

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



František Štrupl

Geometrická formulace Lagrangeovy mechaniky

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jiří Podolský, CSc.

Studijní program: Fyzika, obecná fyzika

2006

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce doc. RNDr. Jiřímu Podolskému, CSc., a to nejen za odborné vedení a řadu cenných připomínek, ale především za možnost věnovat se tak zajímavému tématu, jakým pro mne aplikace diferenciální geometrie v teoretické mechanice jsou.

Veliký dík patří také mým rodičům, kteří mě při studiu plně podporují a poskytují mi tolik potřebné zázemí.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 5. 5. 2006

František Štrupl

Obsah

Úvod	5
1 Základy geometrické formulace Lagrangeovy mechaniky	6
1.1 Fázový portrét: dynamický systém coby vektorové pole . . .	6
1.2 Základní geometrické objekty Lagrangeova formalismu . . .	10
1.3 Lagrangeovská vektorová pole	11
1.4 Geometrická podoba Lagrangeových rovnic	12
1.5 Teorém Emmy Noetherové	16
2 Rozvinutí pojmů Lagrangeova geometrického formalismu	20
2.1 Fíbrovaný prostor	20
2.2 Fíbrovaná struktura TQ	22
2.3 Lifty na TQ	23
2.4 Vektorové pole druhého řádu	24
2.5 Lagrangeovo vektorové pole	26
2.6 Symplektická struktura na TQ	27
2.7 Hamiltonovská dynamika na TQ	29
2.8 Vztah TQ a T^*Q	32
Závěr	33
Literatura	35

Název práce: Geometrická formulace Lagrangeovy mechaniky

Autor: František Štrupl

Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jiří Podolský, CSc.

e-mail vedoucího: jiri.podolsky@mff.cuni.cz

Abstrakt: Předložená práce ukazuje možnosti aplikace diferenciální geometrie na Lagrangeův formalismus. V první kapitole jsou položeny základy geometrické formulace Lagrangeovy mechaniky, je ukázán význam tečného bandlu konfigurační variety a dynamického vektorového pole, které řeší Lagrangeovy rovnice v jejich geometrickém tvaru. Je zformulován a dokázán také významný teorém Emmy Noetherové. Druhá kapitola pak zavádí další geometrické pojmy související s Lagrangeovým formalismem v jeho geometrické podobě, a to zejména fibrovaný prostor, lifty, vektorové pole druhého řádu a Lagrangeovo vektorové pole. Ukázána je také existence symplektické struktury a hamiltonovské dynamiky na tečném bandlu konfigurační variety.

Klíčová slova: Lagrangeova mechanika, diferenciální geometrie, teorém Emmy Noetherové, fibrovaný prostor

Title: Geometric formulation of Lagrangian mechanics

Author: František Štrupl

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Doc. RNDr. Jiří Podolský, CSc.

Supervisor's e-mail address: jiri.podolsky@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study application of differential geometry to the Lagrangian formalism. In the first chapter we summarize the foundations of geometric formulation of Lagrangian mechanics, in particular we show the principal meaning of the tangent bundle of the configuration manifold and dynamical vector field which solves the Lagrange equations in their geometrical form. The Noether's theorem is also formulated and proved. The second chapter introduces other geometrical definitions related to the Lagrangian formalism, such as fiber space, lifts, second-order vector fields and Lagrangian vector fields. The existence of symplectic structure and Hamiltonian dynamics on the tangent bundle of the configuration manifold is also demonstrated.

Keywords: Lagrangian mechanics, differential geometry, Noether's theorem, fiber space

Úvod

Teoretická mechanika, do níž Lagrangeův formalismus spadá, je bezpochyby základním kamenem teoretické fyziky. Počátky moderního pojetí mechaniky lze nalézt již u Galilea či Descarta, avšak zásadní význam mají zejména Newtonovy *Principie* publikované v roce 1687.

Lagrangeova mechanika je jinou formulací klasické mechaniky, poprvé uvedenou v roce 1788 Josephem Louisem Lagrangem. Její praktický význam spočívá zejména ve výrazném zjednodušení popisu a řešení mnoha fyzikálních problémů oproti newtonovské formulaci zákonů mechaniky.

Radikální rozvoj matematických metod užívaných ve fyzice v minulém století vedl k možnosti přeformulovat Lagrangeův formalismus do elegantního jazyka diferenciální geometrie.

Hlavním impulsem pro vznik této bakalářské práce byla volitelná přednáška „Proseminář teoretické fyziky I“, poprvé uvedená na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze doc. Podolským v roce 2004. V té měli studenti možnost poznat základy diferenciální geometrie a způsoby jejích aplikací na teoretickou mechaniku.

Tato přednáška mě oslovila a začal jsem se tedy zajímat o existující studijní materiály k tomuto tématu. Ukázalo se však, že mimo standardních knih pojednávajících o teoretické mechanice v klasickém pojetí (např. [1], [2], [3]) neexistují prakticky žádné relevantní dostupné materiály v českém jazyce. Rozhodli jsme se proto po vzájemné domluvě s doc. Podolským vytvořit studijní text [4] založený na jeho přednášce. Součástí tohoto textu je i první kapitola předložené bakalářské práce.

Druhá, „rozšiřující“, kapitola bakalářské práce pak vznikla jako původní práce s tím, že i její části by v budoucnu měly být začleněny do zmíněného studijního textu.

Při psaní této bakalářské práce jsem vycházel zejména z velmi zdařilé slovenské knihy [5] a z významných monografií [6], [7]. Užitečným zdrojem informací byly také knihy [8], [9] či [10].

1 Základy geometrické formulace Lagrangeovy mechaniky

V této kapitole nejprve zavedeme základní geometrické pojmy a ukážeme, že přirozenou arénou Lagrangeovy mechaniky je tečný bandl TQ konfigurační variety Q , a že dynamický vývoj je určen vektorovým polem \mathbf{X} , které řeší Lagrangeovy rovnice v geometrickém tvaru $\mathcal{L}_x \boldsymbol{\theta}_L = \mathbf{d}L$. Integrální křivky $\gamma(t)$ tohoto pole určují fázový portrét daného systému. Zformulujeme a dokážeme významný teorém Emmy Noetherové, který dává do souvislosti symetrie Lagrangeovy funkce a zákony zachování.

1.1 Fázový portrét: dynamický systém coby vektorové pole

Fázový portrét je znázornění možného vývoje systému v grafu rychlost versus poloha, tedy $v(x)$. Prostor parametrů (x, v) nazýváme též „rychlostní fázový prostor“.

- jedná se o množinu křivek $\gamma(t)$: každým nesesingulárním bodem prochází právě jedna křivka
- každá křivka je jednoznačně určena počátečními podmínkami (x_0, v_0)
- bod v rychlostním fázovém prostoru (x, v) určuje fyzikální stav systému

Zmíněné křivky $\gamma(t)$ vývoje systému lze chápat jako *integrální křivky* speciálního vektorového pole \mathbf{X} , které nazýváme *dynamické vektorové pole*. To je (pro případ $n = 1$) určeno výrazem

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} = v \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial v}, \quad (1.1)$$

kde v je okamžitá rychlost a a je zrychlení částice, jež je v konkrétním případě určeno Newtonovou pohybovou rovnicí $ma = F$.

Ve smyslu operátoru aplikovaného na libovolnou funkci f tedy platí

$$\mathbf{X}(f) \equiv \frac{df}{dt} = v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (1.2)$$

takže složky dynamického vektorového pole v rychlostním fázovém prostoru s nezávislými souřadnicemi x, v jsou $\mathbf{X} = (v, \frac{F}{m})$. Odtud lze určit integrální křivky $\gamma(t)$ řešením soustavy rovnic

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x^k), \quad (1.3)$$

viz rovnice (1.22) v [4], kde souřadnice jsou $(x^1, x^2) \equiv (x, v)$. Explicitně tedy je

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad (1.4)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}. \quad (1.5)$$

Řešením soustavy (1.4), (1.5) dostáváme časový vývoj systému $x(t), v(t)$ v rychlostním fázovém prostoru.

Příklad: *volný pád:* $F = mg$, takže (1.1) je

$$\mathbf{X} = v \frac{\partial}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial v}. \quad (1.6)$$

Integrální křivky fázového portréту jsou *paraboly*. Opravdu, řešení určené rovnicemi (1.4), (1.5) je

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0, \quad v = gt + v_0, \quad (1.7)$$

(kde v_0, x_0 jsou integrační konstanty) takže vyloučením t dostáváme

$$x = \frac{g}{2} \left(\frac{v - v_0}{g} \right)^2 + v_0 \left(\frac{v - v_0}{g} \right) + x_0 = \frac{1}{2g}v^2 + \left(x_0 - \frac{v_0^2}{2g} \right). \quad (1.8)$$

Fázový portrét je znázorněn na obrázku 1.1.

Příklad: *harmonický oscilátor:* $F = -kx$, takže

$$\mathbf{X} = v \frac{\partial}{\partial x} - \omega^2 x \frac{\partial}{\partial v}, \quad \text{kde } \omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (1.9)$$

Integrální křivky jsou *elipsy*, tedy uzavřené křivky se singulárním bodem v $x = 0$, neboť řešení soustavy (1.4), (1.5) nyní je

$$x = A \cos(\omega t + \delta), \quad v = -A\omega \sin(\omega t + \delta), \quad (1.10)$$

(A, δ jsou konstanty) a vyloučením t opravdu dostáváme

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{A\omega}\right)^2 = 1, \quad (1.11)$$

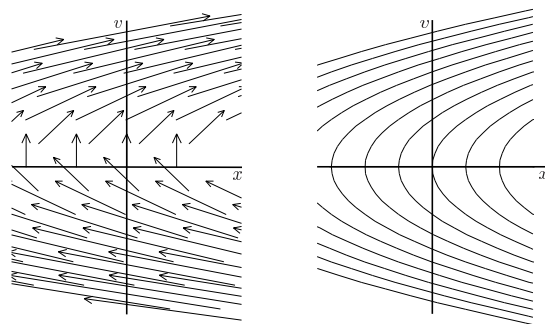
viz obrázek 1.2.

Příklad: *matematické kyvadlo:* $F = -mg \sin \varphi$. Rychlostní fázový prostor je nyní určen úhlovými parametry (φ, ω) , takže dynamické vektorové pole $\mathbf{X} = \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \omega}$ má tvar

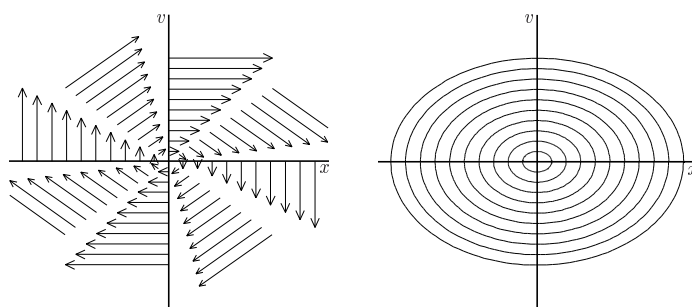
$$\mathbf{X} = \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{g}{l} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \omega}, \quad (1.12)$$

neboť pohybové rovnice určují, že úhlové zrychlení $\varepsilon = -\frac{g}{l} \sin \varphi$. Fázový portrét je znázorněn na obrázku 1.3.

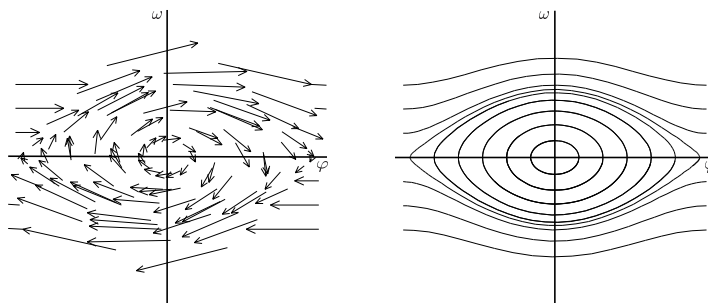
Závěr: Vidíme, že řešení úlohy v teoretické mechanice je možné převést na nalezení odpovídajícího (unikátního) dynamického vektorového pole \mathbf{X} v rychlostním fázovém prostoru. Pole \mathbf{X} je přitom geometrický objekt, který existuje *nezávisle na konkrétních souřadnicích* rychlostního fázového prostoru. Lze tedy v principu použít libovolné zobecněné souřadnice konfigurační variety. Ukážeme nyní, že pole \mathbf{X} je opravdu určeno geometricky, a to Lagrangeovými rovnicemi.



Obrázek 1.1: Dynamické vektorové pole a fázový portrét volného pádu.



Obrázek 1.2: Dynamické vektorové pole a fázový portrét harmonického oscilátoru.



Obrázek 1.3: Dynamické vektorové pole a fázový portrét matematického kyvadla.

1.2 Základní geometrické objekty Lagrangeova formalismu

Výklad lagrangeovské mechaniky v jazyce diferenciální geometrie začneme definicí několika důležitých pojmů:

- *konfigurační varieta* \mathcal{Q} je varieta všech možných poloh (tvarů) daného systému parametrizovaná zobecněnými souřadnicemi (q^1, \dots, q^n) , přičemž n je počet stupňů volnosti systému
- *tečný bandl* $T\mathcal{Q}$, neboli *rychlostní fázový prostor*, je fibrovaná varieta dimenze $2n$ parametrizovaná souřadnicemi $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$, kde q^1, \dots, q^n určují souřadnice konkrétního bodu P na varietě \mathcal{Q} a složky $\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$ specifikují konkrétní vektor z tečného prostoru $T_P\mathcal{Q}$, neboli $\mathbf{v} = \dot{q}^j \frac{\partial}{\partial q^j}$ (zdůrazněme, že \dot{q}^j označuje souřadnice, nikoli časovou derivaci funkce)
- *Lagrangeova funkce* L je skalární funkce na tečném bandlu $T\mathcal{Q}$, tedy zobrazení¹ $L : T\mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$
- *dynamické vektorové pole* $\mathbf{X} \equiv \frac{d}{dt}$ na $T\mathcal{Q}$ je vektorové pole, které je určeno Lagrangeovou funkcí L ; jeho integrální křivky $\gamma(t)$ určují fázový portrét, tj. udávají časový vývoj systému.

Ilustrace: *matematické kyvadlo*

Konfigurační varietou \mathcal{Q} matematického kyvadla je kružnice, tedy varieta \mathcal{S}^1 . Na jejím tečném bandlu $T\mathcal{Q} = T\mathcal{S}^1$ je definována Lagrangeova funkce L , která má v přirozených souřadnicích tvar $L(\varphi, \dot{\varphi})$ daný

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi. \quad (1.13)$$

Ta jednoznačně určuje dynamické vektorové pole \mathbf{X} , neboli daným bodem $Z \in T\mathcal{S}^1$ prochází právě jedna integrální křivka s tečnou \mathbf{X}_Z odpovídající konkrétnímu vývoji (viz obrázek 1.3, kde $\omega = \dot{\varphi}$).

Poznámka: Uvědomme si, že vektorové pole \mathbf{X} ve skutečnosti leží v tečném bandlu $T(T\mathcal{Q})$, nikoli přímo v $T\mathcal{Q}$. V případě matematického kyvadla tedy v $T(T\mathcal{S}^1)$. Proto je to hladký řez na $T(T\mathcal{Q})$.

¹Pokud je Lagrangeova funkce navíc také časově závislá, platí $L : T\mathcal{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. (Pokud neexistuje potenciál V , jsou působící síly popsány 1-formami $\boldsymbol{\rho} = F_i \mathbf{d}x^i = Q_j \mathbf{d}q^j$.)

1.3 Lagrangeovská vektorová pole

Cílem lagrangeovského popisu je nalézt unikátní křivku $\gamma(t)$ na konfigurační varietě \mathcal{Q} určující vývoj systému při daných počátečních podmínkách. Tuto křivku získáme projekcí π křivky $\hat{\gamma}(t)$ ležící na varietě $T\mathcal{Q}$. Připomeňme, že tečný bandl $T\mathcal{Q}$ je fibrovaný prostor s bází \mathcal{Q} (viz kapitola 1.2 v [4]), a proto $\gamma(t) = \pi(\hat{\gamma}(t))$. V lokálních souřadnicích máme $\gamma(t) \equiv (q^1(t), \dots, q^n(t))$ a $\hat{\gamma}(t) \equiv (q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t))$.

V daném bodě $P \equiv \gamma(t_0) \in \mathcal{Q}$ přitom tečna ke křivce $\gamma(t)$ určuje rychlost systému popsanou vektorem $\mathbf{v} \in T_p \mathcal{Q}$, jenž má v souřadnicové bázi tvar $\mathbf{v} = v^j \frac{\partial}{\partial q^j} = \frac{dq^j}{dt}(t_0) \frac{\partial}{\partial q^j}$. Tím je ovšem jednoznačně určen odpovídající bod $Z \equiv \hat{\gamma}(t_0) \in T\mathcal{Q}$, neboť obecně musí platit $\mathbf{v} = \dot{q}^j(t_0) \frac{\partial}{\partial q^j}$. Porovnáním obou vyjádření vektoru \mathbf{v} pro každou hodnotu parametru t_0 odtud dostáváme podmínky konzistence ve tvaru²

$$\dot{q}^j(t) = \frac{dq^j(t)}{dt}. \quad (1.14)$$

Pouze takové křivky $\hat{\gamma}(t)$ na $T\mathcal{Q}$ splňující vztah (1.14) mohou konzistentně odpovídat příslušné křivce $\gamma(t)$ na \mathcal{Q} — pak říkáme, že $\hat{\gamma}(t)$ je „zdvihem“ $\gamma(t)$, zatímco $\gamma(t)$ je „projekcí“ $\hat{\gamma}(t)$.

V Lagrangeově geometrickém formalizmu se tedy musíme omezit jen na speciální dynamická vektorová pole \mathbf{X} na $T\mathcal{Q}$, aby jimi generované integrální křivky $\hat{\gamma}(t)$ *automaticky* splňovaly podmínky (1.14). Protože obecně platí

$$\mathbf{X}(f) \equiv \frac{df}{dt} = \frac{dq^j(t)}{dt} \frac{\partial f}{\partial q^j} + \frac{d\dot{q}^j(t)}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^j}, \quad (1.15)$$

omezení daná (1.14) implikují

$$\mathbf{X} = \dot{q}^j \frac{\partial}{\partial q^j} + W^j(q^i, \dot{q}^i) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}, \quad (1.16)$$

neboť jsme identifikovali

$$\frac{dq^j}{dt} = \dot{q}^j, \quad (1.17)$$

$$\frac{d\dot{q}^j}{dt} = W^j(q^i, \dot{q}^i). \quad (1.18)$$

²Opět zdůrazněme koncepční rozdíl mezi funkcí $\dot{q}^j(t)$, souřadnicí \dot{q}^j a derivací $\frac{dq^j(t)}{dt}$ funkce $q^j(t)$.

Speciální vektorová pole³ tvaru (1.16) se nazývají *pole druhého řádu*. Dynamické vektorové pole v Lagrangeově popisu tedy musí být polem druhého řádu, aby dávalo konzistentní řešení pohybových rovnic. Rychlostní fázový prostor $T\mathcal{Q}$ má sice dimenzi $2n$, ale díky implicitní vazbě (1.14) implikující (1.16) se efektivně redukuje na n nezávislých proměnných konfigurační variety \mathcal{Q} .

Pro danou trajektorii $\gamma(t) \equiv (q^1(t), \dots, q^n(t))$ na \mathcal{Q} díky (1.17), (1.18) platí $\frac{d^2q^j}{dt^2} = \frac{dq^j}{dt} = W^j$, takže funkce W^j vyjadřují složky okamžitého zrychlení systému. Dynamicky je toto zrychlení určeno pohybovými rovnicemi v zobecněných souřadnicích, tedy Lagrangeovými rovnicemi 2. druhu, neboli $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$, kde $L(q^j, \dot{q}^j)$ je příslušná Lagrangeova funkce. Explicitním rozpisem úplné časové derivace v prvním členu dostáváme

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \frac{dq^j}{dt} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \frac{dq^j}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad (1.19)$$

takže funkce W^j jsou řešením lineární soustavy rovnic

$$A_{ji}W^j = C_i - B_{ji}\dot{q}^j, \quad (1.20)$$

kde

$$A_{ji} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}, \quad B_{ji} = \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}, \quad C_i = \frac{\partial L}{\partial q^i}, \quad (1.21)$$

jsou funkce na $T\mathcal{Q}$ určené Lagrangeovou funkcí.⁴ Vektorová pole \mathbf{X} druhého řádu na $T\mathcal{Q}$, tedy tvaru (1.16), kde funkce W^j jsou dány vztahem (1.20), nazýváme *lagrangeovská vektorová pole*. Integrální křivky právě takových polí určují dynamiku soustavy v Lagrangeově formalizmu.

1.4 Geometrická podoba Lagrangeových rovnic

Nyní můžeme přejít k otázce, jak nalézt zmíněné unikátní dynamické vektorové pole \mathbf{X} příslušné dané Lagrangeově funkci L na tečném bandlu $T\mathcal{Q}$. Ukážeme, že toto pole splňuje rovnici

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta}_L = \mathbf{d}L, \quad (1.22)$$

³Připomeňme, že obecné (hladké) vektorové pole na $T\mathcal{Q}$ má tvar $\mathbf{X} = V^j \frac{\partial}{\partial q^j} + W^j \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}$, kde V^j a W^j jsou libovolné (hladké) funkce souřadnic q^i a \dot{q}^i . Pro pole druhého řádu je speciálně $V^j = \dot{q}^j$.

⁴Matice A je invertibilní když má nenulový determinant $\det A$ zvaný hessián; takový systém je nedegenerovaný.

což je geometricky vyjádřená *Lagrangeova rovnice*, jejíž význam si nejprve ozřejmíme.

Levou stranu (1.22) tvoří Lieova derivace tzv. *Lagrangeovy 1-formy* podle námi hledaného vektorového pole \mathbf{X} (které musí být druhého řádu). Lagrangeova 1-forma je speciální 1-forma na $T\mathcal{Q}$ definovaná v lokálních zobecněných souřadnicích výrazem

$$\boldsymbol{\theta}_L \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \mathbf{d}q^j. \quad (1.23)$$

Všimněme si, že tato 1-forma, narozdíl od obecné 1-formy⁵, má pouze složky tvaru $\mathbf{d}q^j$. Striktně vzato, jedná se o pole 1-form, které jsou řezem $T^*(T\mathcal{Q})$.

Důkaz platnosti rovnice (1.22). Uvažujme Lieovu derivaci Lagrangeovy 1-formy podél obecného vektorového pole \mathbf{X} . Aplikací Leibnizova pravidla dostaneme

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta}_L = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \mathbf{d}q^j\right) = \left(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right) \mathbf{d}q^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{d}q^j). \quad (1.24)$$

Dále využijeme vztahu $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f \equiv \mathbf{X}(f) \equiv \frac{df}{dt}$, viz (1.39) v [4], a skutečnosti, že $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ a \mathbf{d} komutují, viz (1.43) též v [4],

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta}_L = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right)\right] \mathbf{d}q^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \mathbf{d}\left(\frac{dq^j}{dt}\right) = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right)\right] \mathbf{d}q^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \mathbf{d}\dot{q}^j. \quad (1.25)$$

Nyní použijeme Lagrangeovy rovnice 2. druhu v obvyklém souřadnicovém zápisu $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^j}$, které popisují dynamiku systému. Díky nim ihned dostáváme

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta}_L = \frac{\partial L}{\partial q^j} \mathbf{d}q^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \mathbf{d}\dot{q}^j = \mathbf{d}L, \quad (1.26)$$

kde v posledním kroku jsme použili výraz (1.18) z [4] pro diferenciál Lagrangeovy funkce $L(q^j, \dot{q}^j)$. Tím jsme ověřili platnost vztahu (1.22) reprezentujícího Lagrangeovy rovnice v čistě geometrické řeči, tedy jako vztahu mezi geometrickými objekty na $T\mathcal{Q}$, jenž je zcela nezávislý na souřadnicích.

☒

⁵Připomeňme, že obecná 1-forma na $T\mathcal{Q}$ má tvar $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1 \mathbf{d}q^1 + \dots + \alpha_n \mathbf{d}q^n + \beta_1 \mathbf{d}\dot{q}^1 + \dots + \beta_n \mathbf{d}\dot{q}^n$.

Připomeňme znovu význam rovnice (1.22): pro zadanou Lagrangeovu funkci L (určující jak 1-formu $\boldsymbol{\theta}_L$, tak 1-formu $\mathbf{d}L$) hledáme takové unikátní vektorové pole \mathbf{X} druhého řádu, aby platil vztah (1.22). Integrální křivky $\gamma(t)$ takového pole \mathbf{X} pak určují fyzikální vývoj daného systému.

Ilustrace: pohyb částice v potenciálu $V(q)$ v jedné dimenzi

Lagrangeova funkce má tvar

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) \quad (1.27)$$

a pro Lagrangeovu formu (1.23) tedy platí

$$\boldsymbol{\theta}_L = m\dot{q} \mathbf{d}q. \quad (1.28)$$

Dále je

$$\mathbf{d}L = -V' \mathbf{d}q + m\dot{q} \mathbf{d}\dot{q}. \quad (1.29)$$

Naším cílem je nyní najít pole

$$\mathbf{X} = X^1 \frac{\partial}{\partial q} + X^2 \frac{\partial}{\partial \dot{q}}, \quad (1.30)$$

takové aby platilo (1.22), přičemž $X^1 = \dot{q}$ a funkci $X^2(q, \dot{q})$ hledáme. Obecně platí pro Lieovu derivaci vztah

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\alpha} = \left(X^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} + \alpha_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \mathbf{d}x^i \quad (1.31)$$

kde nyní $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}_L$, takže pro $(x^1, x^2) = (q, \dot{q})$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) = (m\dot{q}, 0)$ je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta}_L &= \left(X^1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial q} + X^2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{q}} + \alpha_1 \frac{\partial X^1}{\partial q} + \alpha_2 \frac{\partial X^2}{\partial q} \right) \mathbf{d}q + \\ &\quad \left(X^1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial q} + X^2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \dot{q}} + \alpha_1 \frac{\partial X^1}{\partial \dot{q}} + \alpha_2 \frac{\partial X^2}{\partial \dot{q}} \right) \mathbf{d}\dot{q} \\ &= \left(mX^2 + m\dot{q} \frac{\partial X^1}{\partial q} \right) \mathbf{d}q + m\dot{q} \frac{\partial X^1}{\partial \dot{q}} \mathbf{d}\dot{q}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Porovnáním s $\mathbf{d}L$ z výrazu (1.29) již můžeme snadno vyjádřit obě složky hledaného vektorového pole \mathbf{X} , neboť musí platit

$$\begin{aligned} X^2 + \dot{q} \frac{\partial X^1}{\partial q} &= -\frac{1}{m}V', \\ \frac{\partial X^1}{\partial \dot{q}} &= 1. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Protože $X^1 = \dot{q}$, je druhá rovnice identicky splněna a první rovnice přímo určuje X^2 :

$$\begin{aligned} X^1 &= \dot{q}, \\ X^2 &= -\frac{1}{m}V'. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Jako **speciální ilustrace** lze uvážit

- *volnou částici* Protože $V = 0$, $q = x$, je

$$\mathbf{X} = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.35)$$

a integrální křivky $\gamma(t)$ systému jsou dány diferenciálními rovnicemi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X^1 = \dot{x}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= X^2 = 0, \end{aligned} \quad (1.36)$$

jejichž integrací dostáváme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_0 = \text{konst.} \\ x &= v_0 t + x_0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

- *volný pád* Potenciál je dán výrazem $V(x) = -mgx$, takže pole je dle (1.34) dáno

$$\mathbf{X} = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial \dot{x}}, \quad (1.38)$$

z něhož dále dostáváme diferenciální výrazy pro integrální křivky

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X^1 = \dot{x}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= X^2 = g, \end{aligned} \quad (1.39)$$

jejichž řešením je

$$\begin{aligned} \dot{x} &= gt + v_0, \\ x &= \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

1.5 Teorém Emmy Noetherové

Předpokládejme, že na $T\mathcal{Q}$ jsou dány:

- L Lagrangeova funkce systému
- \mathbf{X} dynamické vektorové pole generující tok $\Phi_t^{\mathbf{X}}$
- \mathbf{Z} další vektorové pole generující tok $\Phi_\epsilon^{\mathbf{Z}}$.

Pole \mathbf{Z} na $T\mathcal{Q}$ odpovídá *bodové transformaci* na \mathcal{Q} , tedy zobrazení $q^j \rightarrow q'^k = q'^k(q^j, \epsilon)$.

Bodová transformace na \mathcal{Q} je generována vektorovým polem \mathbf{Z}_Q takovým, že $\frac{dq^k}{d\epsilon} = Z^k(q^j)$, neboli $Z^k = \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}$.

Ilustrace: *translace* v ose x o vzdálenost ϵ je $x' = x + \epsilon$, $y' = y$. Generátorem této translace je

$$\mathbf{Z}_Q = \frac{\partial}{\partial x}. \quad (1.41)$$

Ilustrace: *rotace* kolem počátku o úhel ϵ je $r' = r$, $\varphi' = \varphi + \epsilon$. Generátorem této rotace je

$$\mathbf{Z}_Q = \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (1.42)$$

Vektorové pole $\mathbf{Z}_Q = Z^k \frac{\partial}{\partial q^k}$ „žije“ na \mathcal{Q} , zatímco pole \mathbf{Z} je jeho rozšířením na $T\mathcal{Q}$. Geometrický význam rozšíření pole \mathbf{Z}_Q na \mathbf{Z} spočívá v tom, že zatímco pole \mathbf{Z}_Q generuje tok Φ_ϵ na konfigurační varietě \mathcal{Q} , pole \mathbf{Z} generuje odpovídající tok $(\Phi_\epsilon, \Phi_{\epsilon*})$ na tečném bandlu $T\mathcal{Q}$, kde $\Phi_{\epsilon*}$ je příslušný push-forward tečného prostoru.

To znamená, že integrální křivky pole \mathbf{Z} jsou určeny $(q^j, \dot{q}^j) \rightarrow (q_\epsilon^j, \dot{q}_\epsilon^j) \equiv (\Phi_\epsilon(q^j), \Phi_{\epsilon*}(\dot{q}^j))$. Explicitní vyjádření pole \mathbf{Z} najdeme následujícím způsobem. Pole \mathbf{Z} musí být tvaru

$$\mathbf{Z} = Z^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \dot{Z}^k \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}. \quad (1.43)$$

Zadáním $Z^k(q^l)$, což jsou složky \mathbf{Z}_Q , jsou složky \dot{Z}^k již jednoznačně určeny. Musí totiž platit

$$\dot{Z}^k = \frac{d}{dt} Z^k(q^l(t)) = \frac{\partial Z^k}{\partial q^l} \dot{q}^l, \quad (1.44)$$

kde $q^l(t)$ je souřadnicové vyjádření libovolné křivky určující tečný vektor $v \in T_p \mathcal{Q}$ se složkami \dot{q}^l . (Výraz (1.45) odpovídá transformaci složek vektoru pomocí zobrazení push-forward.) Pro \mathbf{Z} tedy dostáváme

$$\mathbf{Z} = Z^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{\partial Z^k}{\partial q^l} \dot{q}^l \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}. \quad (1.45)$$

Nyní již můžeme teorém Emmy Noetherové formulovat, a to následujícím způsobem:

Teorém: Jestliže se hodnota Lagrangeovy funkce L nemění podél křivek \mathbf{Z} , neboli

$$\mathcal{L}_{\mathbf{Z}} L = 0, \quad (1.46)$$

pak funkce g daná vztahem

$$g = \langle \boldsymbol{\theta}_L, \mathbf{Z} \rangle \quad (1.47)$$

má stále stejnou hodnotu podél křivek \mathbf{X} (tedy při vývoji systému), tj. platí

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}} g = 0, \quad (1.48)$$

což odpovídá definici *integrálu pohybu*.

Abychom mohli ukázat platnost vysloveného teorému, dokážeme nejprve pomocné tvrzení:

Lemma: Platí, že

$$\langle \boldsymbol{\theta}_L, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \rangle = 0. \quad (1.49)$$

Důkaz lemmatu: Připomeňme, že vektorová pole \mathbf{X} a \mathbf{Z} jsou, viz (1.16) a (1.45),

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \dot{q}^j \frac{\partial}{\partial q^j} + W^j \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}, \\ \mathbf{Z} &= Z^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{\partial Z^k}{\partial q^l} \dot{q}^l \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Také si uvědomme, že zde můžeme vynechat všechny členy tvaru $\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}$. Opravdu: protože $\boldsymbol{\theta}_L \sim \mathbf{d}q^j$, viz definice (1.23), platí

$$\langle \boldsymbol{\theta}_L, \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \rangle = 0, \quad (1.51)$$

takže členy tvaru $\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}$ jsou v rámci tohoto důkazu dále irelevantní. Počítejme nyní komutátor⁶

$$[\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \equiv \mathbf{Z}\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{Z} \approx Z^k \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial q^j} + \frac{\partial Z^k}{\partial q^l} \dot{q}^l \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial}{\partial q^j} - \dot{q}^j \frac{\partial Z^k}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial q^k} - W^j \frac{\partial Z^k}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial}{\partial q^k}. \quad (1.52)$$

Ve výrazu (1.52) se nevyskytují členy obsahující druhé derivace, neboť se v komutátoru navzájem odečtou. Opravdu, obecně platí, že

$$\left[a \frac{\partial}{\partial x}, b \frac{\partial}{\partial y} \right] \equiv a \frac{\partial}{\partial x} b \frac{\partial}{\partial y} - b \frac{\partial}{\partial y} a \frac{\partial}{\partial x} = a \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + ab \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - b \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - ba \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \quad (1.53)$$

a členy s druhou derivací (2. a 4. člen) se tedy odečtou.

Výraz (1.52) můžeme dále upravit, uvědomíme-li si, že $\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^k} = 0$, $\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{q}^k} = \delta_k^j$ a $\frac{\partial Z^k}{\partial \dot{q}^j} = 0$, protože $Z^k(q^l)$. Je tedy

$$[\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \approx \frac{\partial Z^k}{\partial q^l} \dot{q}^l \frac{\partial}{\partial q^k} - \dot{q}^j \frac{\partial Z^k}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial q^k}. \quad (1.54)$$

Nyní již stačí jen přeznačit sčítací index j v druhém členu za l a ihned vidíme, že $[\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \approx 0$. Jak jsme tedy ukázali, komutátor $[\mathbf{Z}, \mathbf{X}]$ má obecně jenom komponenty $\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}$, a v důsledku (1.51) musí platit $\langle \boldsymbol{\theta}_L, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \rangle = 0$, čímž je důkaz lemmatu dokončen.

☒

Důkaz teorému Emmy Noetherové: Konečně můžeme elegantně s využitím právě dokázaného lemmatu ukázat platnost teorému, neboť užitím (1.42) z [4], (1.45) viz tamtéž a Lagrangeových rovnic (1.22) je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x g &= \mathcal{L}_x \langle \boldsymbol{\theta}_L, \mathbf{Z} \rangle = \langle \mathcal{L}_x \boldsymbol{\theta}_L, \mathbf{Z} \rangle + \langle \boldsymbol{\theta}_L, \mathcal{L}_x \mathbf{Z} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{d}L, \mathbf{Z} \rangle + \langle \boldsymbol{\theta}_L, [\mathbf{X}, \mathbf{Z}] \rangle = \mathbf{Z}(L) + 0 \equiv \mathcal{L}_z L = 0. \end{aligned} \quad (1.55)$$

☒

⁶Právě kvůli vynechání některých členů, které po zúžení s $\boldsymbol{\theta}_L$ vypadnou, píšeme znaménko \approx místo $=$.

Ilustrace: *invariance L vůči translaci.* Generátor translace je (1.41), tedy

$$\mathbf{Z}_Q = \frac{\partial}{\partial x} = \mathbf{Z}. \quad (1.56)$$

Například Lagrangeova funkce

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(y) \quad (1.57)$$

je vůči ní zřejmě invariantní, takže platí

$$g = \langle \boldsymbol{\theta}_L, \mathbf{Z} \rangle = \langle m\dot{x} \mathbf{d}x + m\dot{y} \mathbf{d}y, \frac{\partial}{\partial x} \rangle = m\dot{x}. \quad (1.58)$$

Rovnice (1.48) v tomto případě vyjadřuje *zákon zachování hybnosti*.

Ilustrace: *invariance L vůči rotaci.* Generátor rotace je (1.42), tedy

$$\mathbf{Z}_Q = \frac{\partial}{\partial \varphi} = \mathbf{Z}. \quad (1.59)$$

Například pro Lagrangeovu funkci tvaru

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r) \quad (1.60)$$

dostáváme

$$g = \langle \boldsymbol{\theta}_L, \mathbf{Z} \rangle = \langle m\dot{r} \mathbf{d}r + mr^2\dot{\varphi} \mathbf{d}\varphi, \frac{\partial}{\partial \varphi} \rangle = mr^2\dot{\varphi}, \quad (1.61)$$

tedy teorém Emmy Noetherové implikuje *zachování momentu hybnosti*.

Je ilustrativní podívat se na tutéž situaci také z pohledu kartézských souřadnic. V nich je generátor rotace $x' = x \cos \epsilon - y \sin \epsilon$, $y' = x \sin \epsilon + y \cos \epsilon$ dán

$$\mathbf{Z}_Q = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad (1.62)$$

takže \mathbf{Z} již nemá stejný tvar jako \mathbf{Z}_Q :

$$\mathbf{Z} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} - \dot{y} \frac{\partial}{\partial \dot{x}}. \quad (1.63)$$

Odtud pro $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y)$ dostáváme

$$g = \langle \boldsymbol{\theta}_L, \mathbf{Z} \rangle = \langle m\dot{x} \mathbf{d}x + m\dot{y} \mathbf{d}y, \mathbf{Z} \rangle = m(x\dot{y} - y\dot{x}), \quad (1.64)$$

což je opět zákon zachování momentu hybnosti, nyní ovšem vyjádřený v kartézských souřadnicích.

2 Rozvinutí pojmů Lagrangeova geometrického formalismu

2.1 Fíbrovaný prostor

Fíbrovaný prostor je vlastně jakýmsi zobecněním kartézského součinu. Nejnáze lze podstatu fíbrované struktury přiblížit, pokud si představíme varietu \mathcal{B} do jejíhož každého bodu $x \in \mathcal{B}$ je jakoby „vlepena“ další varieta F_x , viz obr. 2.1. Přitom musí platit, že variety F_x jsou ve všech bodech $x \in \mathcal{B}$ *difeomorfní*¹ s nějakou společnou „typickou“ varietou F , tj.

$$\forall x, x' \in \mathcal{B} : F_x \simeq F_{x'} \simeq F. \quad (2.1)$$

Varieta \mathcal{B} se nazývá *bázová varieta*, F je *typický fíbr* a F_x je fíbr v bodě x . Sjednocení

$$\mathcal{F} \equiv \bigcup_{x \in \mathcal{M}} F_x \quad (2.2)$$

pak nazýváme *totální prostor*. Vztah mezi totálním prostorem a bázovou varietou je přitom dán přirozeným zobrazením $F_x \rightarrow x$

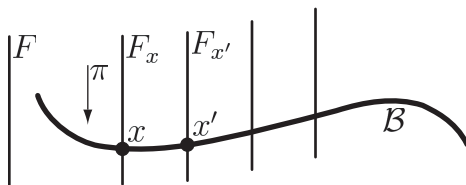
$$\pi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B} \quad (2.3)$$

nazývaným *kanonická projekce*. Pojmem fíbrovaného prostoru tedy obecně rozumíme strukturu $(\mathcal{B}, \pi, F, \mathcal{F})$ zahrnující bázovou varietu, kanonickou projekci, typický fíbr a totální prostor.

Navíc je však ještě požadována tzv. lokální součinná struktura, tj. existence pokrytí \mathcal{U}_α bázové variety \mathcal{B} a soustavy difeomorfizmů

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \rightarrow \mathcal{U}_\alpha \times F, \quad (2.4)$$

¹Dvě variety nazýváme difeomorfními, pokud mezi nimi existuje bijektivní zobrazení f a přitom platí, že f a f^{-1} jsou hladká zobrazení.



Obrázek 2.1: Schématické znázornění fibrované struktury.

takových, že

$$\pi_{\mathcal{U}}(\psi_{\alpha}) = \pi, \quad (2.5)$$

přičemž zobrazením $\pi_{\mathcal{U}}$ je myšlena projekce na \mathcal{U}_{α} . Vágně řečeno, \mathcal{F} přinejmenším lokálně vypadá jako součin $\mathcal{B} \times F$ až na to, že fibry F_x mohou být vůči sobě trochu „zkroucené“. Soustava zobrazení ψ_{α} se nazývá *lokální trivializace*.

Nejjednodušším fibrovaným prostorem je přirozeně tzv. *součinnová fibrovaná varieta*, kdy totálním prostorem je kartézský součin báze a fibru a projekcí je projekce na první člen tohoto součinu, tj.

$$\pi : \mathcal{B} \times F \rightarrow \mathcal{B}. \quad (2.6)$$

Ilustrace: Příkladem součinnové fibrované variety je časoprostor v Aristotelově pojetí. Čas i prostor jsou považovány za absolutní a časoprostor lze tak interpretovat jako čtyřrozměrnou varietu \mathcal{M}^4 definovanou kartézským součinem $\mathcal{M}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, kde $t \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Kanonická projekce je pak přirozeně dána

$$\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Naproti tomu Newtonův časoprostor, jenž je charakteristický absolutním časem avšak relativním prostorem², již není příkladem kartézského součinu času a prostoru. Přesto má fibrovanou strukturu s kanonickou projekcí

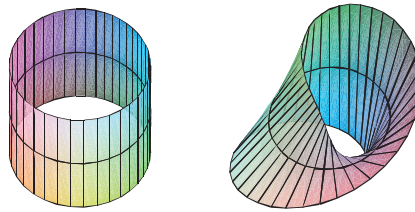
$$\pi : \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

kde \mathcal{M}^4 značí čtyřrozměrnou časoprostorovou varietu. Tato projekce přiřazuje každé časoprostorové události $x \in \mathcal{M}^4$ odpovídající hodnotu času $t = \pi(x)$. Fíbrem je v tomto případě inverzní obraz $\pi^{-1}(t)$, kde $t \in \mathbb{R}$, tedy třírozměrný prostor v daném čase. Každý fibr je přitom difeomorfní s \mathbb{R}^3 .

²Platí totiž dobře známý Galileiho princip relativity.

Fíbrovanou strukturu, avšak složitější, mají i Minkowského a Einsteinův časoprostor³.

Ilustrace: Dalšími jednoduchými příklady součinnové fíbrované variety jsou válec či Möbiův pruh. V obou případech je báze variety reprezentována kružnicí, tj. varietou S^1 , a fibr nějakým reálným intervalem $I = (a, b)$.



Obrázek 2.2: Válec a Möbiův pruh – názorné příklady součinnové fíbrované variety.

2.2 Fíbrovaná struktura TQ

Připomeňme, že TQ je tečným bandlem *konfigurační variety* Q , tj. variety lokálně popsané zobecněnými souřadnicemi (q^1, \dots, q^n) . Navíc je ovšem TQ také nosičem speciální struktury, totiž fíbrované struktury: je fíbrovanou varietou s kanonickou projekcí

$$\pi : TQ \rightarrow Q. \quad (2.9)$$

Nejjednodušším a zároveň velice přirozeným způsobem zavedení atlasu na TQ je využití atlasu na Q , a to následujícím způsobem. Jsou-li q^1, \dots, q^n lokální souřadnice nějakého bodu P z okolí $U \subset Q$, souřadnicové zobrazení

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.10)$$

³První se vyskytuje zejména ve speciální teorii relativity, druhý je pak základním pojmem obecné teorie relativity.

odpovídá mapě (\mathcal{U}, ϕ) a označíme-li

$$\hat{\mathcal{U}} \equiv \pi^{-1}(\mathcal{U}), \quad (2.11)$$

je potom možné zavést na $\hat{\mathcal{U}}$ tzv. *kanonické souřadnice* $(q^1, \dots, q^n, v^1, \dots, v^n)$, které jednoznačně určují libovolný prvek $v \in \hat{\mathcal{U}}$. Zobrazení

$$\hat{\phi} : \hat{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \quad (2.12)$$

tedy definuje mapu na $\hat{\mathcal{U}} \subset TQ$ indukovanou mapou ϕ na $\mathcal{U} \subset Q$. Soubor map $\{\hat{\mathcal{U}}, \hat{\phi}\}$ je atlas na TQ .

2.3 Lifty na TQ

*Lifty*⁴ hrají důležitou roli při geometrickém popisu lagrangeovské mechaniky.

Obecně řečeno, je lift procedura, která nějakému geometrickému objektu na báze varietě \mathcal{B} přirozeně přiřadí geometrický objekt na totálním prostoru \mathcal{F} fibrované variety s kanonickou projekcí $\pi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}$.

Máme-li například na varietě Q křivku

$$\gamma(t) : \mathbb{R} \rightarrow Q, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

potom jejím liftem na tečný bandl TQ je křivka

$$\hat{\gamma}(t) : \mathbb{R} \rightarrow TQ, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.14)$$

přičemž musí platit vztah

$$\pi(\hat{\gamma}(t)) = \gamma(t). \quad (2.15)$$

Je-li tedy $q^i(t)$ souřadnicové vyjádření křivky $\gamma(t)$, potom souřadnicové vyjádření křivky $\hat{\gamma}(t)$ je $(q^i(t), \dot{q}^i(t))$.⁵

Přejdeme nyní k úloze liftů v Lagrangeově mechanice. Lagrangeova funkce L se v teoretické mechanice zavádí jako funkce zobecněných souřadnic q^i a zobecněných rychlostí \dot{q}^i . Ty jsou zároveň, jak jsme ukázali v oddíle 2.2, kanonickými souřadnicemi na tečném bandlu TQ konfigurační variety Q . Přirozeně se proto nabízí geometricky interpretovat Lagrangeovu funkci jako funkci na fibrované varietě TQ

$$L : TQ \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

⁴Lze se též setkat s výrazem *zdvihy*.

⁵Je potřeba si uvědomit, že v tomto případě jsou q^i resp. $\dot{q}^i, \ddot{q}^i \equiv v^i$ zobecněné souřadnice na Q resp. na TQ .

Tato funkce se dá vyčíslit na přirozeném liftu $\hat{\gamma}$ trajektorie γ v konfiguračním prostoru \mathcal{Q} , neboli

$$L(t) \equiv L(\hat{\gamma}(t)). \quad (2.17)$$

Vyjádřeno v souřadnicích, křivka $\hat{\gamma}(t)$ na $T\mathcal{Q}$ je specifickým liftem křivky $\gamma(t)$ na \mathcal{Q} takovým, že

$$\gamma(t) = \{q^j(t)\} \rightarrow \hat{\gamma}(t) = \{q^j(t), \dot{q}^j(t)\}, \quad (2.18)$$

kde přitom

$$\dot{q}^j(t) \equiv \frac{dq^j(t)}{dt}. \quad (2.19)$$

Jenom mezi takto speciálně liftovanými křivkami hledáme „správná“ dynamická řešení Lagrangeových pohybových rovnic.

Poznámka: Rychlostní fázový prostor $T\mathcal{Q}$ má tedy sice dimenzi $2n$, ale díky implicitní vazbě (2.19) se redukuje na n nezávislých proměnných.

Shrnutí: Cílem lagrangeovského popisu je tedy nalézt unikátní křivku $\gamma(t)$ na konfigurační varietě \mathcal{Q} určující vývoj systému při daných počátečních podmínkách, přičemž tuto křivku získáme projekcí π odpovídající liftované křivky $\hat{\gamma}(t)$ ležící na varietě $T\mathcal{Q}$.

V následující části 2.4 ukážeme souvislost liftovaných křivek $\hat{\gamma}(t)$ s integrálními křivkami speciálních dynamických vektorových polí na $T\mathcal{Q}$, konkrétně takových, jejichž integrální křivky automaticky splňují vazbovou podmínku (2.19).

2.4 Vektorové pole druhého řádu

Uvažujme nyní soustavu obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu zadanou ve tvaru

$$\ddot{x}^j = W^j(x^k, \dot{x}^k) \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.20)$$

Zavedením nové proměnné $v^j(t) \equiv \dot{x}^j(t)$ ji přepíšeme na soustavu $2n$ rovnic prvního řádu

$$\dot{x}^j = v^j, \quad \dot{v}^j = W^j(x^k, v^k). \quad (2.21)$$

Rovnice (2.21) jsou přitom rovnicemi integrálních křivek vektorového pole (srovnej se vztahem (1.22) v [4])

$$\mathbf{X} = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} + W^j(x^k, v^k) \frac{\partial}{\partial v^j}. \quad (2.22)$$

Poznámka: Budeme-li x^j chápat jako (lokální) souřadnice na nějaké varietě \mathcal{M} , tak pole \mathbf{X} je přirozené interpretovat jako specifické vektorové pole na $T\mathcal{M}$ se souřadnicemi x^j, v^j . Není to však nejobecnější možné pole na $T\mathcal{M}$: to by mělo tvar

$$\mathbf{X} = V^j(x^k, v^k) \frac{\partial}{\partial x^j} + W^j(x^k, v^k) \frac{\partial}{\partial v^j}. \quad (2.23)$$

Konkrétně tedy pro konfigurační varietu \mathcal{Q} parametrizovanou zobecněnými souřadnicemi (q^1, \dots, q^n) a její tečný bandl $T\mathcal{Q}$ parametrizovaný souřadnicemi $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ je vektorové pole druhého řádu dáno

$$\mathbf{X}_L = \dot{q}^j \frac{\partial}{\partial q^j} + W^j(q^k, \dot{q}^k) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}. \quad (2.24)$$

Poznámka: Vektorové pole \mathbf{X} druhého řádu lze interpretovat i v řeči čistě geometrické vztahem

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \Delta, \quad (2.25)$$

kde \mathbf{S} je tzv. *vertikální endomorfismus* a Δ je *Liouvillovo pole*, což jsou *kanonická tenzorová pole* na tečném bandlu $T\mathcal{M}$. Zde \mathbf{S} je vertikální lift⁶ jednotkového tenzoru typu $\binom{1}{1}$, pro něž platí vztahy

$$\mathbf{S}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial v^j}, \quad \mathbf{S}\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right) = 0, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{d}x^j) = 0, \quad \mathbf{S}(\mathbf{d}v^j) = \mathbf{d}x^j, \quad (2.27)$$

a Δ je specifické *vertikální pole*⁷, které má v lokálních souřadnicích tvar

$$\Delta = v^j \frac{\partial}{\partial v^j}. \quad (2.28)$$

Aplikací (2.26) na vektorové pole v obecném tvaru (2.23) dostáváme

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = V^j(x^k, v^k) \frac{\partial}{\partial v^j} \quad (2.29)$$

⁶Vertikální lift je procedura, která z tenzorového pole typu $\binom{1}{1}$ na \mathcal{M} vygeneruje tenzorové pole stejného typu na $T\mathcal{M}$, viz [5], str. 513.

⁷Vertikálním polem nazýváme takové pole, které má pouze složky $\frac{\partial}{\partial v^j}$.

a je tedy vidět, že vztah (2.25) je ekvivalentní soustavě rovnic (2.21).⁸

Shrnutí: Dynamické vektorové pole v Lagrangeově formalizmu nutně musí být polem druhého řádu, aby dávalo konzistentní řešení pohybových rovnic. Přitom se ukazuje, že právě takové vektorové pole dává křivky se správným litem (2.19).

2.5 Lagrangeovo vektorové pole

Nejprve uveďme definici, kterou budeme dále potřebovat.

Definice: Řekneme, že *Lagrangeova funkce je regulární*⁹, jestliže splňuje podmínku

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \neq 0. \quad (2.30)$$

Determinant ze vztahu (2.30) se nazývá *hessián*.

Nyní zavedme speciální typ vektorového pole druhého řádu, totiž tzv. *Lagrangeovo vektorové pole*. Lagrangeovy rovnice 2. druhu v obvyklém tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad (2.31)$$

jsou ve skutečnosti speciální třídou diferenciálních rovnic druhého řádu. Máme-li tedy na $T\mathcal{Q}$ k dispozici Lagrangeovu funkci $L(q, \dot{q})$ s vhodnými matematickými vlastnostmi, lze s její pomocí zavést na $T\mathcal{Q}$ dynamiku danou právě Lagrangeovými rovnicemi na \mathcal{Q} .

Explicitní rozpis úplné časové derivace v prvním členu (2.31) dává

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \frac{d\dot{q}^j}{dt} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \frac{dq^j}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \quad (2.32)$$

Vztah (2.32) představuje lineární soustavu rovnic pro veličinu $W^j \equiv \frac{d\dot{q}^j}{dt}$, kterou lze zapsat ve tvaru

$$A_{ji}W^j = C_i - B_{ji}\dot{q}^j, \quad (2.33)$$

⁸Více informací o kanonických tenzorových polích na tečném bandlu $T\mathcal{Q}$ lze nalézt např. v [5], kapitola 17.5.

⁹Lze se též setkat s pojmy nesingulární, nedegevaná.

kde

$$A_{ji} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}, \quad B_{ji} = \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}, \quad C_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad (2.34)$$

jsou funkce na $T\mathcal{Q}$ určené Lagrangeovou funkcí a $W^j = W^j(q^k, \dot{q}^k)$ je funkce ze vztahů (2.20) až (2.24). Za předpokladu regulárnosti Lagrangeovy funkce jsou tedy W^j řešením soustavy rovnic (2.33).

Shrnutí: Vektorová pole druhého řádu na $T\mathcal{Q}$, tedy pole tvaru (2.24), kde funkce W^j jsou dány vztahem (2.33), nazýváme *lagrangeovská vektorová pole*. Integrální křivky právě takových polí určují dynamiku soustavy v Lagrangeově formalizmu.

2.6 Symplektická struktura na $T\mathcal{Q}$

V této části ukážeme, jak existence regulární Lagrangeovy funkce umožňuje zavedení tzv. *symplektické struktury* na $T\mathcal{Q}$. Nejprve definujeme několik důležitých pojmů.

Definice: *Lagrangeova 1-forma* θ_L je 1-forma na $T\mathcal{Q}$ (přesněji $\theta_L \in T^*(T\mathcal{Q})$) definovaná v lokálních zobecněných souřadnicích vztahem

$$\theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \mathbf{d}q^i. \quad (2.35)$$

Definice: *Lagrangeova 2-forma* ω_L je 2-forma definovaná jako

$$\omega_L \equiv \mathbf{d}\theta_L = -\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \mathbf{d}\dot{q}^i \wedge \mathbf{d}\dot{q}^j, \quad (2.36)$$

což lze pomocí „blokového“ přepisu v souřadnicové bázi 2-forem vyjádřit následujícím způsobem

$$(\omega_L)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} & & \\ & \ddots & & -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} & & & \ddots \\ & & 0 & & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Ukážeme nyní, že Lagrangeova 2-forma ω_L je symplektická, tedy uzavřená a negenerovaná. Uzavřenost Lagrangeovy 2-formy je vidět přímo z definice (2.36),

$$d\omega_L = d^2\theta_L \equiv 0. \quad (2.38)$$

Podmínkou její nedegenerovanosti je regularita Lagrangeovy funkce. Každou 2-formu lze totiž ve složkách zapsat jako

$$\omega = \frac{1}{2!} \omega_{\alpha\beta} \mathbf{d}u^\alpha \wedge \mathbf{d}u^\beta = \sum_{\alpha < \beta} \omega_{\alpha\beta} \mathbf{d}u^\alpha \wedge \mathbf{d}u^\beta, \quad (2.39)$$

přičemž $\{\mathbf{d}u^\alpha \wedge \mathbf{d}u^\beta\}$ tvoří bázi všech 2-forem, zde $\mathbf{d}u^\alpha$ jsou buď $\mathbf{d}q^i$ nebo $\mathbf{d}\dot{q}^i$. Podmínkou pro nedegenerovanost 2-formy zapsané ve tvaru (2.39) je pak existence inverzní matice $\omega^{\alpha\beta}$, což je ekvivalentní podmínce

$$\det(\omega_{\alpha\beta}) \neq 0. \quad (2.40)$$

Zavedením jednotného značení lokálních souřadnic na tečném bandlu $T\mathcal{Q}$ dimenze $2n$ vztahem

$$(u^1, \dots, u^n, u^{n+1}, \dots, u^{2n}) \equiv (q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n), \quad (2.41)$$

tedy

$$u^j = q^j, \quad u^{j+n} = \dot{q}^j \quad \text{pro } j = 1, \dots, n, \quad (2.42)$$

lze pak z (2.37) již snadno ukázat, že podmínka (2.40) odpovídá platnosti

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \neq 0, \quad (2.43)$$

což je podle našich předpokladů o regularitě L dle vztahu (2.30) splněno.

Shrnutí: Je vidět, že pro regulární Lagrangeovu funkci je Lagrangeova 2-forma ω_L symplektická forma na tečném bandlu konfigurační variety TQ a činí tak z TQ symplektickou varietu.

2.7 Hamiltonovská dynamika na TQ

Cílem této části je ukázat, že symplektická struktura na tečném bandlu TQ konfigurační variety přímo implikuje existenci hamiltonovské dynamiky na TQ . Jedná se přitom právě o dynamiku danou Lagrangeovými rovnicemi.

Chceme-li nyní na varietu TQ , o které již víme, že je díky Lagrangeově 2-formě ω_L nosičem symplektické struktury, zavést dynamiku, můžeme na TQ zavést tzv. hamiltonovské pole.

Definice: *Hamiltonovským vektorovým polem* X_f odpovídajícím libovolné funkci f na varietě Q je myšleno vektorové pole splňující definiční vztah

$$i_{X_f} \omega_L = \mathbf{d}f. \quad (2.44)$$

Výběrem vhodné generující funkce $f \equiv H$ můžeme získat *hamiltonovský systém* (TQ, ω_L, H) . Funkci H generující časový vývoj systému pak nazýváme *hamiltonián*.

Ukazuje se navíc, že vhodnou volbou funkce H získáme dynamiku hamiltonovského systému odpovídající dynamice generované Lagrangeovými rovnicemi 2. druhu.

Definice: Máme-li na TQ dānu Lagrangeovu funkci $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, pak definujeme funkci E_L , které říkáme *energie odpovídající Lagrangeově funkci*, vztahem

$$E_L = \dot{q}^j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - L. \quad (2.45)$$

Funkce E_L v jistém smyslu souvisí s příslušným hamiltoniánem H , neboť integrální křivky dynamického pole příslušejícího funkci E_L (tj. odpovídající

Lagrangeovým rovnicím 2. druhu) se po projekci na konfigurační varietu Q shodují s projekcemi křivek odpovídajících Hamiltonovým rovnicím v Hamiltonově formalizmu na fázové varietě T^*Q .

Tvrzení: Lagrangeovo vektorové pole \mathbf{X}_L , viz (2.24), příslušející dané Lagrangeově funkci L , tj. dynamické vektorové pole udávající vývoj systému, musí splňovat rovnici

$$i_{\mathbf{X}_L} \boldsymbol{\omega}_L = \mathbf{d}E_L. \quad (2.46)$$

Důkaz: Pro diferenciál energie $\mathbf{d}E_L$ odpovídající Lagrangeově funkci zřejmě podle (2.45) platí

$$\mathbf{d}E_L = \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} \mathbf{d}q^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \mathbf{d}q^i + \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \mathbf{d}\dot{q}^i, \quad (2.47)$$

protože dva členy se navzájem kompenzují.

Nyní budeme naopak počítat levou stranu rovnice (2.46), tj. vložení vektorového pole \mathbf{X}_L do symplektické Lagrangeovy 2-formy $\boldsymbol{\omega}_L$. Kombinací vztahů (2.24), (2.33) a (2.34) dostáváme pro vektorové pole \mathbf{X}_L zapsané ve složkách výraz

$$\mathbf{X}_L = \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^l} \right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^l} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^l} \dot{q}^m \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}, \quad (2.48)$$

kde $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^l} \right)^{-1}$ vyznačuje inverzní matici. Vyjádření Lagrangeovy 2-formy ve složkách udává vztah (2.36). Připomeňme dále, že operace vložení do 2-formy je definována vztahem

$$i_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta})(\bullet, \mathbf{X}) = \boldsymbol{\alpha}(\bullet)\boldsymbol{\beta}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\beta}(\bullet)\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}), \quad (2.49)$$

kde $\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}$ je 2-forma vzniklá z 1-forem $\boldsymbol{\alpha}$ resp. $\boldsymbol{\beta}$. Platí přitom, že

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}) = \alpha_j X^j. \quad (2.50)$$

Ve složkách lze operaci vložení do 2-formy vyjádřit jako

$$i_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\omega} = (i_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\omega})_{\alpha} \mathbf{d}u^{\alpha}, \quad (2.51)$$

kde

$$(i_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\omega})_{\alpha} = \omega_{\alpha\beta} X^{\beta}. \quad (2.52)$$

Abychom výpočet $i_{\mathbf{x}_L} \omega_L$ zjednodušili a zpřehlednili, využijeme nejprve linearity operace vložení do 2-formy. Dostáváme tedy

$$i_{\mathbf{x}_L} \omega_L = i_{\mathbf{x}_L} \omega_L^{(1)} + i_{\mathbf{x}_L} \omega_L^{(2)}, \quad (2.53)$$

kde jsme označili

$$\omega_L^{(1)} = -\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j, \quad (2.54)$$

$$\omega_L^{(2)} = -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}\dot{q}^j. \quad (2.55)$$

Dále označíme také jednotlivé členy vektorového pole

$$\mathbf{X}_L^{(1)} = \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k}, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{X}_L^{(2)} = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^l} \right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^l} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^l} \dot{q}^m \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}, \quad (2.57)$$

takže platí

$$\mathbf{X}_L = \mathbf{X}_L^{(1)} + \mathbf{X}_L^{(2)}. \quad (2.58)$$

Operaci vložení Lagrangeova vektorového pole do Lagrangeovy 2-formy tak nyní můžeme rozepsat na součet čtyř členů

$$i_{\mathbf{x}_L} \omega_L = i_{\mathbf{x}_L^{(1)}} \omega_L^{(1)} + i_{\mathbf{x}_L^{(2)}} \omega_L^{(1)} + i_{\mathbf{x}_L^{(1)}} \omega_L^{(2)} + i_{\mathbf{x}_L^{(2)}} \omega_L^{(2)}. \quad (2.59)$$

Pro jednotlivé členy pak snadno užitím vztahů (2.49) a (2.50) dostaneme

$$i_{\mathbf{x}_L^{(1)}} \omega_L^{(1)} = -\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^k \frac{\partial q^j}{\partial q^k} \mathbf{d}q^i + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^k \frac{\partial q^i}{\partial q^k} \mathbf{d}q^j, \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{x}_L^{(2)}} \omega_L^{(1)} &= -\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^l} \right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^l} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^l} \dot{q}^m \right) \frac{\partial q^j}{\partial \dot{q}^k} \mathbf{d}q^i \\ &+ \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^l} \right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^l} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^l} \dot{q}^m \right) \frac{\partial q^i}{\partial \dot{q}^k} \mathbf{d}q^j, \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$i_{\mathbf{x}_L^{(1)}} \omega_L^{(2)} = -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^k \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^k} \mathbf{d}q^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^k \frac{\partial q^i}{\partial q^k} \mathbf{d}\dot{q}^j, \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{x}_L^{(2)}} \omega_L^{(2)} &= -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^l} \right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^l} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^l} \dot{q}^m \right) \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{q}^k} \mathbf{d}q^i, \\ &+ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^l} \right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^l} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^l} \dot{q}^m \right) \frac{\partial q^i}{\partial \dot{q}^k} \mathbf{d}\dot{q}^j. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Dále si stačí uvědomit, že platí

$$\frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_j^i, \quad \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{q}^j} = \delta_j^i, \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial q^i}{\partial \dot{q}^j} = 0, \quad \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} = 0, \quad (2.65)$$

takže vztahy (2.60) až (2.63) pro jednotlivé operace vložení se redukuje na

$$i_{\mathbf{x}_L^{(1)}} \omega_L^{(1)} = -\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j \mathbf{d}q^i + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \mathbf{d}q^j, \quad (2.66)$$

$$i_{\mathbf{x}_L^{(2)}} \omega_L^{(1)} = 0,$$

$$i_{\mathbf{x}_L^{(1)}} \omega_L^{(2)} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \mathbf{d}q^j, \quad (2.67)$$

$$i_{\mathbf{x}_L^{(2)}} \omega_L^{(2)} = -\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^i} \dot{q}^m \right) \mathbf{d}q^i. \quad (2.68)$$

$$(2.69)$$

Nakonec dosadíme zpět do vzorce (2.59), přeznačíme některé sčítací indexy a tak dostaneme

$$i_{\mathbf{x}_L} \omega_L = \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} \mathbf{d}q^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \mathbf{d}q^i + \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \mathbf{d}q^i, \quad (2.70)$$

což je podle (2.47) rovno právě $\mathbf{d}E_L$.

Poznámka: Jestliže Lagrangeovo vektorové pole \mathbf{X}_L existuje, můžeme definovat konzistentní pohybové rovnice druhého řádu. Obecně však toto pole existovat nemusí a ani nemusí být jednoznačné. Podmínkou jednoznačné existence vektorového pole \mathbf{X}_L je právě regularita Lagrangeovy funkce L .

2.8 Vztah TQ a T^*Q

Tečný band TQ i kotečný bandl T^*Q konfigurační variety jsou dobrými nosiči dynamiky. Máme tedy na výběr mezi dvěma hamiltonovskými systémy: (TQ, ω_L, E_L) na tečném bandlu a (T^*Q, ω, H) na kotečném bandlu.

Vztah mezi nimi, tj. vztah mezi lagrangeovskou a hamiltonovskou mechanikou, je reprezentován speciálním difeomorfním zobrazením nazývaným *Legendreova transformace*.

Přechod od tečného bandlu TQ ke kotečnému bandlu T^*Q je v lokálních souřadnicích definován jako zobrazení

$$TQ \rightarrow T^*Q : (q^j, \dot{q}^j) \rightarrow (q^j, p_j) \equiv \left(q^j, \frac{\partial H}{\partial \dot{q}^j} \right). \quad (2.71)$$

Podmínkou, která zaručuje difeomorfnost tohoto zobrazení, je přitom regularita Lagrangeovy funkce L .

Je ihned vidět, že aplikujeme-li zobrazení (2.71) na energii odpovídající Lagrangeově funkci E_L , dostaneme právě Hamiltonovu funkci H ,

$$E_L \equiv \dot{q}^j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - L(q^j, \dot{q}^j) \quad \rightarrow \quad H \equiv \dot{q}^j p_j(q^k, p_i) - L(q^j, \dot{q}^j(q^k, p_i)) \quad (2.72)$$

a dále také, že Lagrangeova 1-forma θ_L přechází na kanonickou *Cartanovu 1-formu* θ_0 ,

$$\theta_L \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} dq^j \quad \rightarrow \quad \theta_0 \equiv p_j dq^j. \quad (2.73)$$

Poznámka: Kotečný bandl T^*Q konfigurační variety je výhodnějším nosičem dynamiky, neboť symplektická struktura je na něm kanonická, tj. Cartanova 2-forma ω_0 existuje *nezávisle* na konkrétním hamiltoniánu H . Dynamika je pak dána přímo určením Hamiltoniánu H . Naproti tomu, na tečném bandlu TQ musíme Lagrangeovu 2-formu ω_L nejprve získat z konkrétní Lagrangeovy funkce L .

Problematika vztahu mezi tečným bandlem TQ a kotečným bandlem T^*Q je podrobněji diskutována např. v kapitole 18.3 knihy [5].

Závěr

Úkolem této bakalářské práce bylo přehledně zformulovat základy diferenciálně-geometrického popisu lagrangeovské mechaniky. Práce si samozřejmě nekladla za cíl stát se podrobnou monografií, ale spíše jen „vstupní bránou“ do daného tématu.

První kapitola, v níž jsou zavedeny nezbytné základní geometrické pojmy, seznamuje čtenáře nejprve s významem vektorového pole pro popis dynamických systémů, přičemž pojem vektorového pole je ilustrován i na konkrétních elementárních příkladech (volný pád, harmonický oscilátor, matematické kyvadlo). Dále je pak zavedena konfigurační varieta \mathcal{Q} , jakožto varieta všech možných poloh daného systému, a její tečný bandl $T\mathcal{Q}$, který představuje rychlostní fázový prostor. Následuje formulace Lagrangeových rovnic a teoremu Emmy Noetherové v geometrické podobě.

Druhá kapitola nejprve rozvádí důležitý pojem fibrovaného prostoru, který je opět ilustrován na několika příkladech, a dále také ukazuje, že nosičem vhodné fibrované struktury je i tečný bandl $T\mathcal{Q}$. Následuje podrobný popis vektorových polí druhého řádu a jejich speciálního případu, Lagrangeova vektorového pole. Kapitola je zakončena ukázáním souvislosti existence symplektické struktury na tečném bandlu $T\mathcal{Q}$ s existencí hamiltonovské dynamiky na $T\mathcal{Q}$ a $T^*\mathcal{Q}$.

Doufám, že tato práce usnadní případným zájemcům o dané téma rychle se v problematice zorientovat, přičemž při hlubším zájmu o poznání aplikace diferencielní geometrie na lagrangeovskou mechaniku mohou sáhnout po některé z knih uvedených v seznamu použité literatury.

Literatura

- [1] Brdička M., Hladík A.: *Teoretická mechanika*, Academia, Praha, 1987.
- [2] Horský J., Novotný J., Štefaník M.: *Mechanika ve fyzice*, Academia, Praha, 2001.
- [3] Kvasnica J. a kol.: *Mechanika*, Academia, Praha, 1988.
- [4] Podolský J.: *Teoretická mechanika v jazyce diferenciální geometrie*, studijní text, Praha, 2005.
- [5] Fecko M.: *Diferenciálna geometria pre fyzikov a Lieove grupy*, Iris, Bratislava, 2004.
- [6] Abraham R., Marsden J. E.: *Foundations of Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, 1985.
- [7] Westenholz C. von: *Differential Forms in Mathematical Physics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.
- [8] Arnold V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, New York, 1978.
- [9] Johns O. D.: *Analytical Mechanics for Relativity and Quantum Mechanics*, Oxford University Press, New York, 2005.
- [10] Oliva W. M.: *Geometric Mechanics*, Springer, Berlin, 2002.