Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Robert Švarc

Geometrická formulace Hamiltonovy mechaniky

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jiří Podolský, CSc.
Studijní program: Fyzika, obecná fyzika

2006

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu své bakalářské práce panu doc. RNDr. Jiřímu Podolskému, CSc. za vstřícný přístup, cenné rady a inspirující náměty k mé práci.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 9. května 2006 Robert Švarc

Obsah

Název práce: Geometrická formulace Hamiltonovy mechaniky
Autor: Robert Švarc
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jiří Podolský, CSc.
e-mail vedoucího: Jiri.Podolsky@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme geometrickou formulaci Hamiltonovy mechaniky. Nejprve se zabýváme situací, kdy hamiltonián nezávisí na čase. V tomto případě je příslušnou geometrickou arénou $2n$-dimenzionální symplektická varieta. Následně připouštíme časově závislé hamiltoniány a přecházíme na $2n + 1$ dimenzionální rozšířený fázový prostor. Vývoj mechanického systému je v obou případech určen integrálními křivkami vektorového pole, které je dáno Hamiltonovými kanonickými rovnicemi. Pro oba případy rovněž zavádíme kanonické transformace. Na závěr geometicky interpretujem Hamiltonovu-Jacobiho rovnici.

Klíčová slova: Hamiltonovy rovnice, (rozšířený) fázový prostor, kanonické transformace

Title: Geometric formulation of Hamiltonian mechanics
Author: Robert Švarc
Department: Institute of Theoretical Physics
Supervisor: Doc. RNDr. Jiří Podolský, CSc.
Supervisor's e-mail address: Jiri.Podolsky@mff.cuni.cz

Abstract: In this work we study geometric formulation of Hamiltonian mechanics. At the beginning we look at situation, when the Hamiltonian function is time-independent. In this case our geometric arena is the $2n$-dimensional symplectic manifold. After that we suppose time-dependent Hamiltonian function and we use $2n + 1$ dimensional extended phase space. Evolution of the mechanical system is given by integral curves of the vector field, which is determined by Hamilton's canonical equations. We also construct canonical transformations in both cases. In the end of this work we show geometric interpretation of the Hamiton-Jacobi equation.

Keywords: Hamilton's equations, (extended) phase space, canonical transformations

Úvod

Teoretickou mechaniku v Hamiltonově[1] formulaci je možné považovat za jeden z vrcholů klasické fyziky. Principy této konstrukce se následně uplatnily v dalších oborech moderní fyziky například v kvantové mechanice a statistické fyzice.

Na tuto klasickou kapitolu mechaniky lze nahlédnout rovněž očima moderního matematického aparátu diferenciální geometrie. Takový pohled nám dovoluje oprostit se od konkrétních souřadnic a následně zapsat pohybové rovnice pouze jako vztah mezi invariantními geometrickými objekty žijícími na jisté varietě. Tento zápis je nejen elegantní, ale dovoluje rovněž získat jistou „intuitivní“ představu o popisu a vývoji fyzikálního systému.

Předložená práce navazuje na studijní text [1] k nově zavedenému Prosemináři teoretické fyziky (TMF069), na jehož tvorbě jsem se typograficky podílel. Význam tohoto prosemináře spočívá nejen v prohloubení znalostí z teoretické mechaniky, ale také v seznámení se s aparátem diferenciální geometrie následně užívaným například k formulaci obecné teorie relativity nebo kalibračních teorií pole.

Kapitola 1 této bakalářské práce odpovídá Kapitole 3 zmíněného studijního textu. Následující dvě kapitoly jsou původní. Problematika rozebraná v těchto částech bakalářské práce je obsažena například v knihách [2]-[8].

[1] William Rowan Hamilton, 1805 Dublin - 1865 Dublin

Kapitola 1

Zavedení formalismu bezčasové Hamiltonovy mechaniky

V této kapitole zavedeme základní geometrické pojmy, pomocí nichž lze formulovat Hamiltonovu mechaniku. Ukážeme, že přechod od Lagrangeovy k Hamiltonově formulaci mechaniky odpovídá Legendreově duální transformaci mezi tečným bandlem $\mathrm{T}\mathcal{Q}$ a kotečným bandlem $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$ konfigurační variety $\mathcal{Q}$. Poté ukážeme, že přirozenou arénou Hamiltonovy mechaniky je fázový prostor, který je vybaven symplektickou strukturou, to znamená, že na něm existuje symplektická 2-forma $\boldsymbol{\omega}$. Hamiltonovy rovnice mají tvar $\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}H$, což je geometrická rovnice pro hamiltonovské vektorové pole $\mathbf{X}$, jehož integrální křivky $\gamma(t)$ určují vývoj systému ve fázovém prostoru. Ukážeme také geometrický význam Poissonových závorek a kanonických transformací.

1.1 Legendreova duální transformace

Velmi stručně řečeno, z geometrického hlediska můžeme oba zásadní přístupy k mechanice — Lagrangeův a Hamiltonův — shrnout takto:

Lagrange: klíčová je funkce L na $\mathrm{T}\mathcal{Q}$, což je tečný bandl variety $\mathcal{Q}$,
Hamilton: klíčová je funkce H na $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$, což je kotečný bandl variety $\mathcal{Q}$.

Oba fíbrované prostory $\mathrm{T}\mathcal{Q}$ a $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$ jsou dobré nosiče dynamiky, neboť *separují trajektorie vývoje*, to znamená, že každým jejich bodem prochází právě jedna křivka vývoje $\gamma(t)$.

Přechod $\dot{q}^j \to p_j$, jak ho známe z klasických učebnic teoretické mechaniky, není pouhá „změna souřadnic“ na tečném bandlu T$\mathcal{Q}$, ale je to (lokální souřadnicová) reprezentace zobrazení

$$\mathrm{T}\mathcal{Q} \to \mathrm{T}^*\mathcal{Q} \ , \tag{1.1}$$

tedy identifikace vektoru $\mathbf{v}$ v bodě P (se složkami $\dot{q}^j$) s odpovídající 1-formou $\boldsymbol{\Theta}$ v tomtéž bodě P (se složkami p_j).

Obecněji: záměna $L \leftrightarrow H$ odpovídá zobrazení T$\mathcal{Q}$ $\leftrightarrow$ T$^*\mathcal{Q}$ identifikující $\dot{q}^j \leftrightarrow p_j$ pomocí vztahů

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \ , \qquad \dot{q}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \ . \tag{1.2}$$

Schematicky tedy platí

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & \\ & \uparrow L & & \uparrow H & \\ (q^j,\dot{q}^j) = Z \in & \mathrm{T}\mathcal{Q} & \longleftrightarrow & \mathrm{T}^*\mathcal{Q} & \ni Z^* = (q^j, p_j) \\ & \searrow \pi & & \pi \swarrow & \\ & & (q^j) = P \in \mathcal{Q} & & \end{array}$$

Vztah $L(q^j, \dot{q}^j) \leftrightarrow H(q^j, p_j)$ je přitom explicitně dán známým výrazem

$$H(q^j, p_j) \equiv p_i \dot{q}^i(q^j, p_j) - \widetilde{L}(q^j, p_j) \ , \tag{1.3}$$

kde $\widetilde{L}(q^j, p_j)$ je funkce $L(q^i, \dot{q}^i)$, v níž je dosazeno $\dot{q}^i(q^j, p_j)$ inverzí $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}$, viz (1.2).

Geometrická názorná interpretace vztahu mezi L a H

Pro jednoduchost uvažujme jen dimenzi $n = 1$ a potlačme psaní q (budeme však i nadále psát parciální derivace).

Mějme tedy libovolnou funkci $L(v)$ a po vzoru (1.3) zaveďme novou funkci

$$H(p) = p\, v(p) - L(v(p)) \ , \tag{1.4}$$

kde

$$p(v) = \frac{\partial L}{\partial v} \ . \tag{1.5}$$

Lagrangeův a Hamiltonův popis je pak ekvivalentní vyjádření téhož grafu.

- buď dvojicí $(v, L) \equiv$ („osa x“, „osa y“),
- nebo dvojicí $(p, H) \equiv$ („směrnice přímky“, „−absolutní člen přímky“).

Opravdu: Obecná přímka je tvaru $y = kx + q$, zde tedy $L(v_0) = p_0 v_0 - H(p_0)$, neboli $H(p_0) = p_0 v_0 - L(v_0)$. Funkce $L(v)$ je proto *obalová křivka tečen* parametrizovaných dvojicí $(p, H(p))$.

Funkce $L(v)$ a $H(p)$ jsou ekvivalentní, neboť naopak platí

$$L(v) = p(v)v - H(p(v)) \ . \tag{1.6}$$

Opravdu, z (1.4) plyne

$$\frac{\partial H}{\partial p} = v(p) + p\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p} \ . \tag{1.7}$$

Protože ale $\frac{\partial L}{\partial v} = p$, dostáváme

$$v(p) = \frac{\partial H}{\partial p} \ . \tag{1.8}$$

Poznámky:

- přechod $L \leftrightarrow H$ daný vztahem (1.4) funguje dobře, dokud se v grafu neobjeví inflexní bod; je tedy regulární jen v bodech, kde $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v} = \frac{\mathrm{d}^2 L}{\mathrm{d}v^2} \neq 0$
- obecně lze Legendreovu transformaci (1.3) užít pokud je hessián $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}\right) \neq 0$

Další důsledky Legendreovy duality:

Legendreovým obrazem Lagrangeovy 1-formy $\boldsymbol{\theta}_L$ definované na $\mathrm{T}\mathcal{Q}$ (přesněji $\boldsymbol{\theta}_L \in \mathrm{T}^*(\mathrm{T}\mathcal{Q})$) vztahem

$$\boldsymbol{\theta}_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\mathbf{d}q^j \tag{1.9}$$

je významná Cartanova 1-forma $\boldsymbol{\theta}_0$:

Definice: *kanonická Cartanova 1-forma* $\boldsymbol{\theta}_0$ na $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$ (přesněji $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathrm{T}^*(\mathrm{T}^*\mathcal{Q})$) je definována vztahem

$$\boldsymbol{\theta}_0 = p_j \mathbf{d}q^j \ . \tag{1.10}$$

Její geometrická důležitost spočívá v tom, že

- existuje globálně na celém $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$
- nezávisí na konkrétní funkci L
- je jednoznačně a přirozeně určena fíbrovanou strukturou kotečného bandlu $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$

Podobně lze Legendreovu dualitu aplikovat i na integrální křivky dynamickéko vektorového pole $\mathbf{X} \equiv \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}$ určují vývoj daného systému. V Lagrangeově formalismu na $\mathrm{T}\mathcal{Q}$ je

$$\mathbf{X}_L = \dot{q}^j \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^j} + W^j(q^i, \dot{q}^i) \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} \dot{q}^j} \ , \tag{1.11}$$

kde $W^j(q^i, \dot{q}^i)$ je kontrétní (obvykle složitá) funkce daná Lagrangeovými pohybovými rovnicemi viz [1] strana 24.
Naproti tomu ve formalismu Hamiltonově na $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$ platí

$$\mathbf{X}_H = \frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^j} + \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_j} \ , \tag{1.12}$$

kde $\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t}$ a $\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t}$ jsou určeny Hamiltonovými kanonickými rovnicemi $\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ a $\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q^j}$, tedy

$$\mathbf{X}_H = \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_j} \ . \tag{1.13}$$

Na $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$ je proto vývoj systému určen trajektoriemi $(q^j(t), p_j(t))$, což jsou integrální křivky přirozeného vektorového pole $\mathbf{X}_H = (\frac{\partial H}{\partial p_j}, -\frac{\partial H}{\partial q^j})$.

1.2 Jednotné souřadnice na $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$ a symplektická matice

Je výhodné zavést *jednotné značení lokálních souřadnic* na kotečném bandlu $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$ dimenze $2n$ vztahem

$$(z^1, \ldots, z^n, z^{n+1}, \ldots, z^{2n}) \equiv (q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n) \ , \tag{1.14}$$

tedy

$$\begin{aligned} z^j &= q^j \ , \\ z^{j+n} &= p_j \ , \qquad j = 1, \ldots, n \ . \end{aligned} \tag{1.15}$$

Prvních n parametrů představuje zobecněné souřadnice, zatímco druhá n-tice parametrů jsou odpovídající kanonicky sdružené hybnosti. Potom je možné Hamiltonovy kanonické rovnice přepsat do podoby

$$\dot{z}^\beta = \frac{\partial H}{\partial z^{\beta+n}} \ , \qquad \beta = 1, \ldots, n \ , \tag{1.16}$$

$$\dot{z}^\beta = -\frac{\partial H}{\partial z^{\beta-n}} \ , \qquad \beta = n+1, \ldots, 2n \ . \tag{1.17}$$

Oba výrazy jsou stejné až na znaménka. Nabízí se proto zavést tzv. *symplektickou matici* $\omega_{\alpha\beta}$ typu $2n\times 2n$, jejíž prvky jsou 0, +1 nebo -1 dle „blokového“ předpisu

$$\omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \text{-I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{1.18}$$

kde I je jednotková matice typu $n \times n$, $\mathrm{I} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$. Inverzní matice k $\omega_{\alpha\beta}$ je zjevně

$$\omega^{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \text{-I} & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{1.19}$$

neboť $\omega_{\alpha\beta}\omega^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$, neboli

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{-I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \text{-I} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} \ . \tag{1.20}$$

Je vidět, že obě matice $\omega_{\alpha\beta}$ a $\omega^{\alpha\beta}$ jsou antisymetrické,

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}, \qquad \omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha} \ , \tag{1.21}$$

a že jsou navzájem transponované.

Užitím jednotných souřadnic a symplektické matice mají *Hamiltonovy kanonické rovnice* (1.16), (1.17) na $T^*\mathcal{Q}$ jednotný tvar

$$\omega_{\alpha\beta}\, \dot{z}^\beta = \frac{\partial H}{\partial z^\alpha} \ , \tag{1.22}$$

neboli naopak

$$\dot{z}^\beta = \omega^{\beta\alpha}\, \frac{\partial H}{\partial z^\alpha} \ . \tag{1.23}$$

Snadno se přesvědčíme, že například $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = n+1$, tedy $z^\beta = z^{n+1} = p_1$, takže

$$\omega_{1\beta}\dot{z}^\beta = \frac{\partial H}{\partial z^1} \quad \Leftrightarrow \quad -\dot{p}_1 = \frac{\partial H}{\partial q^1} \qquad \text{atd.}$$

Podobně lze pomocí symplektické matice vyjádřit:

- *dynamické vektorové pole* (1.12), (1.13)

$$\mathbf{X}_H = \dot{z}^\beta \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} z^\beta} = \omega^{\beta\alpha} \frac{\partial H}{\partial z^\alpha} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} z^\beta} \tag{1.24}$$

- *Poissonovu závorku* $\{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial q^j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q^j}$

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial z^\beta}\, \omega^{\beta\alpha}\, \frac{\partial g}{\partial z^\alpha} \tag{1.25}$$

  Speciálně pro $f = z^\beta$ a $g = z^\alpha$ dostáváme *fundamentální Poissonovy závorky* tj.

$$\{z^\beta, z^\alpha\} = \omega^{\beta\alpha} \ , \tag{1.26}$$

  neboli v obvyklých kanonicky sdružených proměnných

$$\begin{aligned} \{q^j, q^k\} &= 0 \ , \qquad & \{q^j, p_k\} &= \delta^j_k \ , \\ \{p_j, p_k\} &= 0 \ , \qquad & \{p_j, q^k\} &= -\delta^k_j \ . \end{aligned} \tag{1.27}$$

1.3 Geometrická podoba Hamiltonových rovnic

Nyní postoupíme dále v geometrické formulaci Hamiltonovy mechaniky. Ukazuje se totiž, že symplektickou matici $\omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \text{-I} \\ \text{I} & 0 \end{pmatrix}$ lze chápat jako souřadnicové složky symplektické 2-formy $\boldsymbol{\omega}$ na kotečném bandlu $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$. Právě tato symplektická forma $\boldsymbol{\omega}$ tvoří centrální geometrický pojem hamiltonovského přístupu.

Definice: *symplektická forma* je 2-forma $\boldsymbol{\omega}$, která je

- uzavřená ... $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = 0$
- nedegenerovaná ... $\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X} = 0$

Přenásobením obou stran Hamiltonových kanonických rovnic (1.22) bázovou 1-formou $\mathbf{d}z^\alpha$ a vysčítáním přes α dostáváme vztah

$$\omega_{\alpha\beta}\, \dot{z}^\beta \mathbf{d}z^\alpha = \frac{\partial H}{\partial z^\alpha}\mathbf{d}z^\alpha \ , \tag{1.28}$$

kde $\omega_{\alpha\beta}$ jsou složky 2-formy $\boldsymbol{\omega}$ a $\dot{z}^\beta$ jsou složky dynamického vektorového pole $\mathbf{X}$ příslušejícího H, viz (1.24). Jak je vidět z $(\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega})_\alpha = \omega_{\alpha\beta}X^\beta$ a $\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} = (\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega})_\alpha \mathbf{d}z^\alpha$, celá levá strana odpovídá 1-formě, jež vzniká vložením dynamického vektorového pole $\mathbf{X}$ do symplektické 2-formy $\boldsymbol{\omega}$. Pravá strana je 1-forma $\mathbf{d}H$, tedy diferenciál Hamiltonovy funkce. Vztah (1.28) vyjadřuje vztah mezi 1-formami, který můžeme oprostit od konkrétních souřadnic na $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$.

Hamiltonovy kanonické rovnice v čistě geometrické řeči tedy mají velmi elegantní tvar

$$\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}H \ . \tag{1.29}$$

Vyjádřeno slovy, vývoj systému je určen integrálními křivkami takového vektorového pole $\mathbf{X}$, které vložením do symplektické 2-formy $\boldsymbol{\omega}$ dá právě diferenciál dané Hamiltonovy funkce.

1.4 Fázový prostor coby symplektická varieta

Nyní je klíčové si uvědomit, že na fázovém prostoru[1] je symplektická forma $\boldsymbol{\omega}$ *přirozeně* definovaná, a to vztahem

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}\boldsymbol{\theta}_{0} \ , \tag{1.30}$$

kde $\boldsymbol{\theta}_0$ je kanonická Cartanova forma, zavedená výrazem (1.10). Explicitně v souřadnicích na $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$ tedy platí

$$\boldsymbol{\theta}_{0} = p_j \, \mathbf{d}q^j \ , \tag{1.31}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j \ . \tag{1.32}$$

Ověření:

- uzavřenost $\boldsymbol{\omega}$ plyne přímo z (1.30) a vlastnosti $\mathbf{d}^2 = 0$:
  $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}(\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{d}^2\boldsymbol{\theta}_0 \equiv 0$
- z definice vnější derivace 1-formy plyne
  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{d}(p_j\mathbf{d}q^j) \equiv \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j$
- ve složkách je (1.31) explicitně

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 + \ldots + \mathbf{d}p_n \wedge \mathbf{d}q^n = -\mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}p_1 - \ldots - \mathbf{d}q^n \wedge \mathbf{d}p_n \\ &= -\mathbf{d}z^1 \wedge \mathbf{d}z^{n+1} - \ldots - \mathbf{d}z^n \wedge \mathbf{d}z^{2n} \ , \end{aligned} \tag{1.33}$$

  takže srovnáním s $\boldsymbol{\omega} = \sum_{\alpha<\beta} \omega_{\alpha\beta} \, \mathbf{d}z^\alpha \wedge \mathbf{d}z^\beta$ dostáváme $\omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \text{-I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}$, což je právě symplektická matice (1.18).

- protože

$$\det(\omega_{\alpha\beta}) = \det \begin{pmatrix} 0 & \text{-I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \ , \tag{1.34}$$

  inverzní matice $\omega^{\beta\alpha}$ existuje, a proto je 2-forma $\boldsymbol{\omega}$ nedegenerovaná

⊠

[1] Pod fázovým prostorem zde rozumíme kotečný bandl $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$. Později ale ukážeme (viz kapitola 1.8 věnovaná kanonickým transformacím), že specifickou fíbrovanou strukturu $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$ lze ve skutečnosti ignorovat, a proto již na tomto místě zavádíme obecnější pojem fázového prostoru.

Forma (1.30), tedy explicitně (1.32), je tudíž opravdu symplektická.

Symplektická forma $\boldsymbol{\omega}$ je důležitá především tím, že *konvertuje vektory na 1-formy*.

Nechť je $\mathbf{X}$ vektor a $\boldsymbol{\sigma}$ je jemu přiřazená 1-forma, pak lze symbolicky psát:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \overset{\boldsymbol{\omega}^\flat}{\underset{\boldsymbol{\omega}^\sharp}{\rightleftarrows}} & \boldsymbol{\sigma} \\ \pitchfork & & \pitchfork \\ \mathrm{T}_P\mathcal{M} & & \mathrm{T}^*_P\mathcal{M} \end{array}$$

kde jsme označili[2] zobrazení z vektorů do 1-forem jako $\boldsymbol{\omega}^\flat$, a naopak zobrazení z 1-forem do vektorů jako $\boldsymbol{\omega}^\sharp$, tedy

$$\boldsymbol{\omega}^\flat : \quad \mathbf{X} \to \boldsymbol{\sigma} : \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\omega}^\flat(\mathbf{X}) \equiv \boldsymbol{\omega}(\bullet, \mathbf{X}) \equiv \mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} \tag{1.35}$$

$$\boldsymbol{\omega}^\sharp : \quad \boldsymbol{\sigma} \to \mathbf{X} : \quad \mathbf{X} = \boldsymbol{\omega}^\sharp(\boldsymbol{\sigma}) \ , \tag{1.36}$$

kde $\boldsymbol{\omega}^\sharp$ je inverzní k $\boldsymbol{\omega}^\flat$. Vztah mezi $\mathbf{X}$ a $\boldsymbol{\sigma}$ je přitom jednoznačný díky nedegenerovanosti $\boldsymbol{\omega}$.

Platí tedy:

- složení $\boldsymbol{\omega}^\flat$ a $\boldsymbol{\omega}^\sharp$ je identita:

$$\boldsymbol{\omega}^\flat\boldsymbol{\omega}^\sharp = \text{identita} = \boldsymbol{\omega}^\sharp\boldsymbol{\omega}^\flat \tag{1.37}$$

- ve složkách platí

$$\sigma_\alpha = \omega_{\alpha\beta}X^\beta \tag{1.38}$$

$$X^\beta = \omega^{\beta\alpha}\sigma_\alpha \tag{1.39}$$

- specielně na $\mathrm{T}^*\mathcal{Q}$ s přirozenými souřadnicemi (q^j, p_j) máme

$$\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^j} \quad {}^\sharp\!\longleftrightarrow{}^\flat \quad \mathbf{d}p_j \tag{1.40}$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_j} \quad {}^\sharp\!\longleftrightarrow{}^\flat \quad -\mathbf{d}q^j \tag{1.41}$$

[2] Značení odpovídá běžné hudební notaci: „béčko ♭“ snižuje tóny, zatímco „křížek ♯“ tóny zvyšuje, což je analogické tomu, že složky vektorů, které mají horní indexy, přecházejí na složky 1-forem, které píšeme s indexy dole, viz (1.38), (1.39).

Díky této symbolice můžeme Hamiltonovy kanonické rovnice (1.29) $\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}H$ přepsat do podoby

$$\boldsymbol{\omega}^{\flat}(\mathbf{X}) = \mathbf{d}H \ , \tag{1.42}$$

neboli

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\omega}^{\sharp}(\mathbf{d}H) \ . \tag{1.43}$$

To je *explicitní* výraz pro dynamické vektorové pole $\mathbf{X}$, které jednoznačně určuje vývoj systému pro danou Hamiltonovu funkci H.

Obecně se pomocí symplektické formy $\boldsymbol{\omega}$ zavádí tzv. hamiltonovské vektorové pole, které je přiřazeno *libovolné* funkci f na fázovém prostoru.

Definice: *hamiltonovské vektorové pole* $\mathbf{X}_f$ vůči dynamické proměnné f je taková pole, že

$$\mathrm{i}_{\mathbf{X}_f}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}f \ , \tag{1.44}$$

neboli

$$\mathbf{X}_f = \boldsymbol{\omega}^{\sharp}(\mathbf{d}f) \ , \tag{1.45}$$

neboli

$$\boldsymbol{\omega}(\bullet, \mathbf{X}_f) = \mathbf{d}f \ . \tag{1.46}$$

Přiřazení vektorového pole $\mathbf{X}_f$ funkci f je jednoznačné. Zdaleka ne každé pole je ale hamiltonovské.

1.5 Poissonovy závorky geometricky

Symplektická forma $\boldsymbol{\omega}$ je úzce svázána s Poissonovými závorkami, neboť *geometrická podoba Poissonových závorek* je

$$\{f, g\} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_f) = -\boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g) \ , \tag{1.47}$$

kde $\mathbf{X}_g$ je Hamiltonovské pole vůči g, zatím co $\mathbf{X}_f$ je Hamiltonovské pole vůči f.

Důkaz: Nechť dle (1.44)

$$\mathbf{X}_g = \boldsymbol{\omega}^{\sharp}(\mathbf{d}g) \ , \qquad \mathbf{X}_f = \boldsymbol{\omega}^{\sharp}(\mathbf{d}f) \ , \tag{1.48}$$

neboli ve složkách, viz (1.39),

$$X_g^{\beta} = \omega^{\beta\alpha}\frac{\partial g}{\partial z^{\alpha}} \ , \qquad X_f^{\gamma} = \omega^{\gamma\delta}\frac{\partial f}{\partial z^{\delta}} \ . \tag{1.49}$$

Pak s využitím (1.25)

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_f) = \omega_{\beta\gamma} X_g^\beta X_f^\gamma = \omega_{\beta\gamma}\omega^{\gamma\delta}\frac{\partial f}{\partial z^\delta}\omega^{\beta\alpha}\frac{\partial g}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial z^\beta}\omega^{\beta\alpha}\frac{\partial g}{\partial z^\alpha} \equiv \{f, g\} \; . \tag{1.50}$$

⊠

Z geometrické definice (1.47) okamžitě pro Poissonovy závorky plyne

- antisymetrie
- bilinearita
- z uzavřenosti symplektické formy ($\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = 0$) plyne také Jacobiho identita

takže struktura Poissonových závorek $\{\bullet, \bullet\}$ tvoří Lieovu algebru na symplektické varietě.

Navíc platí tyto vztahy:

$$\{f, g\} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_f) = \mathrm{i}_{\mathbf{X}_g}\boldsymbol{\omega}(\bullet, \mathbf{X}_f) = \mathrm{i}_{\mathbf{X}_g}(\mathbf{d}f) \equiv \langle \mathbf{d}f, \mathbf{X}_g\rangle = \mathbf{X}_g f = \mathcal{L}_{\mathbf{X}_g} f \; , \tag{1.51}$$

tedy

$$\{f, g\} = \mathcal{L}_{\mathbf{X}_g} f \; , \qquad \{g, f\} = \mathcal{L}_{\mathbf{X}_f} g \; , \tag{1.52}$$

tedy

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}_g} f = -\mathcal{L}_{\mathbf{X}_f} g \; . \tag{1.53}$$

1.6 Hamiltonovská verze teorému Emmy Noetherové

Na straně 27 v [1] je odvozena lagrangeovská formulace teorému Noetherové. Stručně řečeno, pokud $\mathcal{L}_{\mathbf{Z}} L = 0$, pak $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} g = 0$, kde $g = \langle \boldsymbol{\theta}_L, \mathbf{Z}\rangle$ a $\mathbf{Z} = Z^k \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^k} + \frac{\partial Z^k}{\partial q^l}\dot{q}^l \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\dot{q}^k}$. Jinými slovy, veličina g je v takovém případě integrálem pohybu, protože se nemění podél integrálních křivek dynamického vektorového pole $\mathbf{X}$.

Hamiltonova verze teorému Emmy Noetherové je mnohem elegantnější a zní:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}_g} H = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_{\mathbf{X}_H} g = 0 \; . \tag{1.54}$$

Důkaz: Stačí aplikovat identitu (1.53) pro $f = H$, tedy $0 = \mathcal{L}_{\mathbf{X}_g} H = -\mathcal{L}_{\mathbf{X}_H} g$.

$\boxtimes$

Příklady:

1. $g = p_1$, neboli hybnost, takže s pomocí (1.40) a (1.45) $\mathbf{X}_g \equiv \boldsymbol{\omega}^\sharp(\mathbf{d}p_1) = \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^1}$, tedy $\mathbf{X}_{p_1} = \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^1}$, což generuje translaci ve směru q^1,

   $$\mathcal{L}_{\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^1}} H = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_{\mathbf{X}_H} p_1 = 0 \ .$$

   Je-li tedy H invariantní vůči translaci ve směru q^1, zachovává se příslušná složka hybnosti p_1 vůči translaci.

2. $g = p_2 q^1 - p_1 q^2$, což je složka momentu hybnosti, takže

   $$\begin{aligned} \mathbf{X}_g &= \boldsymbol{\omega}^\sharp(q^1 \mathbf{d}p_2 - q^2 \mathbf{d}p_1 + p_2 \mathbf{d}q^1 - p_1 \mathbf{d}q^2) \\ &= -q^2 \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^1} + q^1 \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^2} - p_2 \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_1} + p_1 \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_2} \ , \end{aligned}$$

   kde první dva členy generují rotaci v prostoru a druhé dva členy generují odpovídající rotaci v hybnostech. Invariance H vůči rotaci tedy odpovídá zákonu zachování momentu hybnosti.

1.7 Invariance symplektické formy

Pro každé hamiltonovské pole $\mathbf{X}_g$ vůči g platí

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}_g} \boldsymbol{\omega} = 0 \ . \tag{1.55}$$

Speciálně platí $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\omega} = 0$ pro dynamické vektorové pole $\mathbf{X}$ odpovídající Hamiltonově funkci H. Jinými slovy *symplektická forma $\boldsymbol{\omega}$ se při vývoji systému „nemění“*.

Důkaz: Provedeme snadno pomocí *Cartanovy identity*, podle níž platí $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} = \mathrm{i}_{\mathbf{X}} \mathbf{d} + \mathbf{d}\, \mathrm{i}_{\mathbf{X}}$. Je tedy $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_g} \boldsymbol{\omega} = \mathrm{i}_{\mathbf{X}_g} \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{d}\, \mathrm{i}_{\mathbf{X}_g} \boldsymbol{\omega} = 0 + \mathbf{d}\mathbf{d}g = \mathbf{d}^2 g = 0$, kde jsme užili faktu, že symplektická forma $\boldsymbol{\omega}$ je uzavřená (neboli $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = 0$) a definice hamiltonovského pole (1.44).

$\boxtimes$

1.8 Kanonické transformace geometricky

Vůči kanonickým transformacím je symplektická forma $\boldsymbol{\omega}$ invariantní. Konkrétně

Definice: *kanonická transformace* je taková změna souřadnic $Z^\alpha(z^\beta)$ na fázového prostoru, která zachovává kanonický tvar symplektické formy $\boldsymbol{\omega}$, tedy její složky $\omega_{\alpha\beta}$ ve starých souřadnicích $z^\beta \equiv (q^j, p_j)$ i v nových souřadnicích $Z^\alpha \equiv (Q^j, P_j)$ jsou dány symplektickou maticí $\begin{pmatrix} 0 & \text{-I} \\ \text{I} & 0 \end{pmatrix}$, kde $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2!}\omega_{\alpha\beta}\,\mathbf{d}z^\alpha \wedge \mathbf{d}z^\beta = \frac{1}{2!}\omega_{\alpha\beta}\,\mathbf{d}Z^\alpha \wedge \mathbf{d}Z^\beta$.

Konkrétně tedy:

- $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j$ ... v původních souřadnicích

  $\downarrow$ kanonická transformace

- $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}P_j \wedge \mathbf{d}Q^j$ ... v nových souřadnicích

Speciálně pro $n = 1$ máme $Q(q,p)$, $P(q,p)$, takže

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}P \wedge \mathbf{d}Q &= \left(\frac{\partial P}{\partial q}\mathbf{d}q + \frac{\partial P}{\partial p}\mathbf{d}p\right) \wedge \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\mathbf{d}q + \frac{\partial Q}{\partial p}\mathbf{d}p\right) \\ &= \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q}\mathbf{d}p \wedge \mathbf{d}q + \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}\mathbf{d}q \wedge \mathbf{d}p = \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\mathbf{d}p \wedge \mathbf{d}q\ .\end{aligned} \tag{1.56}$$

Aby transformace byla kanonická, člen $\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}\right)$ musí být roven 1, což odpovídá podmínce $\{Q, P\} = 1$ známé z klasického kurzu teoretické mechaniky.

1.8.1 Generující funkce kanonické transformace

Každá (lokální) kanonická transformace odpovídá jisté (lokální) funkci F na fázovém prostoru. Připomeňme, že v kanonických souřadnicích je kanonická Cartanova forma

$$\boldsymbol{\theta}_0 = p_j \mathbf{d}q^j\ . \tag{1.57}$$

Aplikací vnější derivace $\mathbf{d}$ dostáváme $\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j = \boldsymbol{\omega}$, což je symplektická forma. Uvažujme nyní jinou kanonickou Cartanovu formu

$$\boldsymbol{\theta}_1 = P_j \mathbf{d}Q^j \tag{1.58}$$

v souřadnicích (Q^j, P_j), které jsou s (q^j, p_j) na fázovém prostoru spojeny kanonickou transformací. Zjevně platí $\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{d}P_j \wedge \mathbf{d}Q^j = \boldsymbol{\omega}$, takže odečtením dostáváme

$$\mathbf{d}(\boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\theta}_1) = 0 \ . \tag{1.59}$$

Forma $(\boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\theta}_1)$ je tedy uzavřená, neboli 1-forma $\boldsymbol{\alpha} \equiv p_j \mathbf{d}q^j - P_j \mathbf{d}Q^j$ je uzavřená. Nyní použijeme

Poincarého lemma: Pro uzavřenou 1-formu $\boldsymbol{\alpha}$ *lokálně* existuje funkce F taková, že $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{d}F$.

Důsledek: Pro danou kanonickou transformaci existuje na každém okolí $\mathcal{U}$ fázového prostoru lokální funkce F, zvaná *generující funkce*, taková, že

$$p_j \mathbf{d}q^j - P_j \mathbf{d}Q^j = \mathbf{d}F \ . \tag{1.60}$$

Odtud lze snadno ukázat, že pro konkrétní trajektorii platí

$$p_j \dot{q}^j - P_i \dot{Q}^i = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \ . \tag{1.61}$$

Důkaz: Vyjdeme ze vztahu (1.60), přičemž víme, že $Q^i = Q^i(q^j, p_j)$, tedy

$$p_j \mathbf{d}q^j - P_i \left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^j} \mathbf{d}q^j + \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} \mathbf{d}p_j \right) = \frac{\partial F}{\partial q^j} \mathbf{d}q^j + \frac{\partial F}{\partial p_j} \mathbf{d}p_j \ . \tag{1.62}$$

Porovnáním levé a pravé strany této rovnice dostaneme

$$\frac{\partial F}{\partial q^j} = -P_i \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} + p_j \ , \qquad \frac{\partial F}{\partial p_j} = -P_i \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} \ . \tag{1.63}$$

Nyní dosadíme tyto výrazy do $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &\equiv \frac{\partial F}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial F}{\partial p_j} \dot{p}_j = \left(-P_i \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} + p_j \right) \dot{q}^j - P_i \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} \dot{p}_j \\ &= p_j \dot{q}^j - P_i \left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = p_j \dot{q}^j - P_i \dot{Q}^i \ . \end{aligned}$$

⊠

1.8.2 Generující funkce typu 1 až 4

Generující funkci F lze vyjádřit v libovolných lokálních souřadnicích na každém okolí $\mathcal{U}$ fázového prostoru, tedy $F(q^j, p_j)$. Předpokládejme nyní, že body z $\mathcal{U}$ lze jednoznačně specifikovat *kombinací starých a nových souřadnic*. O takových kanonických transformacích říkáme, že jsou typu 1 až 4:

1	2	3	4
(q, Q)	(q, P)	(p, Q)	(p, P)

- *kanonická transformace typu* 1: funkce lze vyjádřit pomocí (q^j, Q^j)
  Ze vztahu (1.60) plyne

$$p_j \mathbf{d}q^j - P_j \mathbf{d}Q^j = \mathbf{d}F^{(1)}(q^j, Q^j) = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial q^j}\mathbf{d}q^j + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial Q^j}\mathbf{d}Q^j \ ,$$

  kde $F^{(1)}(q^j, Q^j) = F(q^j, p_i(q^j, Q^j))$. Porovnáním levé a pravé strany dostáváme

$$p_j = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial q^j} \ , \qquad P_j = -\frac{\partial F^{(1)}}{\partial Q^j} \ . \tag{1.64}$$

- *kanonická transformace typu* 2: funkce lze vyjádřit pomocí (q^j, P_j)
  Zaveďme funkci $F^{(2)}(q^j, P_j) = F(q^j, p_i(q^j, P_j)) + P_j Q^j(q^i, P_i)$. Ze vztahu (1.60) pak plyne

$$p_j \mathbf{d}q^j - P_j \mathbf{d}Q^j = \mathbf{d}(F^{(2)} - P_j Q^j) = \mathbf{d}F^{(2)} - (\mathbf{d}P_j)Q^j - P_j \mathbf{d}Q^j$$

  tedy

$$p_j \mathbf{d}q^j + Q^j \mathbf{d}P_j = \frac{\partial F^{(2)}}{\partial q^j}\mathbf{d}q^j + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial P_j}\mathbf{d}P_j \ ,$$

  Porovnáním členů v předchozím výrazu dostáváme

$$p_j = \frac{\partial F^{(2)}}{\partial q^j} \ , \qquad Q^j = \frac{\partial F^{(2)}}{\partial P_j} \ . \tag{1.65}$$

Podobně odvodíme výrazy pro kanonické transformace typu 3 resp. 4 užitím
$F^{(3)}(p_j, Q^j) = F(q^j(p_i, Q^i), p_j) - p_j q^j(p_i, Q^i)$ resp.
$F^{(4)}(p_j, P_j) = F(q^j(p_i, P_i), p_j) + P_j Q^j(p_i, P_i) - p_j q^j(p_i, P_i)$.

1.9 Liouvilleova věta

Je zajímavé, že objem oblasti vymezené ve fázovém prostoru se působením toku popisujícího vývoj hamiltonovského systému nemění. Konkrétně, nechť

- $\mathcal{R}$ je oblast fázového prostoru (dim $= 2n$)
- při dynamickém vývoji jsou body z $\mathcal{R}$ zobrazeny tokem $\Phi_t^{\mathbf{X}}$ do oblasti $\mathcal{R}(t)$
- pak objem $\mathcal{R}(t)$ je stejný jako objem $\mathcal{R}$

Jak počítat (elementární) objem na varietě?

- *objem v* $\mathbb{R}^2$ určený dvěma vektory $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ je

$$v(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \pm|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2| = \det \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ij} x_1^i x_2^j \ . \tag{1.66}$$

- *objem v* $\mathbb{R}^3$ určený třemi vektory $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ je

$$v(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3,) = \mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3) = \det \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k \ . \tag{1.67}$$

- *objem v* $\mathbb{R}^n$ určený n vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ je analogicky

$$v(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \varepsilon_{i \ldots k}\, x_1^i \ldots x_n^k \ . \tag{1.68}$$

  Obecně $v(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ je tzv. *objemová funkce* tedy zobrazení $\mathbb{V} \times \ldots \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, které je

  - lineární
  - antisymetrické
  - nedegenerované

- *elementární objemový element* na fázovém prostoru je $2n$-forma.

  Specálně: *kanonický objemový element* (Liouvilleova $2n$-forma) je definován

$$\mathbf{v} \equiv \frac{1}{n!}\, \boldsymbol{\omega} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{n!}\, \boldsymbol{\omega}^{\wedge n} \ , \tag{1.69}$$

kde $\boldsymbol{\omega}$ je symplektická 2-forma. Explicitně v souřadnicích máme

$$\mathbf{v} = \mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{d}p_n \wedge \mathbf{d}q^n \ . \tag{1.70}$$

Důkaz: Např. pro $n = 2$ je $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 + \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2$, takže

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega}) = \tfrac{1}{2}[(\mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 + \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2) \wedge (\mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 + \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2)] \\ &= \tfrac{1}{2}[\mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2 + \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2 \wedge \mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1] \\ &= \mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2 \ .\end{aligned}$$

⊠

Diferenciální tvar Liouvilleovy věty:

Kanonický objemový element $\mathbf{v}$ je invariantní vůči hamiltonovským tokům, neboli

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{v} = 0 \ . \tag{1.71}$$

Důkaz:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{v} = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\tfrac{1}{n!}\boldsymbol{\omega}^{\wedge n} = \tfrac{n}{n!}\boldsymbol{\omega}^{\wedge(n-1)} \wedge \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} = 0 \ , \tag{1.72}$$

neboť dle (1.55) je

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} = 0 \ . \tag{1.73}$$

⊠

Kapitola 2

Časově závislé hamiltoniány

Přirozená aréna časově závislé Hamiltonovy mechaniky vzniká rozšířením fázového prostoru Γ (s lokálními souřadnicemi q^j a p_j) z bezčasového případu o časovou osu $\mathbb{R}$ (se souřadnicí t). Jedná se tedy o kartézský součin těchto prostorů tj. $\Gamma \times \mathbb{R}$. Tuto novou varietu nazýváme *rozšířeným fázovým prostorem*. Lokální souřadnice na tomto novém prostoru jsou (q^j, p_j, t).

Dimenze rozšířeného fázového prostoru je zjevně $2n+1$. Nejedná se proto o symplektickou varietu, jako v nečasovém případě, jejíž dimenze musí být sudá, ale o tzv. varietu „*kontaktní*“.

Nejprve zadefinujme obecné matematické pojmy, které nám umožní lépe charakterizovat důležité geometrické objekty:

Definice: Nulový vektor a nesingulární 2-forma.

- Vektor $\mathbf{X}$, pro který je $\mathbf{\Omega}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ nezávisle na volbě druhého vektoru $\mathbf{Y}$, nazveme *nulovým vektorem* 2-formy $\mathbf{\Omega}$. Tento vektor je jednoznačně určen až na skalární násobek.

- 2-formu $\mathbf{\Omega}$ nazveme *nesingulární*, pokud lineární prostor generovaný množinou jejích nulových vektorů $\mathbf{X}$ má minimální možnou dimenzi: tedy $\dim = 1$ pokud je dimenze celého prostoru, na kterém je forma $\mathbf{\Omega}$ definována, lichá, a $\dim = 0$ pokud je tato dimenze sudá.

Zavedení pojmu nesingularity 2-formy je jakýmsi zobecněním pojmu nedegenerovanosti formy. Uvědomme si, že pokud je dimenze celého prostoru formy $\mathbf{\Omega}$ sudá, tedy $2n$, nesingulárnost říká, že nexistuje žádný nulový vektor, a tedy forma je nedegenerovaná.

Pokud je dimenze prostoru lichá, tedy $2n+1$, a forma $\mathbf{\Omega}$ je nesingulární, pak víme, že forma je degenerovaná speciálním způsobem, a to pouze „v jednom směru“. Nebude se však jednat o symplektickou formu, která musí být dle definice nedegenerovaná a uzavřená[1].

Ilustrace: Je možné ukázat, že

- 2-forma $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j$, dim $= 2n$, je nesingulární a tedy nedegenerovaná.
- 2-forma $\mathbf{\Omega} = \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j - \mathbf{d}(p_j + q^j) \wedge \mathbf{d}t$, dim $= 2n+1$, je nesingulární, a tedy degenerovaná pouze v jednom směru, a to $\mathbf{X} = a\left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^j} - \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_j} + \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} t}\right)$, kde a je libovolný skalární násobek.

Nyní ještě jednou přeformulujme předchozí definice a dejme do vztahu nesingulární 2-formu na prostoru liché dimenze a obecné vektorové pole.

Platí: Pokud máme na $(2n+1)$-dimenzionálním rozšířeném fázovém prostoru zadanou nesingulární 2-formu $\mathbf{\Omega}$, potom lze najít právě jedno vektorové pole $\mathbf{X}$, pro které až na skalární násobek platí

$$\mathrm{i}_{\mathbf{X}} \mathbf{\Omega} = 0 \ . \tag{2.1}$$

Důkaz: Plyne přímo z definice nesingulární 2-formy na celém prostoru liché dimenze.

⊠

2.1 Zavedení geometrických objektů na rozšířeném fázovém prostoru

Nyní již přistupme k zavedení konkrétních geometrických objektů. Na celém fázovém prostoru $\Gamma \times \mathbb{R}$ je možné definovat tzv. *kontaktní 1-formu* $\mathbf{\Lambda}$, a to vztahem

$$\mathbf{\Lambda} \equiv p_j \, \mathbf{d}q^j - H \mathbf{d}t \ , \tag{2.2}$$

kde $H = H(q^j, p_j, t)$. Všimněme si podobnosti s kanonickou Cartanovou 1-formou $\boldsymbol{\theta}_0 = p_j \mathbf{d}q^j$ z bezčasového případu.

[1] Připomeňme, že forma $\mathbf{\Omega}$ se nazývá uzavřená, pokud platí $\mathbf{d}\mathbf{\Omega} = 0$.

Aplikací vnější derivace na $\mathbf{\Lambda}$ dostáváme uzavřenou, degenerovanou, ale nesingulární 2-formu $\mathbf{\Omega}$ (nejedná se tedy o formu symplektickou[2]):

$$\mathbf{\Omega} \equiv \mathbf{d\Lambda} = \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j - \mathbf{d}H \wedge \mathbf{d}t \; . \tag{2.3}$$

Uzavřenost této formy je zřejmá, neboť $\mathbf{d\Omega} = \mathbf{d}^2\mathbf{\Lambda} \equiv 0$, degenerovanost a nesingulárnost ukážeme později. Je dobré si uvědomit, že symetrie výrazu (2.3) je pouze zdánlivá, neboť $H = H(q^j, p_j, t)$, a tedy $\mathbf{d}H = \frac{\partial H}{\partial q^j}\mathbf{d}q^j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\mathbf{d}p_j + \frac{\partial H}{\partial t}\mathbf{d}t$, takže $\mathbf{d}H \wedge \mathbf{d}t = \frac{\partial H}{\partial q^j}\mathbf{d}q^j \wedge \mathbf{d}t + \frac{\partial H}{\partial p_j}\mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}t$.

Poznamenejme ještě, že pro vyjádření souřadnicových složek $\Omega_{\alpha\beta}$ na $\Gamma \times \mathbb{R}$ dostáváme matici typu $(2n+1) \times (2n+1)$ tvaru

$$\Omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I} & -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathrm{I} & 0 & -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} & 0 \end{pmatrix} \; , \tag{2.4}$$

kde $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}$ značí sloupcový resp. řádkový blok $\left(\frac{\partial H}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial q^n}\right)$, stejně tak $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$ značí blok $\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}\right)$ a I je jednotková matice typu $n \times n$. Je vidět, že levý horní blok typu $2n \times 2n$ matice (2.4) odpovídá souřadnicovému vyjádření obvyklé symplektické 2-formy $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j$, tedy matici $\omega_{\alpha\beta}$, z případu časově nezávislé mechaniky.

Na rozšířeném fázovém prostoru určují dynamiku soustavy integrální křivky vektorového pole $\mathbf{X}$, které je obecně dáno výrazem

$$\mathbf{X} \equiv \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\tau} = \dot{q}^j \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^j} + \dot{p}_j \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_j} + \dot{t}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} t} \; . \tag{2.5}$$

Tečka zde značí derivaci podle τ, což je parametr integrální křivky $\gamma(\tau)$ na $\Gamma \times \mathbb{R}$. Tento parametr může mít například význam „vlastního“ času obecně nezávislého na čase t, tedy na souřadnici rozšířeného fázového prostoru.

Vztah určující toto vektorové pole můžeme upravit užitím Hamiltonových kanonických rovnic. Dále můžeme *požadovat* stejné plynutí obou časů t a τ, to znamená, že ztotožníme parametr integrální křivky se souřadnicí fázového prostoru. Tento dodatečný požadavek vyjádříme výrazem $\dot{t} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = 1$. Výsledné vektorové pole má pak tvar

$$\mathbf{X} \equiv \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_j} + \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} t} \; . \tag{2.6}$$

[2] Opět připomeňme, že symplektická forma je uzavřená a nedegenerovaná.

Nyní zbývá pouze vyřešit otázku vhodného „geometrického“ předpisu pro nalezení tohoto významného vektorového pole. Tento předpis nazveme pohybovými rovnicemi.

2.2 Pohybové rovnice

Platí: Dynamické vektorové pole $\mathbf{X}$ je jednoznačně určeno (až na skalární násobek) podmínkou

$$\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Omega} = 0 \ . \tag{2.7}$$

Právě tento předpis je tedy možné považovat za invariantní tvar pohybových rovnic.

Naopak zjevně platí, že toto vektorové pole $\mathbf{X}$ určuje v každém bodě rozšířeného fázového prostoru nulový vektor 2-formy $\boldsymbol{\Omega}$.

Důkaz: Ukažme nejprve, že vektorové pole $\mathbf{X}$, viz (2.6), je jednoznačně určeno podmínkou na nulový vektor formy $\boldsymbol{\Omega}$.

Počítejme tedy přímo vložení obecného tvaru vektorového pole, viz (2.5), do formy $\boldsymbol{\Omega}$ dané (2.3) a užijme antisymetrie vložení vektorového pole do 2-formy a vztahu

$$\mathrm{i}_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta})(\bullet, \mathbf{X}) = \boldsymbol{\alpha}(\bullet)\boldsymbol{\beta}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\beta}(\bullet)\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}) \ , \tag{2.8}$$

tedy

$$\begin{aligned} \mathrm{i}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}\,(\bullet, \mathbf{X}) &= (\mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j - \mathbf{d}H \wedge \mathbf{d}t)\,(\bullet, \mathbf{X}) \\ &= (\mathbf{d}H \wedge \mathbf{d}t)\,(\mathbf{X}, \bullet) - (\mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j)\,(\mathbf{X}, \bullet) \qquad (2.9) \\ &= [\mathbf{d}H(\mathbf{X})]\,\mathbf{d}t - [\mathbf{d}t(\mathbf{X})]\,\mathbf{d}H - [\mathbf{d}p_j(\mathbf{X})]\,\mathbf{d}q^j + \left[\mathbf{d}q^j(\mathbf{X})\right]\mathbf{d}p_j \ . \end{aligned}$$

Dále rozepišme jednotlivá vložení pole do 1-forem z předchozího výrazu,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}H(\mathbf{X}) &= \left(\frac{\partial H}{\partial q^i}\mathbf{d}q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathbf{d}p_i + \frac{\partial H}{\partial t}\mathbf{d}t\right)\left(\dot{q}^j \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^j} + \dot{p}_j \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_j} + \dot{t}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} t}\right) \\ &= \dot{q}^j \frac{\partial H}{\partial q^i}\delta^i_j + \dot{p}_j \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta^j_i + \dot{t}\frac{\partial H}{\partial t} = \dot{q}^j \frac{\partial H}{\partial q^j} + \dot{p}_j \frac{\partial H}{\partial p_j} + \dot{t}\frac{\partial H}{\partial t} \ , \qquad (2.10) \end{aligned}$$

$$\mathbf{d}t(\mathbf{X}) = \dot{t} \ , \qquad \mathbf{d}p_j(\mathbf{X}) = \dot{p}_j \ , \qquad \mathbf{d}q^j(\mathbf{X}) = \dot{q}^j \ . \tag{2.11}$$

Dosaďme předchozí vztahy do výrazu (2.9), rozepišme $\mathbf{d}H$ a užijme podmínku k nelezení nulového vektoru, to znamená položme tento výraz rovný nule. Tím dostáváme rovnici

$$\left(\dot{q}^j \frac{\partial H}{\partial q^j} + \dot{p}_j \frac{\partial H}{\partial p_j} + \dot{t}\frac{\partial H}{\partial t}\right)\mathbf{d}t - \dot{t}\left(\frac{\partial H}{\partial q^j}\mathbf{d}q^j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\mathbf{d}p_j + \frac{\partial H}{\partial t}\mathbf{d}t\right) - \dot{p}_j\mathbf{d}q^j + \dot{q}^j\mathbf{d}p_j = 0 \ . \tag{2.12}$$

Porovnáním jednotlivých koeficientů u $\mathbf{d}t$, $\mathbf{d}q^j$ a $\mathbf{d}p_j$ dostáváme následující tři podmínky

$$\dot{q}^j \frac{\partial H}{\partial q^j} = -\dot{p}_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \ , \tag{2.13}$$

$$\dot{t}\frac{\partial H}{\partial q^j} = -\dot{p}_j \ , \tag{2.14}$$

$$\dot{t}\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}^j \ , \tag{2.15}$$

které jednoznačně určují koeficienty nulového vektorového pole formy $\mathbf{\Omega}$. Jejich dosazením do obecného předpisu (2.5) dostáváme hledaný výraz

$$\mathbf{X} = \dot{t}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_j} + \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} t}\right) \ , \tag{2.16}$$

z kterého je rovněž zřejmá volnost ve volbě $\dot{t}$, která určuje pouze stejné škálování každé ze souřadnic, viz (2.6).

Druhou část výše uvedeného tvrzení, to znamená nulovost vložení kontrétního pole (2.6), ukážeme analogicky přímou úpravou pohybové rovnice (2.7), tedy

$$\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Omega} = [\mathbf{d}H(\mathbf{X})]\,\mathbf{d}t - [\mathbf{d}t(\mathbf{X})]\,\mathbf{d}H - [\mathbf{d}p_j(\mathbf{X})]\,\mathbf{d}q^j + \left[\mathbf{d}q^j(\mathbf{X})\right]\mathbf{d}p_j \ . \tag{2.17}$$

Nyní počítejme člen $\mathbf{d}H(\mathbf{X})$ rozepsáním diferenciálu $\mathbf{d}H$ a dosazením výrazu (2.6) pro vektorové pole:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}H(\mathbf{X}) &= \left(\frac{\partial H}{\partial q^i}\mathbf{d}q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathbf{d}p_i + \frac{\partial H}{\partial t}\mathbf{d}t\right)\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_j} + \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} t}\right)\\ &= \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_j}\delta^i_j - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^j}\delta^j_i + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial t} \equiv \frac{\partial H}{\partial t} \ .\end{aligned}$$

Obdobnou úpravou zbylých členů ve výrazu (2.17) dostáváme

$$\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Omega} = \frac{\partial H}{\partial t}\mathbf{d}t - \mathbf{d}H + \frac{\partial H}{\partial q^j}\mathbf{d}q^j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\mathbf{d}p_j = \mathbf{d}H - \mathbf{d}H \equiv 0\ . \tag{2.18}$$

⊠

Tímto jsme dokázali degenerovanost a přitom nesingulárnost 2-formy $\mathbf{\Omega}$, neboť vložení právě jednoho nenulového vektorového pole $\mathbf{X}$ do formy $\mathbf{\Omega}$ je identicky nulové.

Souřadnicový pohled

Poznamenajme ještě, že výraz (2.7) v souřadnicích říká, že složky vektorového pole $\mathbf{X}$, tedy $\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, 1\right)$, jsou vlastním vektorem matice $\Omega_{\alpha\beta}$, viz (2.4). Tomuto vlastnímu vektoru přísluší vlastní číslo 0, jehož násobnost je jedna, což odpovídá degenerovanosti formy $\mathbf{\Omega}$.

Invariance formy $\mathbf{\Omega}$

Dále je možné ukázat, že 2-forma $\mathbf{\Omega}$ zůstává při vývoji systému daném vektorovým polem $\mathbf{X}$ konstantní, tedy že se nemění podél integrálních křivek generovaných tímto polem. Toto je možné vyjádřit pomocí Lieovy derivace

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Omega} = 0\ . \tag{2.19}$$

Tato skutečnost bude mít zajímavou interpretaci v kapitole 3 o kanonických transformacích.

Důkaz: Aplikujme na $\mathbf{\Omega}$ známou Cartanovu identitu

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}} = \mathrm{i}_{\mathbf{X}}\mathbf{d} + \mathbf{d}\,\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\ , \tag{2.20}$$

tedy

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Omega} = \mathrm{i}_{\mathbf{X}}\mathbf{d}\mathbf{\Omega} + \mathbf{d}\,\mathrm{i}_{\mathbf{X}}\mathbf{\Omega}\ . \tag{2.21}$$

První člen v předchozím výrazu je nulový, neboť forma $\mathbf{\Omega}$ je uzavřená. Nulovost druhého členu plyne přímo z pohybových rovnic (2.7).

⊠

Platí: Funkce f je integrálem pohybu právě tehdy, když

$$\mathbf{X}(f) = 0\ . \tag{2.22}$$

Důkaz: Stačí pouze připomenout definici vektorového pole tj. $\mathbf{X} \equiv \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\tau}$ a integrálu pohybu, tedy $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau} = 0$. Následně je užitečné vyjádřit výraz $\mathbf{X}(f)$ pomocí Poissonových závorek a Lieovy derivace (předpokládáme $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = 1$):

$$\mathbf{X}(f) \equiv \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j}\frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau} \equiv \mathcal{L}_{\mathbf{X}} f \ . \qquad (2.23)$$

Poslední ekvivalence plyne přímo z definice Lieovy derivace funkce, viz [1].

⊠

2.3 Vztah k časově nezávislé mechanice

Názvem časově nezávislá mechanika zde označujeme případ, kdy se Hamiltonova funkce nemění s časem t, je tedy pouze funkcí souřadnic q^j a p_j, tj. $H = H(q^j, p_j)$.

Připomeňme, že arénou časově závislé mechaniky je rozšířený fázový prostor $\Gamma \times \mathbb{R}$. Vývoj systému je zde daný integrálními křivkami vektorového pole $\mathbf{X}$, které jsou paramerizovány proměnou τ, která může mít, jak již bylo řečeno, rovněž význam času.

Za těchto předpokladů je možné nahlédnout na popis speciálního systému s časově neproměnným hamiltoniánem dvěma různými způsoby.

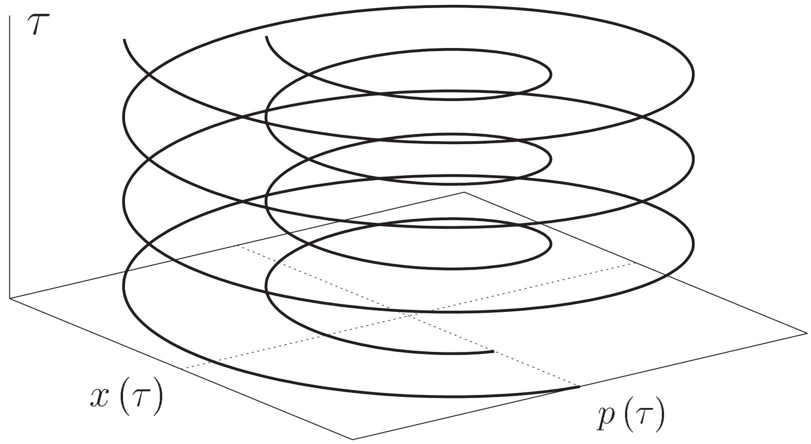
Časově nezávislá mechanika na rozšířeném fázovém prostoru

Celá mechanika bude popsána naprosto stejným způsobem jako v části 2.1. V předchozích úvahách jsme užili volby $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = 1$ vyjadřující stejné plynutí obou časů, tedy ztotožnění parametru integrálních křivek a souřadnice rozšířeného fázového prostoru. Právě tato volba nám umožňuje setrvat na tomto prostoru i v případě, že hamiltonián je pouze funkcí q^j a p_j, přičemž tvar pohybových rovnic bude samozřejmě stejný jako v části 2.1.

Ilustrace: Harmonický oscilátor. Hamiltonián má tvar $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$. Příslušné vektorové pole je tedy dáno výrazem

$$\mathbf{X} = \frac{p}{m}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x} - kx\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p} + \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} t} \ . \qquad (2.24)$$

Pro dvě konkrétní hodnoty počátečních podmínek a nějakou hodnotu tuhosti k a hmotnosti m dostaneme dvě typické integrální křivky ve tvaru spirál. Tato dvě řešení jsou vykreslena na obrázku 2.1. Průmětem do roviny (x, p) se ze spirál stanou elipsy, tak jak je dobře známo z fázového portrétu harmonického oscilátoru.



Obrázek 2.1: Dvě typické integrální křivky harmonického oscilátoru v rozšířeném fázovém prostoru.

Časově nezávislá mechanika jako řez rozšířeného fázového prostoru

Nyní uvažujme alternativní možnost, že oba časy t a τ jsou zcela nezávislé. Potom si časově neproměnný vývoj můžeme představit[3] jako limitní případ, kdy čas τ (parametr integrální křivky) plyne mnohem rychleji než čas t (souřadnice na rozšířeném fázovém prostoru). Tuto limitu je možné formálně vyjádřit jako

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = 0 \ , \tag{2.25}$$

což nás prakticky omezí na jeden časový řez rozšířeného fázového prostoru, tedy volbu $t = \text{konst}$. Předpokládáme, že hamiltonián je pouze funkcí souřadnic q^j a p_j. Proto také dále při výpočtu diferenciálu hamiltoniánu nederivujeme podle souřadnice t.

Vektorové pole (2.5), upravené užitím Hamiltonových kanonických rovnic a podmímky (2.25), přejde na tvar

$$\mathbf{X} = \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_j} \ , \tag{2.26}$$

[3] Tento pohled je ekvivalentní projekci $\pi : \Gamma \times \mathbb{R} \to \Gamma$.

které již má nulovou složku ve směru časové osy (srovnej s (2.6)), tedy

$$\mathbf{X} = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, 0 \right) . \tag{2.27}$$

Vložením tohoto pole do 2-formy $\mathbf{\Omega}$, viz (2.3), dostáváme hledanou časově nezávislou pohybovou rovnici[4]

$$\mathrm{i}_{\mathbf{X}} \mathbf{\Omega} = \mathbf{d}H \ , \tag{2.28}$$

z níž je zřejmé, že toto nové pole již není nulovým vektorem formy $\mathbf{\Omega}$.

Důkaz: Postupujme obdobně jako v časově závislém případě tj. přímo upravujme levou stranu nových pohybových rovnic užitím antisymetrie vložení vektorového pole do 2-formy viz vztah (2.9):

$$\mathrm{i}_{\mathbf{X}} \mathbf{\Omega} = [\mathbf{d}H(\mathbf{X})]\, \mathbf{d}t - [\mathbf{d}t(\mathbf{X})]\, \mathbf{d}H - [\mathbf{d}p_j(\mathbf{X})]\, \mathbf{d}q^j + \left[\mathbf{d}q^j(\mathbf{X})\right] \mathbf{d}p_j \ . \tag{2.29}$$

Nyní upravujme jednotlivá vložení pole $\mathbf{X}$ jeho rozepsáním dle vztahu (2.26):

$$\begin{aligned} \mathrm{i}_{\mathbf{X}} \mathbf{\Omega} = & \, \mathbf{d}t \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} \mathbf{d}q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \mathbf{d}p_i \right) \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_j} \right) - 0 \\ & + \mathbf{d}q^j \left[\mathbf{d}p_j \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_i} \right) \right] + \mathbf{d}p_j \left[\mathbf{d}q^j \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^i} \right) \right] \\ = & \, \mathbf{d}t \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta^i_j - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^j} \delta^j_i \right) + \mathbf{d}q^j \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta^i_j + \mathbf{d}p_j \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta^j_i \\ = & \, \frac{\partial H}{\partial q^j} \mathbf{d}q^j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \mathbf{d}p_j \equiv \mathbf{d}H \ . \end{aligned} \tag{2.30}$$

$\boxtimes$

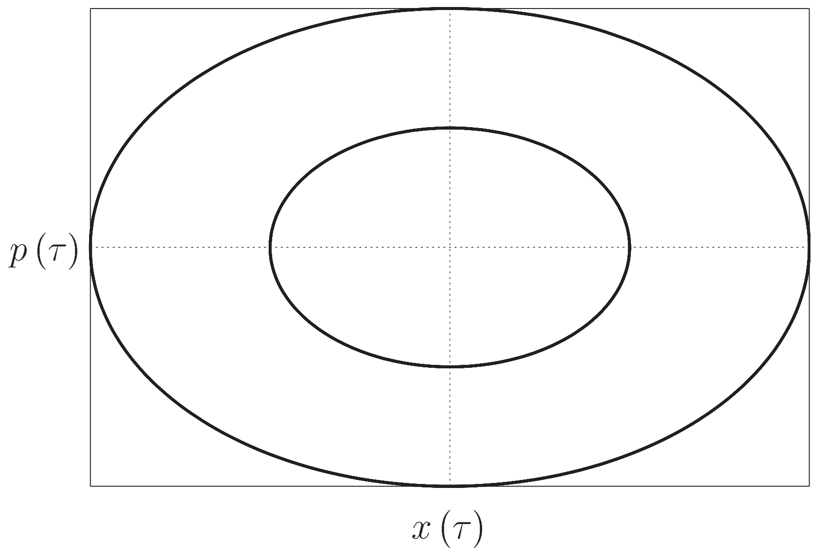
Jelikož složka vektorového pole do směru osy t je nulová, viz (2.27), je výhodné uvažovat pouze projekci tohoto pole a formy $\mathbf{\Omega}$ na $2n$-dimenzionální symplektickou varietu se souřadnicemi q^j a p_j. Na tomto novém fázovém prostoru takto dostáváme známou symplektickou formu $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j$ a vektorové pole $\mathbf{X} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_j}$. Tyto dva objekty jsou přitom spojeny Hamiltonovými kanonickými rovnicemi v geometrickém tvaru, neboli $\mathrm{i}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}H$.

[4]Tato rovnice nápadně připomíná geometrické vyjádření Hamiltonových kanonických rovnic z bezčasového případu, $\mathrm{i}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}H$, kde $\boldsymbol{\omega}$ je symplektická forma na $2n$-dimenzionální symplektické varietě. Naše rovnice však stále ještě „žije“ na varietě dimenze $2n + 1$.

Ilustrace: Harmonický oscilátor. Řešení provedeme jako v předchozí ilustraci s tím rozdílem, že parametr integrální křivky τ zde neodpovídá žádné souřadnici. Dostáváme tedy vektorové pole

$$\mathbf{X} = \frac{p}{m}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x} - kx\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p}\ . \tag{2.31}$$

Pro stejný konkrétní případ jako v předchozí ilustraci dostaneme integrální křivky znázorněné na obrázku 2.2. Tyto křivky odpovídají průmětu integrálních křivek z obrázku 2.1 do roviny (x, p).



Obrázek 2.2: Dvě integrální křivky harmonického oscilátoru v časovém řezu.

Kapitola 3

Časově závislé kanonické transformace

Na problematiku kanonických transformací je možné pohlížet dvěma ekvivalentními způsoby. Rozlišujeme zde mezi pohledem *pasivním* a *aktivním*.

V případě transformací pasivních jde pouze o změnu souřadnicového systému, přičemž body v rozšířeném fázovém prostoru zůstávají fixované. Naproti tomu v aktivním přístupu jeden bod z rozšířeném fázovém prostoru přechází pomocí jistého toku na bod jiný.

Od *kanonických* transformací požadujeme zachování jednoduchého tvaru pohybových rovnic nebo ekvivalentně zahování 2-formy $\mathbf{\Omega}$.

Nadále budeme uvažovat pouze transformace pasivní. Potom je možné zavést kanonické transformace následující definicí[1]:

Definice: *Kanonickou transformací* nazýváme takovou záměnu souřadnic na fázovém prostoru, která zachovává kanonický tvar formy $\mathbf{\Omega}$, tedy

$$\begin{gathered}(q^j, p_j, t) \to (Q^j(q^j, p_j, t), P_j(q^j, p_j, t), t) : \\ \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j - \mathbf{d}H \wedge \mathbf{d}t = \mathbf{d}P_j \wedge \mathbf{d}Q^j - \mathbf{d}H' \wedge \mathbf{d}t \ .\end{gathered} \tag{3.1}$$

Podívejme se také na vektorové pole určené Hamiltonovými rovnicemi.

Tvrzení: Transformace generovaná fázovým tokem $\Phi_{\mathbf{X}}$, tedy určena dynamickým polem $\mathbf{X}$ viz (2.6), je kanonická.

[1] V aktivním pohledu kanonickou transformací nazýváme diferencovatelné zobrazení g fázového prostoru, které zachovává 2-formu $\mathbf{\Omega}$, tedy $g^*\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}$, kde g^* je pull-back g.

Důkaz: Plyne přímo z ekvivalence vztahů (2.19) a (3.1) pro tok $\Phi_{\mathbf{x}}$, tedy

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\mathbf{\Omega} = 0 \;\Leftrightarrow\; \Phi^*_{\mathbf{x}}\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega} \; . \tag{3.2}$$

$\boxtimes$

3.1 Generující funkce kanonické transformace

Připomeňme, že každá (lokální) kanonická transformace odpovídá jisté (lokální) generující funkci F na fázové varietě. Dále připomeňme, že kontaktní 1-forma na rozšířeném fázovém prostoru je tvaru $\mathbf{\Lambda} = p_j\,\mathbf{d}q^j - H\mathbf{d}t$, a že aplikací vnější derivace dostáváme nesingulární uzavřenou 2-formu $\mathbf{\Omega}$, tedy $\mathbf{d\Lambda} = \mathbf{\Omega}$. Nyní uvažujme novou formu $\mathbf{\Lambda}_1$ danou výrazem

$$\mathbf{\Lambda}_1 = P_j\,\mathbf{d}Q^j - H'\mathbf{d}t \tag{3.3}$$

v nových souřadnicích (Q^j, P_j, t) spojených s (q^j, p_j, t) kanonickou transformací. Potom platí $\mathbf{d\Lambda}_1 = \mathbf{\Omega}$. Odečtením dvou různých souřadnicových vyjádření 2-formy $\mathbf{\Omega}$ dostáváme

$$\mathbf{d}(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}_1) = 0 \; . \tag{3.4}$$

Z předchozího výrazu plyne uzavřenost formy $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}_1)$. Nyní užijme Poincarého lemmatu, podle něhož pro uzavřenou 1-formu $\boldsymbol{\alpha}$ lokálně existuje funkce F taková, že $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{d}F$.

Důsledek: Pro danou kanonickou transformaci existuje na každém okolí $\mathcal{U}$ fázového prostoru lokální funkce F taková, že

$$p_j\,\mathbf{d}q^j - P_j\,\mathbf{d}Q^j - H\mathbf{d}t + H'\mathbf{d}t = \mathbf{d}F \; . \tag{3.5}$$

Funkci F nazýváme *generující funkcí kanonické transformace*.

Nyní ukažme, že nový hamiltonián $H'(Q^j, P_j, t)$ je určen výrazem

$$H' = \frac{\partial F}{\partial t} + P_i\frac{\partial Q^i}{\partial t} + H \; . \tag{3.6}$$

Důkaz: Rozepišme diferenciály $\mathbf{d}F$ a $\mathbf{d}Q^j$ ve vztahu (3.5), přičemž $F = F(q^j, p_j, t)$ a $Q^i = Q^i(q^j, p_j, t)$:

$$\begin{aligned} p_j\,\mathbf{d}q^j - P_i\left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\mathbf{d}q^j + \frac{\partial Q^i}{\partial p_j}\mathbf{d}p_j + \frac{\partial Q^i}{\partial t}\mathbf{d}t\right) - H\mathbf{d}t + H'\mathbf{d}t& \\ = \frac{\partial F}{\partial q^j}\mathbf{d}q^j + \frac{\partial F}{\partial p_j}\mathbf{d}p_j + \frac{\partial F}{\partial t}\mathbf{d}t \; .& \end{aligned} \tag{3.7}$$

Nyní porovnejme levou a pravou stranu předchozího výrazu, čímž dostaneme tři užitečné vztahy, přičemž poslední z nich (3.10) je hledaným důkazem:

$$\frac{\partial F}{\partial q^j} = -P_i \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} + p_j \ , \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_j} = -P_i \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} \ , \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -P_i \frac{\partial Q^i}{\partial t} - H + H' \ . \tag{3.10}$$

⊠

Dále pro konkrétní trajektorii platí, že

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = (p_j \dot{q}^j - H) - (P_i \dot{Q}^i - H') \ . \tag{3.11}$$

Důkaz: Přímo počítejme $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ a za jednotlivé parciální derivace funkce $F(q^j, p_j, t)$ pak dosaďme výrazy (3.8), (3.9) a (3.10),

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial F}{\partial p_j}\dot{p}_j + \frac{\partial F}{\partial t} &= \left(p_j - P_i \frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\right)\dot{q}^j - P_i \frac{\partial Q^i}{\partial p_j}\dot{p}_j - P_i \frac{\partial Q^i}{\partial t} - H + H' \\ &= (p_j \dot{q}^j - H) - (P_i \dot{Q}^i - H') \ . \end{aligned} \tag{3.12}$$

⊠

3.2 Generující funkce typu 1 až 4

Generující funkci F kanonické transformace je možné psát v libovolných souřadnicích na každém okolí $\mathcal{U}$ fázového prostoru. Předpokládejme nyní, že body z $\mathcal{U}$ lze jednoznačně specifikovat kombinací starých a nových souřadnic. O takových kanonických transformacích říkáme, že jsou typu 1 až 4:

1	2	3	4
(q, Q, t)	(q, P, t)	(p, Q, t)	(p, P, t)

- *kanonická transformace typu* 1: obecná funkce F na varietě lze vyjádřit v konkrétních souřadnicích (q^j, Q^j, t). Ze vztahu (3.5) potom plyne

$$\begin{aligned} p_j \mathbf{d}q^j - P_j \mathbf{d}Q^j - H\mathbf{d}t + H'\mathbf{d}t &= \mathbf{d}F^{(1)}(q^j, Q^j, t) \\ &= \frac{\partial F^{(1)}}{\partial q^j}\mathbf{d}q^j + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial Q^j}\mathbf{d}Q^j + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}\mathbf{d}t \ , \end{aligned}$$

kde $F^{(1)}(q^j, Q^j, t) = F(q^j, p_i(q^j, Q^j, t), t)$. Porovnáním levé a pravé strany dostáváme

$$p_j = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial q^j} \ , \qquad P_j = -\frac{\partial F^{(1)}}{\partial Q^j} \ , \qquad H' = H + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} \ . \tag{3.13}$$

- *kanonická transformace typu* 2: funkce F lze vyjádřit pomocí (q^j, P_j, t) Zaveďme funkci $F^{(2)}(q^j, P_j, t) = F(q^j, p_i(q^j, P_j, t), t) + P_j Q^j(q^i, P_i, t)$. Ze vztahu (3.5) pak plyne

$$\begin{aligned} p_j \mathbf{d} q^j - P_j \mathbf{d} Q^j - H \mathbf{d} t + H' \mathbf{d} t &= \mathbf{d}(F^{(2)} - P_j Q^j) \\ &= \mathbf{d} F^{(2)} - (\mathbf{d} P_j) Q^j - P_j \mathbf{d} Q^j \ , \end{aligned}$$

  tedy

$$p_j \mathbf{d} q^j + Q^j \mathbf{d} P_j - H \mathbf{d} t + H' \mathbf{d} t = \frac{\partial F^{(2)}}{\partial q^j} \mathbf{d} q^j + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial P_j} \mathbf{d} P_j + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} \mathbf{d} t \ .$$

  Porovnáním členů v předchozím výrazu dostáváme

$$p_j = \frac{\partial F^{(2)}}{\partial q^j} \ , \qquad Q^j = \frac{\partial F^{(2)}}{\partial P_j} \ , \qquad H' = H + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} \ . \tag{3.14}$$

- *kanonická transformace typu* 3: funkce F lze vyjádřit pomocí (p_j, Q^j, t) Zaveďme funkci $F^{(3)}(p_j, Q^j, t) = F(q^i(p_j, Q^j, t), p_j, t) - p_j q^j(p_i, Q^i, t)$ a postupujme analogicky jako v předchozích případech, tj. aplikací vztahu (3.5) a porovnáním vzniklých výrazů dostáváme

$$q^j = -\frac{\partial F^{(3)}}{\partial p_j} \ , \qquad P_j = -\frac{\partial F^{(3)}}{\partial Q^j} \ , \qquad H' = H + \frac{\partial F^{(3)}}{\partial t} \ . \tag{3.15}$$

- *kanonická transformace typu* 4: funkce F lze vyjádřit pomocí (p_j, P_j, t) Zaveďme funkci $F^{(4)}(p_j, P_j, t) = F(q^i(p_j, P_j, t), p_j, t) + P_j Q^j(p_i, P_i, t) - p_j q^j(p_i, P_i, t)$, aplikujme vztah (3.5) a porovnejme výrazy. Jako výsledek obdržíme

$$q^j = -\frac{\partial F^{(4)}}{\partial p_j} \ , \qquad Q^j = \frac{\partial F^{(4)}}{\partial P_j} \ , \qquad H' = H + \frac{\partial F^{(4)}}{\partial t} \ . \tag{3.16}$$

Tím jsme odvodili vztahy pro kanonické transformace známé z klasických učebnic mechaniky.

3.3 Geometrická interpretace Hamiltonovy-Jacobiho rovnice

V této kapitole odvodíme klasickým způsobem Hamiltonovu-Jacobiho rovnici a uvědomíme si přitom, co jednotlivé kroky znamenají v řeči geometických objektů na rozšířeném fázovém prostoru.

Vyjdeme z toho, že známe výraz pro dynamické vektorové pole **X**, viz (2.6), tedy

$$\mathbf{X} = \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} p_j} + \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} t}\ ,$$

a 2-formu $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j - \mathbf{d}H \wedge \mathbf{d}t$, viz (2.3), obojí zadané v souřadnicích (q^j, p_j, t). V úvodu této kapitoly jsme právě díky formě $\boldsymbol{\Omega}$ definovali kanonické transformace a odvodili pro ně některé užitečné vztahy.

Nyní se pokusíme provést takovou kanonickou transformaci, tedy změnu souřadnic na rozšířeném fázovém prostoru, která zjednoduší výraz pro vektorové pole **X**. Uvědomme si, že přechod $(q^j, p_j, t) \to (Q^j, P_j, t)$ vede rovněž ke změně Hamiltoniánu H na H' a umožní nám zapsat Hamiltonovy kanonické rovnice v nových souřadnicích, tedy

$$\frac{\partial H'(Q^j, P_j, t)}{\partial P_j} = \frac{\mathrm{d}Q^j}{\mathrm{d}\tau}\ , \qquad \frac{\partial H'(Q^j, P_j, t)}{\partial Q^j} = -\frac{\mathrm{d}P_j}{\mathrm{d}\tau}\ . \tag{3.17}$$

Předchozí výrazy zároveň určují dynamické vektorové pole **X** v nových souřadnicích,

$$\mathbf{X} = \frac{\partial H'}{\partial P_j}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} Q^j} - \frac{\partial H'}{\partial Q^j}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} P_j} + \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} t}\ . \tag{3.18}$$

Kanonická transformace je zadána svou generující funkcí F, viz (3.5). Tato funkce určuje také nový hamiltonián H' výrazem (3.10). Speciální volbou generují funkce je možné obdržet nový hamiltonián identicky rovný nule, tedy

$$H'(Q^j, P_j, t) \equiv 0\ . \tag{3.19}$$

Touto volbou se stávají nulovými rovněž levé strany pohybových rovnic (3.17) a vektorové pole podél vývoje přechází na velmi jednoduchý tvar

$$\mathbf{X} = \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} t}\ . \tag{3.20}$$

Řešením takto transformovaných pohybových rovnic jsou konstanty dané počátečními podmínkami

$$Q^j = \alpha^j\ , \qquad P_j = \beta_j\ . \tag{3.21}$$

Geometrická interpretace

Připomeňme, že vývoj systému je geometricky dán integrálními křivkami dynamického vektorového pole **X**. V souřadnicích jsou tyto křivky určeny řešením pohybových rovnic v konkrétních souřadnicích, tedy dvojicí funkcí $q^j(\tau)$ a $p_j(\tau)$ resp. $Q^j(\tau)$ a $P_j(\tau)$. V našem případě jsou tímto řešením v nových souřadnicích konstanty. Neznamená to však, že by se systém nevyvíjel, ale pouze to, že v každém časovém řezu máme fixovanou stále stejnou polohu systému vůči vhodným aktuálním souřadnicím. Tyto souřadnice se však dynamicky mění právě s vývojem systému, tedy dle tvaru popisovaných integrálních křivek. Tato změna je určena časově závislou generující funkcí kanonické transformace[2].

Ještě si uvědomme, že kanonická transformace je definována jako jistý speciální tok na rozšířeném fázovém prostroru, podél kterého se zachovává 2-forma $\boldsymbol{\Omega}$. V úvodu této kapitoly jsme rovněž ukázali, že fázový tok určený polem **X** generuje kanonickou transformaci. Právě této tranformaci odpovídá předchozí popis. To znamená, že celá informace o vývoji systému je nyní „uložena“ v generující funkci.

Jak najít zmíněnou speciální generující funkci?

Od této chvíle již uvažujme konkrétní typ kanonické transformace, například typ 1, kdy lze vše vyjádřit pomocí souřadnic (q^j, Q^j, t) a generující funkce $F^{(1)}$. Pro nový hamiltonián a zbylé souřadnice dostáváme, viz (3.13),

$$p_j = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial q^j}\ , \qquad P_j = -\frac{\partial F^{(1)}}{\partial Q^j}\ , \qquad H' = H + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}\ .$$

Pokud v posledním výrazu uplatníme naši podmínku nulovosti nového hamiltoniánu, dostáváme požadovanou rovnici pro generující funkci

$$H + \frac{\partial F^{(1)}(q^j, Q^j, t)}{\partial t} = 0\ . \tag{3.22}$$

Nyní již zbývá pouze označit $F^{(1)}$ jako S a dosadit za p_j do $H(q^j, p_j, t)$ výraz $p_j = \frac{\partial S}{\partial q^j}$. Tím jsme odvodili parciální diferenciální rovnici prvního řádu pro

[2]Připomeňme, že v tomto případě opět předpokládáme stejné plynutí obou časů tj. t jakožto souřadnice rozšířeného fázového prostoru a τ jakožto parametru integrální křivky, tedy volbu $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = 1$.

speciální generující funkci S zajišťující nulovost nového hamiltoniánu H',

$$H\left(q^j, \frac{\partial S}{\partial q^j}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \ . \tag{3.23}$$

což je Hamiltonova-Jacobiho rovnice.

Závěr

V této bakalářské práci jsme geometricky nahlédli na jednu kapitolu klasické mechaniky.

Formulovali jsme invariantní, tedy na souřadnicích nezávislý, tvar Hamiltonových pohybových rovnic. V první kapitole, pro hamiltoniány nezávislé na čase, s výsledkem

$$\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}H \ ,$$

a v druhé kapitole, pro hamiltoniány časově závislé,

$$\mathrm{i}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\Omega} = 0 \ .$$

Následně jsme ukázali, že vztah mezi oběma rovnicemi odpovídá přechodu od $2n$-dimenzionálního fázového prostoru (symplektické variety) k $2n+1$-dimenzionálnímu rozšířenému fázovému prostoru.

Rovněž jsme pro oba zmíněné případy zavedli kanonické transformace, to znamená změny souřadnic zachovávající tvar fundamentální 2-formy $\boldsymbol{\omega}$ resp. $\boldsymbol{\Omega}$ a tedy podobu pohybových rovnic. Odvodili jsem také konkrétní vztahy pro generující funkce kanonických transformací. Na závěr kapitoly o časově závislé mechanice jsme geometricky interpretovali Hamiltonovu-Jacobiho rovnici.

V případě časově nezávislé mechaniky jsme rovněž geometricky zavedli Poissonovy závorky a formulovali teorém Emmy Noetherové.

Literatura

[1] Podolský J.: *Teoretická mechanika v jazyce diferenciální geometrie*, studijní text, Praha 2005.

[2] Abraham R., Marsden J. E.: *Foundations of Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, 1985.

[3] Arnold V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, New York, 1978.

[4] Fecko M.: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*, Iris, Bratislava 2004.

[5] José J. V., Saletan E. J.: *Classical Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[6] Oliva W. M.: *Geometric Mechanics*, Springer, Berlin, 2002.

[7] Schutz B. F.: *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[8] Westenholz C. von: *Differential forms in mathematical physics*, North-Holland, Amsterdam 1978.