a to tak, že ju preintegrujeme s l -tým Legendrovým polynómom. To robíme numericky a používame pri tom Gaussovu metódu integrácie a výhodné vlastnosti Legendrových polynómov. Pri numerickom riešení vlnových rovníc používame Runge-Kuttov algoritmus štvrtého rádu. Výsledkom práce sú obrázky vypočítané na počítači, ktoré zachytávajú pohyb vlny v okolí čiernej diery.

Kľúčová slova: vlnová rovnica, Schwarzschildova metrika, Legendrove polynómy, numerické metódy

Title: Wave equation in the vicinity of a black hole
Author: Marián Simon
Department: Institute of theoretical physics
Supervisor: Mgr. Tomáš Ledvinka Ph.D.
Supervisor's e-mail address: ledvinka@mbox.troja.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study evolution of wave equation on black hole background. We separate the wave equation in to set of simpler equations using separation in Schwarzschild coordinates. We simplify individual equations using the *tortoise* coordinate. After few another modifications we have equations in the form in which we are going to solve them. More precisely we are using separation for initial condition. To achieve that we integrate initial condition with l^{th} Legendre polynomial. We do that using numerical method called Gauss method of integration and using some suitable properties of Legendre polynomials. Solution of wave equations is realized by numerical method called fourth-order Runge-Kutta algorithm. The result of this work is set of pictures generated by computer which captures the motion of wave

in the vicinity of black hole.

Keywords: wave equation, Schwarzschild metrics, Legendre polynoms, numerical methods

Kapitola 1

Teoretický úvod

1.1 Vlnová rovnica

Vlnová rovnica má vo všeobecnosti tvar:

$$c^2 \nabla^2 \Psi - \partial_{tt}^2 \Psi = 0 \quad (1.1)$$

V tejto práci však ilustrujeme chovanie vlnovej rovnice za zjednodušujúcej axiálnej symetrie a tak nebude potrebné riešiť vlnovú rovnicu v troch dimenziách. Preto pokladám za vhodné uviesť vybrané vlastnosti jednorozmernej vlnovej rovnice:

$$c^2 \partial_{xx}^2 \Psi - \partial_{tt}^2 \Psi = 0 \quad (1.2)$$

Pri zmene súradníc $\mu = x + ct$ a $\nu = x - ct$ sa rovnica (1.2) transformuje na:

$$\partial_\mu \partial_\nu \Psi = 0 \quad (1.3)$$

Všeobecným riešením rovnice (1.3) je $\Psi(\mu, \nu) = F(\mu) + G(\nu)$. Po návrate k pôvodným premenným dostávame:

$$\Psi(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct) \quad (1.4)$$

Je vidieť, že rovnica (1.4) nám dáva riešenie ako superpozíciu dvoch vln, ktoré sa šíria bez zmeny tvaru, rýchlosťou svetla, opačným smerom.

Cauchyho úlohou pre diferenciálnu rovnicu $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ je nájsť také $y = y(x)$, ktoré rieši diferenciálnu rovnicu a navyše vyhovuje počiatočným podmienkam v tvare:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \quad (1.5)$$

kde y_0, y_1 až y_{n-1} sú známe. Ak máme počiatočné podmienkam v tvare:

$$\Psi(x, 0) = g(x), \quad \partial_t \Psi(x, 0) = h(x) \quad (1.6)$$

potom z rovnice (1.4) dostaneme:

$$F(x) + G(x) = g(x), \quad cF'(x) - cG'(x) = h(x) \quad (1.7)$$

Integrovaním druhej rovnice vo vzťahu (1.7) dostaneme $cF(x) - cG(x) = H(x)$, kde $H(x) = \int_0^x h(s)ds + C$. Ak to skombinujeme s prvou rovnicou vo vzťahu (1.7) dostaneme pre F a G vzťahy:

$$F(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x h(\xi)d\xi + C \quad (1.8)$$

$$G(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x h(\xi)d\xi - C \quad (1.9)$$

Ak dosadíme tieto rovnice do vzťahu (1.4) dostaneme:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2}(g(x + ct) + g(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(\xi)d\xi \quad (1.10)$$

1.2 Vlnová rovnica v priestore so Schwarzschildovou metrikou

Rovnica (1.1) sa v Minkowského metrike zapíše:

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \Psi = 0 \quad (1.11)$$

V zakrivenom časopriestore, kde sa metrika môže meniť v každom bode časopriestoru, je potrebné zameniť parciálne derivácie za kovariantné:

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \Psi = 0 \quad (1.12)$$

alebo:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Psi = 0 \quad (1.13)$$

A to je zapísané pomocou parciálnych derivácií:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi) = 0 \quad (1.14)$$

Nás bude zaujímať Schwarzschildova metrika, v ktorej budeme vlnovú rovnicu riešiť:

$$g^{tt} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad (1.15)$$

$$g^{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (1.16)$$

$$g^{\theta\theta} = r^{-2} \quad (1.17)$$

$$g^{\phi\phi} = r^{-2} \sin^{-2} \theta \quad (1.18)$$

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta \quad (1.19)$$

Všetky ostatné komponenty metriky sú nulové. Rozvynutím rovnice (1.14) dostaneme:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_t [r^2 \sin \theta g^{tt} \partial_t \Psi] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_r [r^2 \sin \theta g^{rr} \partial_r \Psi] \\ & + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta [r^2 \sin \theta g^{\theta\theta} \partial_\theta \Psi] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\phi [r^2 \sin \theta g^{\phi\phi} \partial_\phi \Psi] = 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Po dosadení metriky dostávame:

$$\begin{aligned} & \partial_t \left[- \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_t \Psi \right] + \frac{1}{r^2} \partial_t [r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \partial_r \Psi] \\ & + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \left[\sin \theta \frac{1}{r^2} \partial_\theta \Psi \right] + \partial_\phi \left[\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi \Psi \right] \end{aligned} \quad (1.21)$$

To môžeme ďalej upraviť do tvaru:

$$\begin{aligned} & - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_{tt}^2 \Psi + \frac{1}{r^2} \partial_r [r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \partial_r \Psi] \\ & + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_\theta [\sin(\theta) \partial_\theta \Psi] + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2} \partial_{\Phi\Phi}^2 \Psi = 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

Posledné dva členy, derivácie podľa θ a Φ , sú rovnaké ako členy Laplaciánu v plochom priestore. Preto si môžeme dovoliť hľadať riešenie v tvare:

$$\Psi = \psi(r, t) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (1.23)$$

Potom však rovnica (1.22) prejde do tvaru:

$$- \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_{tt}^2 \psi + \frac{1}{r^2} \partial_r [r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \partial_r \psi] = \frac{l(l+1)}{r^2} \Psi \quad (1.24)$$

V tejto rovnici si môžeme všimnúť známy fakt, že Schwarzschildova metrika prechádza pre malé M (slabé zdroje) a veľké r (vzdialené zdroje) na plochú

metriku.

Teraz zavedieme novú radiálnu súradnicu $s = f(r)$ tak, aby sa nám vlnová rovnica čo najviac zjednodušila. Tým sa transformuje aj derivácia na:

$$\partial_r = \frac{\partial}{\partial r} = \frac{ds}{dr} \frac{\partial}{\partial s} \quad (1.25)$$

Keď to naspäť dosadíme do vlnovej rovnice (1.24) dostaneme:

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_{tt}^2 \psi + \frac{1}{r^2} f'(r) \partial_s \left[r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) f'(r) \partial_s \psi \right] = \frac{l(l+1)}{r^2} \psi \quad (1.26)$$

Po vynásobení faktorom $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$ máme:

$$\frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) f'(r) \partial_s \left[r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) f'(r) \partial_s \psi \right] - \partial_{tt}^2 \psi = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{l(l+1)}{r^2} \psi \quad (1.27)$$

Všimnime si, že člen $\left(1 - \frac{2M}{r}\right) f'(r)$ by bolo výhodné položiť rovný 1, potom by sme dostali vlnovú rovnicu v tvare:

$$-\partial_{tt}^2 \psi + \frac{1}{r^2} \partial_s \left[r^2 \partial_s \psi \right] = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{l(l+1)}{r^2} \psi \quad (1.28)$$

To však znamená:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) f'(r) = 1 \quad (1.29)$$

$$f(r) = \int \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr \quad (1.30)$$

$$s = f(r) = 2M \left[\frac{r}{2M} + \ln \frac{r}{2M} - 1 \right] \quad (1.31)$$

Ďalšou výhodou tohto riešenia je správanie sa novej radiálnej súradnice. Ak sa r blíži k $2M$, tak s ide do $-\infty$ a pre r idúce do ∞ aj s ide do ∞ . Vďaka tomuto sa súradnica s podobá na normálnu priestorovú súradnicu ako na súradnicu r . Preto aj riešenie vlnovej rovnice v súradnici s sa bude správať ako riešenie jednorozmernej vlnovej rovnice spomenutej v časti 1.1. Súradnica s sa volá *korytnačia* súradnica a značí sa r_* . Jej nevýhodou je to, že nie je možné jej inverziu ($r(r_*)$) zapísať pomocou bežných matematických funkcií.

Transformácia $\psi = r^{-1} \Phi$ nám vlnovú rovnicu (1.28) ešte viac zjednoduší:

$$-\partial_{tt}^2 \Phi + \partial_{ss}^2 \Phi = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] \Phi \quad (1.32)$$

Odvozenie rovnice (1.32) zo vzťahu (1.28) je podrobnejšie rozpísané v dodatkoch (kapitola 4.1)

Teda konečne máme:

$$\left[-\partial_{tt}^2 + \partial_{r_* r_*}^2 - V_l(r)\right] \Phi_l(r_*, t) = 0 \quad (1.33)$$

kde

$$V_l(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3}\right] \quad (1.34)$$

$$r_* = 2M \left[\frac{r}{2M} + \ln \frac{r}{2M} - 1\right] \quad (1.35)$$

V rovnici (1.34) je takzvaný Regge-Wheelerov potenciál pre skalárne vlny s nulovým spinom. Ďalšou dôležitou skutočnosťou je, že v rovnici (1.33) všetko závisí na *korytnačej* súradnici, okrem potenciálu.

Kapitola 2

Riešenie vlnovej rovnice v zakrivenom priestore

2.1 Počiatkové dáta a ich rozklad

Celá práca je riešená numericky, pretože analytické riešenie by bolo komplikované, ak by vôbec bolo možné ho spočítať. Vyššie uvedená metóda, tzv. separácia vlnovej rovnice v Schwarzschildových súradniciach (1.23), predstavuje možnosť riešiť vlnovú rovnicu ako Cauchyovu úlohu spomenutú v časti 1.1. Ak sa budeme zaoberať axiálne symetrickým problémom, dáva nám separovaný systém dokonca možnosť znížiť výpočetnú náročnosť, pretože členy s $m \neq 0$ z rovnice (1.23) vypadnú.

Na to, aby sme mohli riešiť vlnovú rovnicu (1.33), potrebujeme najprv počiatkové dáta. V tejto práci som zvolil rovinnú vlnu v tvare:

$$\begin{aligned}\Psi(x, y, z, t = 0) &= \sin(\pi z)^2, \quad \text{pre } 10 \leq z \leq 11 \\ \Psi(x, y, z, t = 0) &= 0, \quad \text{pre } z < 10 \wedge z > 11\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\partial_t \Psi(x, y, z, t = 0) = 0\tag{2.2}$$

kde x, y, z sa chápu ako transformované Schwarzschildove súradnice.

Takto zadaný problém totiž pre $M = 0$ vedie na jednodimenzionálny problém opísaný v časti 1.1, ktorého riešením sú dve vlny idúce opačným smerom.

Pre $M \neq 0$ je problém axiálne symetrický. Táto symetria mi navyše dovoľí nezaoberať sa uhlom ϕ (po prechode do sférických súradníc) a teda aj rozklad Ψ budem robiť do Legendrových polynómov a nie do pridružených

Legendrových polynómov. Legendrove polynómy majú tvar

$$P_l(x) = \frac{d}{dx^l}(x^2 - 1)^l \quad (2.3)$$

Sú ortogonálne:

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x)dx = (2l + 1)/2 * \delta_{ll'} \quad (2.4)$$

A platia pre ne nasledujúce vzťahy:

$$P_0(x) = 1 \quad (2.5)$$

$$P_1(x) = x \quad (2.6)$$

$$P_{l+1}(x) = \frac{2l+1}{l+1}xP_l(x) - \frac{l}{l+1}P_{l-1}(x) \quad (2.7)$$

Našou úlohou je teraz zistiť členy $\Psi_l(r)$ v rovnici:

$$\Psi(r, \theta) = \Psi_l(r)P_l(\cos \theta) \quad (2.8)$$

Urobíme to tak ,že rovnicu (2.8) vynásobíme $\int_{-1}^1 P_k(\cos \theta)d \cos \theta$ a odstaneme:

$$\int_{-1}^1 P_k(\cos \theta)P_l(\cos \theta)\Psi_l(r)d \cos \theta = \int_{-1}^1 P_k(\cos \theta)\Psi(r, \theta)d \cos \theta \quad (2.9)$$

A po uvedomení si ortogonalít a prenasobením konštantou na ľavej strane ostane :

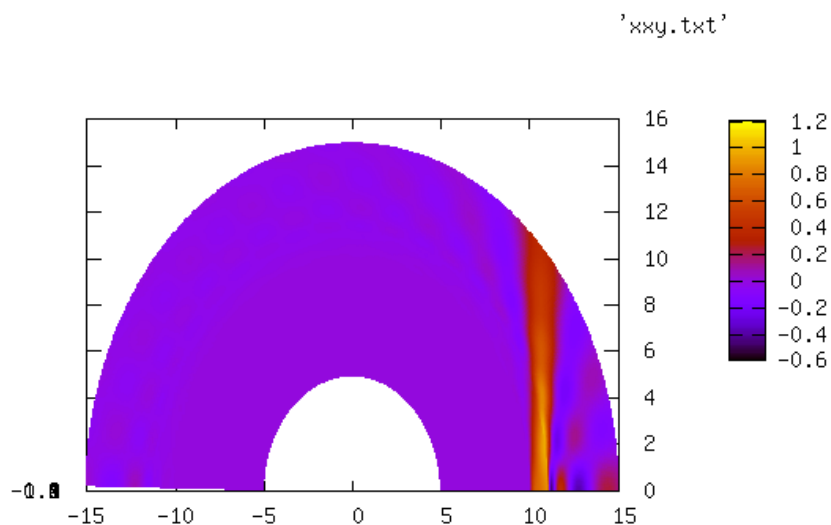
$$\Psi_l(r) = \frac{2k + 1}{2} \int_{-1}^1 P_k(\cos \theta)\Psi(r, \theta)d \cos \theta \quad (2.10)$$

V tomto okamžiku máme analytický predpis pre $\Psi_l(r)$. Zo začiatku som skúšal rozpísať v rovnici (2.10) $P_k(\cos \theta)$ do rady pomocou definičného predpisu (2.3) a potom integrovať príslušnú radu, ale tento prístup fungoval len pre $l < 30$ a potom sa rútil, pretože hodnoty polynómu začali byť obrovské , dokonca aj pre počítač.

Potom som zvolil inú metódu. Integrál (2.10) som rozložil na čiastočné integrácie v menších, rovnako veľkých intervaloch. Keďže $P_l(x)$ má l koreňov, ale nie pravidelne rozložených, tak som zvolil počet intervalov $10l$. Tým som zabezpečil, že v jednotlivých podintervaloch integrujem funkciu, ktorá je dobre aproximovateľná polynómom nízkeho stupňa. A teraz už môžem použiť Gaussovú metódu integrácie, ktorá funguje tak, že daný integrál aproximuje súčtom hodnôt v niekoľkých bodoch s danou váhou. Podrobnosti o

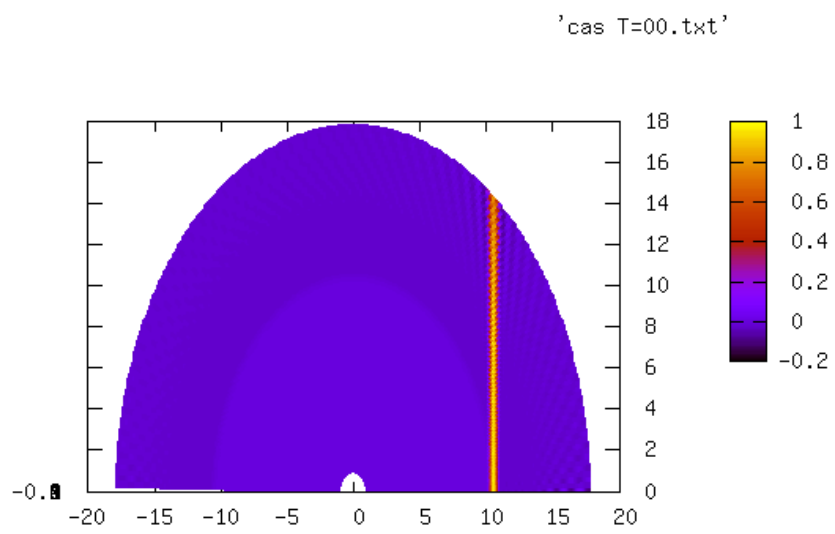
tejto metóde, ako aj body v ktorých je potrebné poznať funkčné hodnoty s príslušnou váhou sú v [3]. Program použitý pri výpočtoch v práci je v dodatkoch, kapitola ?? Na to, aby som spočítal funkčné hodnoty Legendrových polynómov som použil rekurentný vzťah (2.7).

V tomto bode už poznám hodnoty $\Psi_l(r)$. Avšak pre úplne presný výpočet by som potreboval poznať takéto funkcií ∞ veľa. Preto som v tomto momente skladal $\Psi_l(r)$ naspäť pre rôzne hodnoty maximálneho l , L . Na tomto obrázku, kde hodnota L je 25, je vidieť, že to asi nebude stačiť. Na ďalšom



Obrázek 2.1: Ψ poskladané pre $L = 25$

obrázku, $L=100$, je už vidno, že vlna sa už nerozmazáva pre uhly ďalej od z-osi a aj odchýky za vlnou sú viditeľne menšie.



Obrázek 2.2: Ψ poskladané pre $L = 100$

2.2 Numerické riešenie vlnovej rovnice

Najprv opíšem všeobecný postup pri numerickom riešení diferenciálnej rovnice prvého rádu, teda rovnice typu:

$$y' = f(x, y) \quad (2.11)$$

s počiatočnou podmienkou

$$y(x = 0) = y_0 \quad (2.12)$$

Pri numerickom riešení rovnice typu (2.11) postupujeme tak, že vyjdeme z počiatocnej podmienky (2.12) a postupujeme po malých krokoch tak, aby sme spĺňali vzťah pre deriváciu:

$$\frac{y(x + dx) - y(x)}{dx} = y' \quad (2.13)$$

Teda:

$$y(x + dx) = y(x) + dxy' \quad (2.14)$$

A to je podľa (2.11):

$$y(x + dx) = y(x) + dx f(x, y) \quad (2.15)$$

Takže rovnica vyzerá v n-tom kroku:

$$y_{n+1} = y_n + dx f(x_n, y_n) \quad (2.16)$$

Metóda spomenutá vyššie je tzv. Eulerova metóda. Presnejšou metódou je však Runge-Kuttov algoritmus. Funguje na rovnakom princípe, ale počas jedného kroku počíta viac hodnôt. Konkrétne Runge-Kuttov algoritmus štvrtého rádu, ktorý som používal v práci spočíta hodnotu kroku podľa formule:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{dx}{6}(a + 2b + 2c + d) \quad (2.17)$$

kde:

$$a = f(x_n, y_n) \quad (2.18)$$

$$b = f\left(x_n + \frac{dx}{2}, y_n + \frac{dx}{2}a\right) \quad (2.19)$$

$$c = f\left(x_n + \frac{dx}{2}, y_n + \frac{dx}{2}b\right) \quad (2.20)$$

$$d = f(x_n + dx, y_n + dxc) \quad (2.21)$$

pri zadaní typu (2.11).

Moja vlnová rovnica (1.33) sa dá napísať v tvare:

$$\partial_t \Phi_l(r_*, t) = \Pi_l(r_*, t) \quad (2.22)$$

$$\partial_t \Pi_l(r_*, t) = \partial_{r_* r_*}^2 \Phi_l(r_*, t) - V_l(r) \quad (2.23)$$

To sú už ale rovnice ktoré majú tvar (2.11) a preto v ich riešení postupujem nasledovne:

$$\Phi_l(r_*, t_{n+1}) = \Phi_l(r_*, t_n) + dt \Pi_l(r_*, t_n) \quad (2.24)$$

$$\Pi_l(r_*, t_{n+1}) = \Pi_l(r_*, t_n) + dt \partial_{r_* r_*}^2 \Phi_l(r_*, t_n) - V_l(r) \quad (2.25)$$

$\Phi_l(r_*, 0)$ a $\Pi_l(r_*, 0)$ sú počiatkové známe dáta. Samozrejme použijem Runge-Ketteho algoritmus, takže počítam derivácie počas jedného kroku 4-krát. Z rovnice (2.25) je ešte potrebné určiť $\partial_{r_* r_*}^2 \Phi_l(r_*, t)$. To spočítam z rovnice:

$$\partial_{r_* r_*}^2 \Phi_l(r_*, t_n) = \frac{\Phi_l(r_* - dr_*, t_n) - 2\Phi_l(r_*, t_n) + \Phi_l(r_* + dr_*, t_n)}{dr_*^2} \quad (2.26)$$

kde dr_* je krok v súradnici r_* . Keďže rovnica (2.26) potrebuje existenciu okolných bodov, musím zadať vývoj na krajoch. Konštantná hodnota by sa správala ako pevný koniec a to by malo za následok odrazy od krajov. Ak ale predpokladáme, že na hranici vlna odchádza z numericky skúmanej oblasti a nič neprichádza do skúmanej oblasti, teda $f(r, t) = h(r - ct)$, vidíme, že funkcia $f(r, t)$ spĺňa na hranici diferenciálnu podmienku $\partial_t f + c \partial_r f = 0$. Ak prepíšeme túto rovnicu ako evolučnú rovnicu na hranici, kde náš výpočet nemá k dispozícii hodnoty $\Phi_l(r_{pk} + dr)$, na pravom konci dostaneme:

$$\Pi_l(r_{pk}) = \frac{\Phi_l(r_{pk}) - \Phi_l(r_{pk} - dr)}{dr} \quad (2.27)$$

Na ľavom konci, kde chýbajú zase hodonty $\Phi_l(r_{lk} - dr)$ dostaneme:

$$\Pi_l(r_{lk}) = \frac{\Phi_l(r_{lk}) - \Phi_l(r_{lk} + dr)}{dr} \quad (2.28)$$

kde index pk je pre pravý koniec a index lk pre ľavý koniec.

Posledná vec v rovnici (2.25), ktorú ešte nemáme presne určenú je potenciál, pretože závisí nie na *korytnačej* súradnici, ale na *normálnej*. Preto som urobil ďalší program, ktorý počíta $r(r_*)$. Exaktne to nejde, pre $r - 2M$ blízke

nule (tada v okolí horizontu udalostí) transformáciu veľmi presne odhadne funkcia

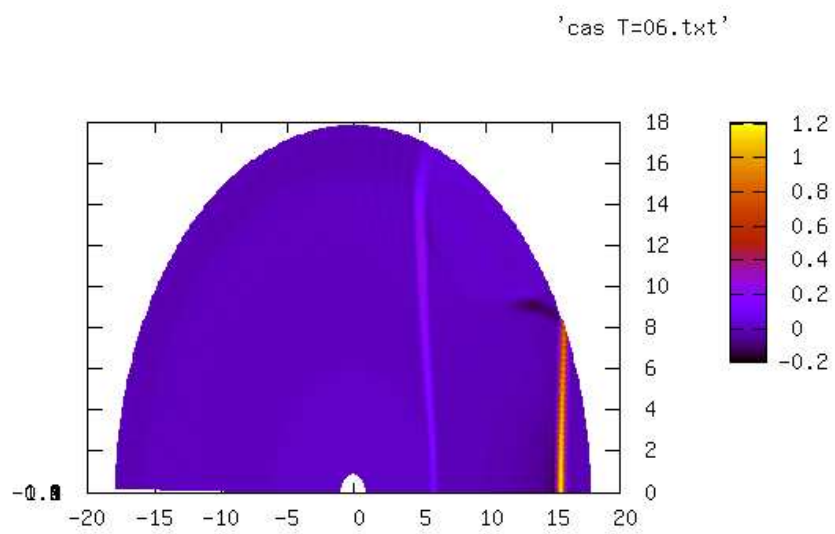
$$2MW\left(\exp\frac{r^*}{2M} - 1\right) \quad (2.29)$$

kde W je funkcia Lambert W . Pre iné r počíta program $r(r^*)$ tak, že začne od pevného r , a aplikuje na neho vzťah (1.35) až kým nenájde správnu hodnotu. Program je uvedený v dodatkoch, kapitola 4.2.

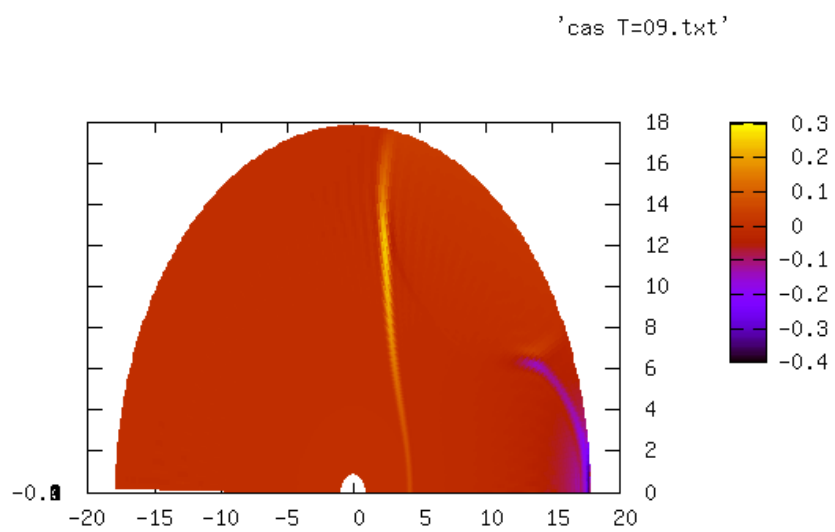
Kapitola 3

Obrázky vlny v okolí čiernej diery v rôznych časoch

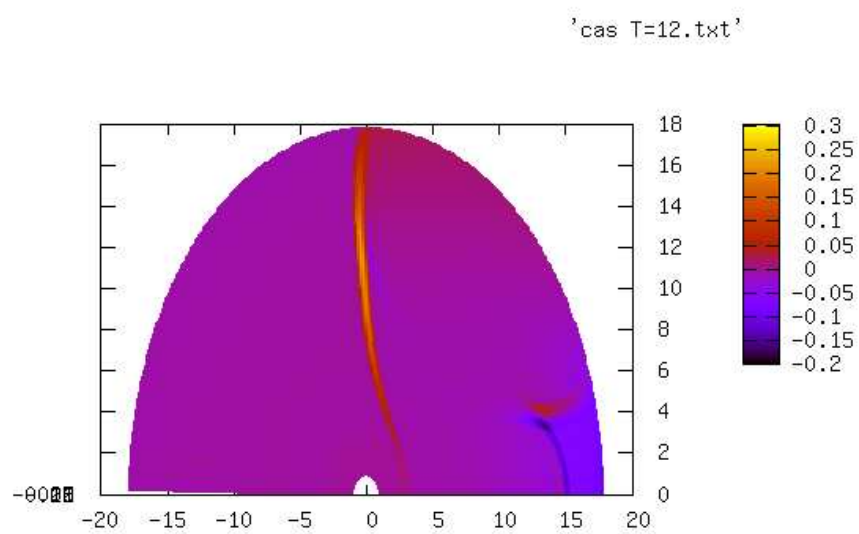
Nasledujúce obrázky sú nakreslené v programe gnuplot, v pm3d móde. Zachytávajú šírenie sa vlny v okolí čiernej diery. Obrázky 3.1 až 3.5 sú v polovine $\vec{x}\hat{z}$, pre $x > 0$, čo zodpovedá prípadu $\phi = 0$, v ktorom je úloha symetrická. Polomer na obrázkoch je $r \doteq 18$. Výpočet prebiehal v *korytnačej* súradnici od -18 do 22. Počet bodov na ktoré bol rozdelený výpočetný priestor je 1000. Vlnovú rovnicu som vyvíjal do času $T = 20$, po časových skokoch $dt = 0.0025$. Keď si obrázky priblížime tak, že budeme pozerat' na priestor do polomeru $r = 5$ (obrázky 3.6 až 3.10), budeme lepšie vidieť efekty okolo čiernej diery. Na obrázkoch môžeme pozorovať, ako vlna dopadá na horizont udalostí, kde z pohľadu vzdialeného pozorovateľa ostáva stáť. Oblasti nad z-tovou osou sa navýjajú na horizont v dôsledku krivosti priestoru, čím sa aj celá vlna zakrivuje. Ak by sme sledovali vývoj rovnice do neskoršieho času, vlna by sa pravdepodne navynula na celý horizont a v oblasti zápornej súradnice z by vlna interferovala sama so sebou.



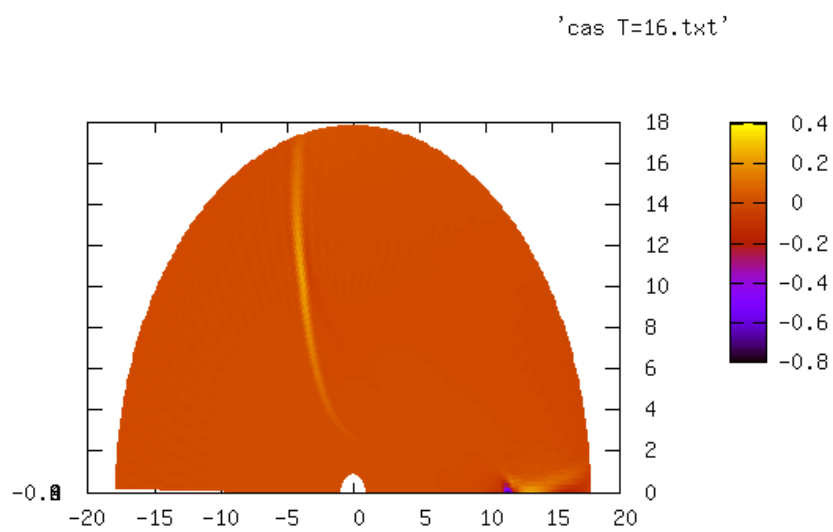
Obrázek 3.1: Čas $T = 6$



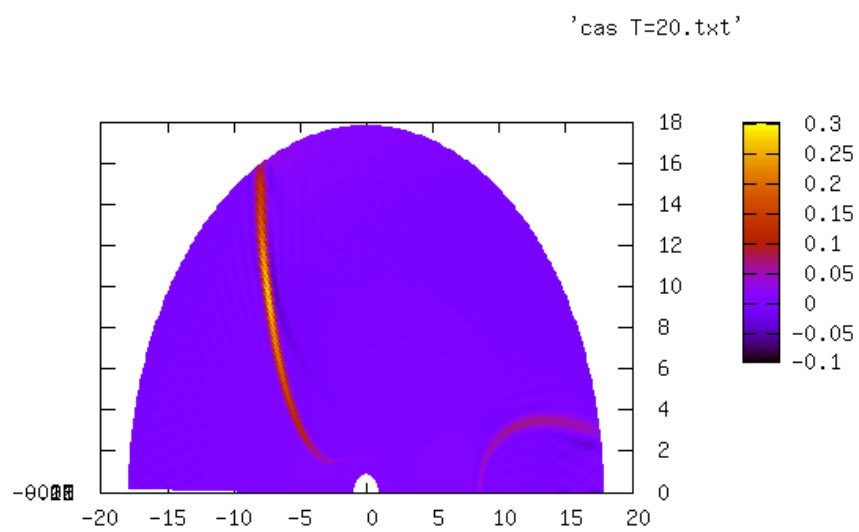
Obrázek 3.2: Čas $T = 9$



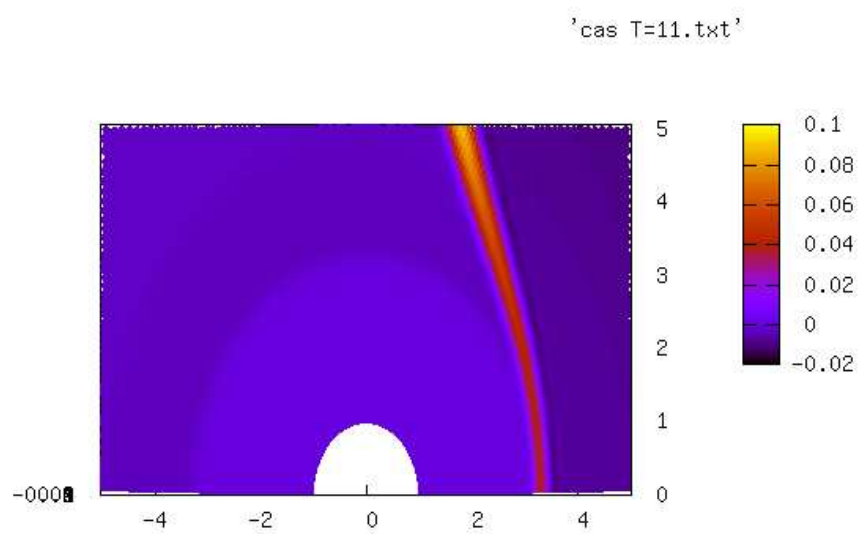
Obrázek 3.3: Čas $T = 12$



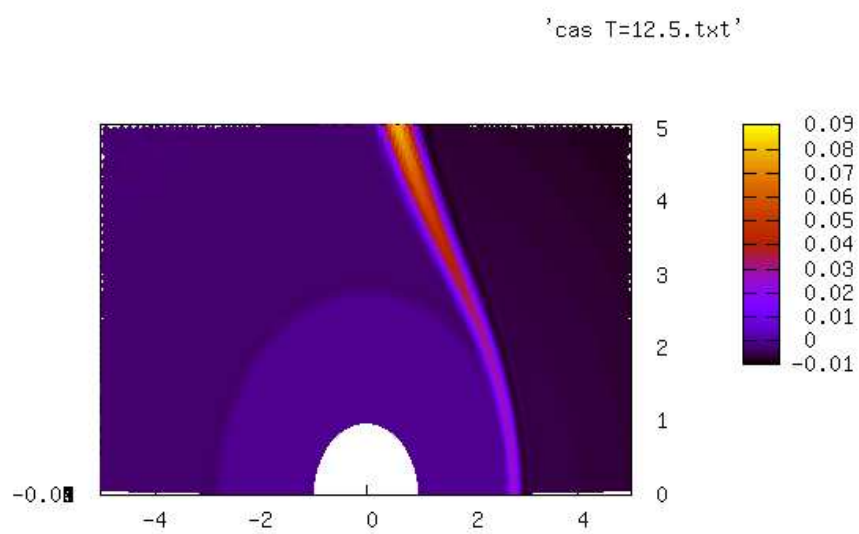
Obrázek 3.4: Čas $T = 16$



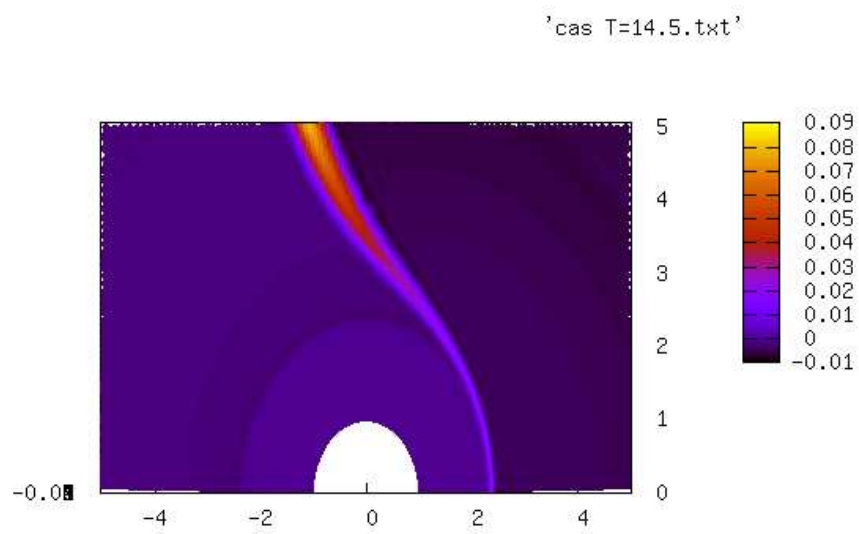
Obrázek 3.5: Čas $T = 20$



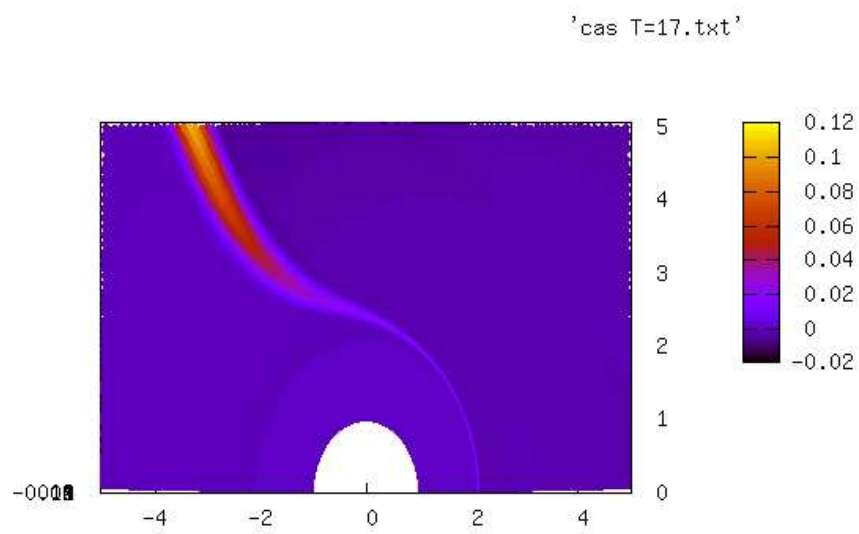
Obrázek 3.6: Čas $T = 11$



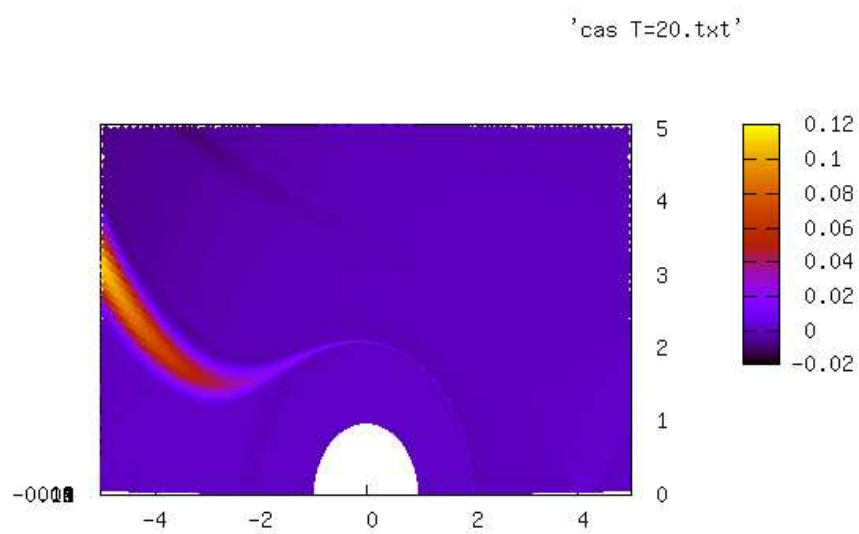
Obrázek 3.7: Čas $T = 12.5$



Obrázek 3.8: Čas $T = 14.5$



Obrázek 3.9: Čas $T = 17$



Obrázek 3.10: Čas $T = 20$

Kapitola 4

Dodatky

4.1 Odvodenie rovnice (1.32) zo vzťahu (1.28)

Do rovnice:

$$-\partial_{tt}^2\psi + \frac{1}{r^2}\partial_s[r^2\partial_s\psi] = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{l(l+1)}{r^2}\psi \quad (4.1)$$

dosadíme $\psi = r^{-1}\Phi$:

$$-\partial_{tt}^2(r^{-1}\Phi) + \frac{1}{r^2}\partial_s[r^2\partial_s(r^{-1}\Phi)] = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{l(l+1)}{r^2}(r^{-1}\Phi) \quad (4.2)$$

$$-\partial_{tt}^2\Phi + \frac{1}{r}\partial_s[r^2\partial_s(r^{-1}\Phi)] = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{l(l+1)}{r^2}\Phi \quad (4.3)$$

$$-\partial_{tt}^2\Phi + \frac{1}{r}\partial_s[-\Phi\partial_sr + r\partial_s\Phi] = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{l(l+1)}{r^2}\Phi \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} -\partial_{tt}^2\Phi + \frac{1}{r}[-\partial_s\Phi\partial_sr - \Phi\partial_{ss}^2r + \partial_sr\partial_s\Phi + r\partial_{ss}^2\Phi] = \\ = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{l(l+1)}{r^2}\Phi \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$-\partial_{tt}^2\Phi - \frac{1}{r}\Phi\partial_{ss}^2r + \partial_{ss}^2\Phi = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{l(l+1)}{r^2}\Phi \quad (4.6)$$

$$-\partial_{tt}^2\Phi + \partial_{ss}^2\Phi = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{l(l+1)}{r^2}\Phi + \frac{1}{r}\Phi\partial_{ss}^2r \quad (4.7)$$

A z toho:

$$-\partial_{tt}^2\Phi + \partial_{ss}^2\Phi = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3}\right]\Phi \quad (4.8)$$

4.2 Program na počítanie transformácie $r(r_*)$

```
#include <conio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <dos.h>

#define M 1

//funkciu lambertW je možné nájsť v [3]
double lambertW(double x)
{
double y = (x>2) ? log(x):(x/2);
double dy,ey;
#define Leps 1E-15
do { ey=exp(y);
dy=(1+y)*ey;
dy=-(y*ey-x)/dy;
y=y+dy; }
while(fabs(dy/(y+1E-200))>Leps);
return(y);
}

//Toto je funkcia, ktorá počíta  $r(r_*)$ , ale táto časť funguje presne len pre
 $r - 2M$  blízke nule.
double rho2ra(double rho)
{
return(2*M*lambertW(exp(rho/2/M-1))+1);
}

//Toto je len rovnica (1.35), teda predpis  $r_*(r)$ 
double r2rho(double r)
{
return(r+2*M*log(r/2/M-1));
}

//Táto funkcia už počíta  $r(r_*)$  pre všetky  $r_*$ . Pre veľké r najprv odhadne
```

hodnotu, a potom k nej stúpa.

```
double rho2rb(double rho)
{
double s,x,dx,acc;
x=1E+16;
acc=0.01;
if(rho>=4*M) dx=0.0001;
if(rho<4*M) dx=0.00001;
if(rho<-0.5) dx=0.000005;
if(rho<-2.0) dx=0.000001;
s=M;
if(rho>=-15.0)
{
while(abs(x-rho)>acc)
{
x=r2rho(s);
s=s+dx;
}
return(s); }
if(rho<-15.0) return(rho2ra(rho));
}
//Pre zvolené  $r_*$  vráti program hodnotu  $r(r_*)$ 
int main()
{
double x;
x=7.53;
printf("%lf",rho2rb(x));
getch();
}
```

4.3 Program na počítanie integálov Gaussovou metódou

Tento program počíta integál (2.10) v danom bode a pre dané l , kde $\Psi(r)$ je počiatočná podmienka (2.1 a 2.1)

```
#include <conio.h>
#include <math.h>
```

```

#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <dos.h>

const double pi=3.14159265358979323846264;

//funkcia ktorá spočíta hodnotu l-tého Legendrovho polynómu v danom
bode

    double fcia(double x,int l)
    {
double velkepole[1000],z;
int i;
for(i=0;i<(l+1);i++) velkepole[i]=0;
velkepole[0]=1;
velkepole[1]=x;
for(i=2;i<(l+1);i++)
    {
z=i;
velkepole[i]=(2*z-1)/z*x*velkepole[i-1]-(z-1)/z*velkepole[i-2];
    }
return(velkepole[l]);
    }

//Táto funkcia počíta integrál z dopredu danej funkcie na zadanom in-
tervale
double GaussQuad(double r,double medza1,double medza2,int l)
{
double x[5],c[5],s;
double ce,em;
int i;
ce=0.5*(medza2+medza1);
em=0.5*(medza2-medza1);
s=0;
//Body (x) v ktorých sa počíta funkčná hodnota s príslušnou váhou (c)
x[0]=0.148874338981631;
x[1]=0.433395394129247;
x[2]=0.679409568299024;
x[3]=0.865063366688985;

```



```

x[4]=0.973906528517172;
c[0]=0.295524224714753;
c[1]=0.269266719309996;
c[2]=0.219086362515982;
c[3]=0.149451349150581;
c[4]=0.066671344308688;

```

```

    for(i=0;i<5;i++)
    {
s=s+fcia((ce+em*x[i]),l)*c[i]*sin(r*(ce+em*x[i]))*sin(r*(ce+em*x[i]));
s=s+fcia((ce-em*x[i]),l)*c[i]*sin(r*(ce-em*x[i]))*sin(r*(ce-em*x[i]));
    }
s=em*s;
return(s);
}

```

//Táto funkcia rozdelí celý interval na kúsky a zavolá funkciu, ktorá spočíta integrál na danom kúsku

```
doublevysledok(double r,double medza1,double medza2,int l)
```

```

{
int i;
double s,pocet;
s=0;
pocet=10*l;
for(i=0;i<pocet;i++)
{
s=s+GaussQuad(r,medza1+i*(-medza1+medza2)/pocet,medza1+(-medza1+medza2)*(i+1)/pocet);
}
return(s);
}

```

//zahrnutie podmienok (2.1 a 2.1)

```
double defvysledok(double r,int l)
```

```

{
if(r>11) return(vysledok(r,10/r,11/r,l));
if(r<10) return(0);
return(vysledok(r,10/r,1,l));
}

```

```
int main()
{
int l;
double s;
s=10.5;
l=25;
printf("%.16lf %d ",defvysledok(z,l),l);
getch();
return(1);
}
```

Literatura

- [1] Misner, Thorne, Wheeler: *Gravitation*, Freeman, 1973.
- [2] Friedlander: *The Wave Equation on a Curved space-Time*, Cambridge University Press, 1975
- [3] Press et al: *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 1992
- [4] Valery Tenyotkin: Scalar Waves on Schwarzschild background, UNC Chapel Hill