Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Diplomová práce

Gravitační vlny ve vysokofrekvenční aproximaci

Otakar Svítek

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: *RNDr. Jiří Podolský, CSc.*
Studijní program: *Fyzika, Teoretická fyzika*

Děkuji Dr. Jiřímu Podolskému za pečlivé vedení práce a trpělivost při četných konzultacích.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 16.4.2001 Otakar Svítek

Obsah

Úvod

Studium gravitačních vln dnes představuje rozsáhlý a také aktuální obor, a to zejména v souvislosti s připravovanými nebo již probíhajícími projekty výstavby velkých detektorů gravitačních vln na principu laserové interferometrie. Jedná se především o projekt LIGO ve Spojených Státech a podobný italsko-francouzský VIRGO [1]. Na prvním z nich by již do roka měla začít první vědecká měření. Citlivost detektorů řádu $h < 10^{-21}$ by měla poprvé umožnit přímou detekci gravitačního záření vznikajícího v extrémních astrofyzikálních situacích, jako jsou srážky černých děr či výbuchy supernov [2].

Vzhledem ke kovariantnímu charakteru Einsteinovy teorie relativity je ovšem principiálně problematické podat *obecnou a invariantní* definici prostoročasů obsahujících gravitační vlny. K tomu přistupuje problém charakterizace lokální energie gravitačního pole a nelineární tvar rovnic pole. Na základě analogie s elektromagnetismem byla (v různých formalismech) provedena algebraická klasifikace gravitačních polí na šest základních typů (viz [3]). Typ pole označovaný jako N je dnes obecně chápán jako prostoročas obsahující gravitační vlny. V literatuře byla proto podrobně zkoumána přesná řešení Einsteinových rovnic algebraického typu N, především rovinné pp-vlny [4], cylindrické Einsteinovy-Rosenovy vlny [5], i „sférické“ vlny Robinsonova-Trautmanova typu [6]. Tyto i další významné zářivé prostoročasy jsou podrobně popsány spolu s řadou citací v [7] a speciálně pak v [8]. Je ovšem zřejmé, že vzhledem ke komplikovanému nelineárnímu charakteru Einsteinových rovnic gravitačního pole jsou všechna doposud zkoumaná *přesná* zářivá řešení jen „modelová“, tedy v té či oné míře „fyzikálně nerealistická“.

Ke studiu realistického záření astrofyzikálních zdrojů, které dle očekávání budou zaznamenávat právě budované detektory, je proto nutné používat různé *aproximativní* metody a přístupy. První krok v tomto směru provedl sám Einstein již v roce 1916 [9], když z rovnic pole odvodil *linearizované* gravitační vlny v plochém prostoročase. Při zkoumání gravitačního záření generovaného astrofyzikálními zdroji se uplatňují především multipólové rozvoje [10], nebo též metody numerické relativity. Z pochopitelných důvodů se studium linearizovaných gravitačních vln v minulosti soustřeďovalo především na záření v plochých resp. asymptoticky plochých vesmírech, přičemž se zanedbával vliv vln na geometrii pozadí.

V roce 1968 Isaacson v dnes již klasické práci [11] prezentoval zajímavou metodu, která umožňuje konzistentním způsobem zkoumat vlastnosti gravitačních vln *vysoké frekvence*, které se šíří v *zakřivených* prostoročasech. Vysokofrekvenční gravitační záření podobným způsobem studovala i Choquet-Bruhatová [12]. V pozdějších letech byl dále rozvinut přístup vycházející z lagrangeovské formulace teorie relativity [13], [14]. Jiný formalismus k popisu problému, založený na užití slabé limity, vybudoval Burnett [15] a dále ho rozvinuli a aplikovali Hogan a Futamase [16].

Cílem předkládané diplomové práce je popsat, zobecnit a aplikovat Isaacsonovu perturbační metodu na zajímavé konkrétní situace. Vysokofrekvenční gravitační vlny v Isaacsonově přístupu přispívají podstatným způsobem ke křivosti pozadí na němž se samy šíří, neboť příslušná metoda umožňuje nejen určit chování vlny, ale také pomocí středovaní „lokalizovat“ jejich energii. Tu lze samozřejmě připsat i klasickým linearizovaným vlnám (odvozují se pro ně různé tenzory energie a hybnosti, které však mají problémy s kalibrační invariancí), ale je neporovnatelně menší. Navíc samo pozadí (např. plochý Minkowského prostoročas), na němž se linearizované vlny pohybují, nepřipouští žádné ovlivnění přítomností gravitačních vln. Tato nekonzistence klasického perturbativního přístupu (kterou lze ovšem přejít poukazem na aproximaci pouze prvního řádu) byla napravena v nedávném článku M. Efroimského [17], který probereme spolu s článkem Isaacsonovým v přehledové části.

V původní části této práce ukážeme, že Efroimského přístup nelze bez úprav užít pro vysokofrekvenční perturbace, proto ho následně zobecníme i na tento případ a porovnáme s Isaacsonovými výsledky. Poté zobecníme také Isaacsonovu perturbační metodu na významnou třídu nevakuových prostoročasů. Na následujících stranách původní části práce užijeme (po vzoru Isaacsona) WKB aproximaci k vyřešení rovnic pole pro pozadí a perturbace v případě rovinných, cylindrických a „sférických“ vln. Poslední část práce bude věnována řešení Isaacsonovy vlnové rovnice pro perturbace v případě FRW modelů křivosti $k = 0$, zejména pak budeme diskutovat vysokofrekvenční gravitační vlny, které se mohou šířit v de Sitterově a anti-de Sitterově vesmíru.

Kapitola 1

Rozbor hlavních článků souvisejících s tématem

1.1 Isaacsonova vysokofrekvenční aproximace

1.1.1 Rozvoje základních tenzorů

Isaacson ve svém fundamentálním článku [11] studuje prostoročasy, které lze chápat jako pomalu se měnící pozadí (popsané metrikou $\gamma_{\mu\nu}$) s perturbacemi $h_{\mu\nu}$ malé amplitudy, zato vysoké frekvence, přičemž kompletní prostoročas $g_{\mu\nu}$ je řešením vakuových Einsteinových rovnic. Takový postup poprvé užili Brill a Hartle již v šedesátých letech při studiu gravitačního geonu [18].

Zmíněný přístup lze formalizovat rozvojem metriky

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \,, \tag{1.1}$$

kde $\gamma = O(1)$ a $h = O(\varepsilon)$. Parametr „malosti“ $\varepsilon = \lambda/L$ je poměrem typické vlnové délky λ gravitační vlny a škály L, na níž se podstatně mění zakřivení pozadí. O vysokofrekvenční aproximaci můžeme tedy mluvit pokud $\varepsilon \ll 1$, t.j. $\lambda \ll L$. Škálu L považujeme za konečnou řádu jednotky a můžeme tedy psát $O(\varepsilon) = O(\lambda)$. Isaacson [11] zavádí parametry ε a λ jako nezávislé a vztah mezi nimi určuje až na základě řádových úvah z Einsteinových rovnic; v případě nulového tenzoru energie hybnosti pak dostává výše uvedené vztahy. Naše obecnější zavedení ovšem na tomto předpokladu nezávisí, čehož později využijeme.

Před vlastním odvozením dynamických rovnic pro pozadí a perturbace si povšimněme, že symbolicky lze řády derivací zapsat

$$\partial\gamma \sim \frac{\gamma}{L} \,,\ \partial h \sim \frac{h}{\lambda} \,. \tag{1.2}$$

Tyto odhady ihned plynou z výše popsaného zavedení parametrů L a λ. Shrneme-li uvedené předpoklady, můžeme říci, že *prostoročas obsahuje vysokofrekvenční gravitační* *vlny* v Isaacsonově smyslu, pokud existuje třída souřadnic (steady coordinates), vzájemně spojených infinitesimální transformací souřadnic (viz. 1.1.2), ve kterých má metrika tvar (1.1), přičemž

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= O(1) , & h_{\mu\nu} &= O(\varepsilon) , \\ \gamma_{\mu\nu,\alpha} &= O(1) , & h_{\mu\nu,\alpha} &= O(1) , \\ \gamma_{\mu\nu,\alpha\beta} &= O(1) , & h_{\mu\nu,\alpha\beta} &= O(\varepsilon^{-1}) , \end{aligned} \tag{1.3}$$

a pro Riemannův tenzor platí $R_{\mu\nu\gamma\delta} = O(\varepsilon^{-1})$. Poslední tvrzení snadno dokážeme rozvojem Riemannova tenzoru v mocninách perturbací h

$$R_{\mu\nu\gamma\delta}(g) = R^{(0)}_{\mu\nu\gamma\delta}(\gamma) + R^{(1)}_{\mu\nu\gamma\delta}(\gamma, h) + R^{(2)}_{\mu\nu\gamma\delta}(\gamma, h) + R^{(3)}_{\mu\nu\gamma\delta}(\gamma, h) + O(h^4) , \tag{1.4}$$

kde

$$R^{(0)}_{\mu\nu\gamma\delta}(\gamma) \equiv R_{\mu\nu\gamma\delta}(\gamma) , \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{\mu\nu\gamma\delta}(\gamma, h) \equiv\ & \tfrac{1}{2} \left(h_{\nu\gamma;\mu\delta} + h_{\mu\delta;\nu\gamma} - h_{\mu\gamma;\nu\delta} - h_{\nu\delta;\mu\gamma} + \right. \\ & \left. R^{(0)}_{\nu\sigma\gamma\delta} h^{\sigma}{}_{\mu} - R^{(0)}_{\mu\sigma\gamma\delta} h^{\sigma}{}_{\nu} \right) , \end{aligned} \tag{1.6}$$

$R^{(2)}_{\mu\nu\gamma\delta}$ obsahuje kvadratické členy v h atd. Kovariantní derivace počítáme vůči metrice pozadí γ, kterou užíváme také ke snižování a zvyšování indexů. Platí přitom $g^{-1} = \gamma^{-1} - h\gamma^{-2} + h^2\gamma^{-3} + \dots$. Nyní pomocí (1.1), (1.3) snadno určíme řády jednotlivých členů v rozvoji (1.4). Dominantní je člen $R^{(1)}_{\mu\nu\gamma\delta} = O(\varepsilon^{-1})$, o řád menší jsou $R^{(0)}_{\mu\nu\gamma\delta} = O(1) = R^{(2)}_{\mu\nu\gamma\delta}$ a $R^{(3)}_{\mu\nu\gamma\delta} = O(\varepsilon)$. V následující části 1.1.2 si ukážeme kalibrační invarianci dominantního členu. Díky tomu můžeme $R^{(1)}_{\mu\nu\gamma\delta}$ užít k invariantnímu rozlišení souřadnicových a skutečných gravitačních vln. V nepřítomnosti vln (t.j. pro $h_{\mu\nu} = 0$) se Riemannův tenzor $R_{\mu\nu\gamma\delta}(g)$ redukuje na $R^{(0)}_{\mu\nu\gamma\delta}$. V přítomnosti vysokofrekvenčních gravitačních vln však celkové zakřivení prostoročasu rapidně vzroste díky dominantnímu členu $R^{(1)}_{\mu\nu\gamma\delta}$. Pokud v prostoročase vlny přítomny nejsou, zato kalibrační transformace dá vzniknout „vlnám“ souřadnicovým, zakřivení je stále dáno pouze výrazem $R^{(0)}_{\mu\nu\gamma\delta}$, a to díky kalibrační invarianci dominantního členu.

Navíc se lze lehce přesvědčit, že $R^{(1)}_{\mu\nu\gamma\delta}$ splňuje všechny symetrie Riemannova tenzoru, pouze Bianchiho identity platí jen ve vysokofrekvenční limitě:

$$R^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta;\gamma} + R^{(1)}_{\mu\nu\gamma\alpha;\beta} + R^{(1)}_{\mu\nu\beta\gamma;\alpha} = O(1) ,$$

neboť levá strana je řádu $O(\varepsilon^{-2})$.

Abychom získali dynamické rovnice, rozvineme stejným způsobem Ricciho tenzor a dostaneme

$$R_{\mu\nu}(g) = R^{(0)}_{\mu\nu}(\gamma) + R^{(1)}_{\mu\nu}(\gamma, h) + R^{(2)}_{\mu\nu}(\gamma, h) + R^{(3)}_{\mu\nu}(\gamma, h) + O(h^4) , \tag{1.7}$$

kde

$$
\begin{aligned}
R^{(0)}_{\mu\nu}(\gamma) &= R_{\mu\nu}(\gamma)\,, && (1.8)\\
R^{(1)}_{\mu\nu}(\gamma,h) &= \tfrac{1}{2}\gamma^{\rho\tau}\left(h_{\tau\mu;\nu\rho}+h_{\tau\nu;\mu\rho}-h_{\rho\tau;\mu\nu}-h_{\mu\nu;\rho\tau}\right)\,, && (1.9)\\
R^{(2)}_{\mu\nu}(\gamma,h) &= \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2}h^{\rho\tau}{}_{;\nu}h_{\rho\tau;\mu}+h^{\rho\tau}\left(h_{\tau\rho;\mu\nu}+h_{\mu\nu;\tau\rho}-h_{\tau\mu;\nu\rho}-h_{\tau\nu;\mu\rho}\right)+\\
&\quad h^{\tau}{}_{\nu}{}^{;\rho}\left(h_{\tau\mu;\rho}-h_{\rho\mu;\tau}\right)-\left(h^{\rho\tau}{}_{;\rho}-\tfrac{1}{2}h^{;\tau}\right)\left(h_{\tau\mu;\nu}+h_{\tau\nu;\mu}-h_{\mu\nu;\tau}\right)\Big] && (1.10)
\end{aligned}
$$

Dominantní člen $R^{(1)}_{\mu\nu} = O(\varepsilon^{-1})$ představuje vlnovou rovnici pro perturbace na zakřiveném pozadí. Oba členy řádu $O(1)$ (totiž $R^{(0)}_{\mu\nu}$ a $R^{(2)}_{\mu\nu}$) poté užijeme k odvození vlivu vysokofrekvenčních gravitačních vln na pozadí .

1.1.2 Kalibrační transformace a invariance

Nyní se soustředíme na infinitesimální transformace souřadnic a případnou invarianci jednotlivých členů v rozvojích (1.4),(1.7) vůči kalibračním transformacím, které tyto transformace indukují.

Uvažujme infinitesimální transformaci

$$x^\mu \mapsto \bar{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu\,, \tag{1.11}$$

kde generátor splňuje $\xi_\nu = O(\varepsilon)$. V novém souřadném systému pak do členů lineárních v h a ξ platí

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \left(h_{\mu\nu} - \xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu}\right)\,. \tag{1.12}$$

Abychom mohli takovouto transformaci nazvat invariantní, musí zůstat tvar metriky pozadí zachován. Tento požadavek je do řádu $O(\varepsilon)$ splněn podmínkou $\xi_{\mu;\nu} = O(\varepsilon)$, která je dostatečně obecná a připouští vysoko- i nízkofrekvenční souřadnicové „vlny". Perturbace v novém souřadném systému mají tedy tvar

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu}\,. \tag{1.13}$$

Interpretujeme-li (1.13) ve smyslu teorie pole v plochém prostoru jako kalibrační transformaci (indukovanou infinitesimální transformací souřadnic), podléhají všechny veličiny závislé na $h_{\mu\nu}$ odpovídající transformaci. Pro dominantní členy rozvojů Riemannova a Ricciho tenzoru platí

$$
\begin{aligned}
R^{(1)}_{\mu\nu} \mapsto \bar{R}^{(1)}_{\mu\nu} &= R^{(1)}_{\mu\nu} - \pounds_\xi R^{(0)}_{\mu\nu}\,, && (1.14)\\
R^{(1)}_{\mu\nu\gamma\delta} \mapsto \bar{R}^{(1)}_{\mu\nu\gamma\delta} &= R^{(1)}_{\mu\nu\gamma\delta} - \pounds_\xi R^{(0)}_{\mu\nu\gamma\delta}\,, && (1.15)
\end{aligned}
$$

kde Lieovy derivace jsou dány obvyklým způsobem

$$
\begin{aligned}
\pounds_\xi R^{(0)}_{\mu\nu} &= R^{(0)}_{\mu\nu;\sigma}\xi^\sigma + R^{(0)}_{\sigma\nu}\xi^\sigma{}_{;\mu} + R^{(0)}_{\mu\sigma}\xi^\sigma{}_{;\nu}\,, && (1.16)\\
\pounds_\xi R^{(0)}_{\mu\nu\gamma\delta} &= R^{(0)}_{\mu\nu\gamma\delta;\sigma}\xi^\sigma + R^{(0)}_{\sigma\nu\gamma\delta}\xi^\sigma{}_{;\mu} + R^{(0)}_{\mu\sigma\gamma\delta}\xi^\sigma{}_{;\nu}\\
&\quad + R^{(0)}_{\mu\nu\sigma\delta}\xi^\sigma{}_{;\gamma} + R^{(0)}_{\mu\nu\gamma\sigma}\xi^\sigma{}_{;\delta}\,. && (1.17)
\end{aligned}
$$

Výrazy pro Lieovy derivace jsou evidentně řádu $O(\varepsilon)$ a dominantní členy jsou tedy ve vysokofrekvenční limitě kalibračně invariantní. Navíc vidíme, že dodatečné kalibrační členy pocházející z hlavního členu rozvoje Ricciho tenzoru neovlivní ani členy řádu $O(1)$ (tedy $R^{(0)}_{\mu\nu}$ a $R^{(2)}_{\mu\nu}$). Jelikož však $R^{(0)}_{\mu\nu}$ nezávisí na perturbacích h, zůstává kalibrační transformací obsahující jen nízkofrekvenční vlny neovlivněn ve svém nejvyšším řádu i člen $R^{(2)}_{\mu\nu}$. Případ s vysokofrekvenčními vlnami je poněkud složitější a budeme ho řešit později. Jak uvidíme, právě z nejvyššího řádu tohoto členu zkonstruujeme tenzor energie a hybnosti gravitačních vln.

Intuitivní fyzikální zdůvodnění invariance dominantních členů je následující: v oblasti o velikosti $\lambda \ll L$ vypadá prostor lokálně plochý a křivost daná perturbacemi je lokálně kalibračně invariantní, podobně jako v lineární teorii slabých polí.

Zobecnění pojmu kalibrační transformace pro obecný rozklad celkové vakuové metriky na dvě části, $G_{\mu\nu}(g) = G_{\mu\nu}(\gamma) + \Delta G_{\mu\nu}(\gamma, h) = 0$, nalezneme v Andersonově práci [19], kde je také ukázáno, že v případě perturbací malé amplitudy se redukuje na výše zavedenou infinitesimální kalibrační transformaci.

1.1.3 Vlny v lineární aproximaci

Z (1.7)-(1.10) plynou v nejnižším řádu pro vakuovou metriku, $R_{\mu\nu}(g) = 0$, rovnice

$$R^{(1)}_{\mu\nu}(\gamma, h) = 0 \ , \tag{1.18}$$

a v dalším řádu pak

$$R^{(0)}_{\mu\nu}(\gamma) = -R^{(2)}_{\mu\nu}(\gamma, h) \ . \tag{1.19}$$

V této části se budeme zabývat první z nich, rovnici (1.19) prozkoumáme v následující části 1.1.4 .

Nalezené kalibrační volnosti využijeme ke zjednodušení výpočtů. Nejprve ovšem přejdeme k novým proměnným, a to transformací dobře známou z teorie linearizovaných gravitačních vln v Minkowského prostoročase

$$\psi_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\gamma_{\mu\nu} h \ , \quad \psi \equiv \gamma^{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta} \ , \tag{1.20}$$

kde $h \equiv \gamma^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$. Pomocí tohoto nového tvaru perturbací přepíšeme vlnovou rovnici (1.18) do tvaru

$$\psi_{\mu\nu}{}^{;\beta}{}_{;\beta} - \tfrac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\psi^{;\beta}{}_{;\beta} - \psi_{\mu\beta}{}^{;\beta}{}_{;\nu} - \psi_{\nu\beta}{}^{;\beta}{}_{;\mu} - 2R^{(0)}_{\sigma\nu\mu\beta}\psi^{\beta\sigma} - R^{(0)}_{\mu\sigma}\psi^{\sigma}{}_{\nu} - R^{(0)}_{\nu\sigma}\psi^{\sigma}{}_{\mu} = 0 \ . \tag{1.21}$$

Zobecněním kalibračních podmínek kladených na nehmotná pole spinu 2 v plochém prostoročase získáme omezení

$$\psi^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \ , \tag{1.22}$$

$$\psi = 0 \ . \tag{1.23}$$

Nesmíme ovšem zapomenout, že kalibrační invariance vlnové rovnice (1.21) je pouze přibližná. Naštěstí členy nejvyššího řádu $O(\varepsilon^{-1})$ a $O(1)$ kalibračně invariantní jsou, mají tedy skutečný fyzikální význam. Zbylý člen $O(\varepsilon)$ je ale promíchán se členy obsahujícími Lieovy derivace (pocházejícími z kalibrační transformace), nelze mu tím pádem dát jasný fyzikální smysl.

Nyní se pokusíme vybrat privilegovanou kalibraci splňující podmínky (1.22), (1.23). V následujících výpočtech budeme vždy vynechávat členy s Lieovými derivacemi, jelikož vytváří korekce vyššího řádu a neobsahují perturbace $\psi_{\mu\nu}$. Nejprve určíme, jak se kalibrační transformace projevuje v nových proměných (1.20) :

$$\psi_{\mu\nu} \mapsto \bar{\psi}_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu} + \gamma_{\mu\nu}\xi^{\alpha}{}_{;\alpha} , \tag{1.24}$$
$$\psi_{\mu\nu}{}^{;\nu} \mapsto \bar{\psi}_{\mu\nu}{}^{;\nu} = \psi_{\mu\nu}{}^{;\nu} - \xi_{\mu}{}^{;\nu}{}_{;\nu} - R^{(0)}_{\mu\nu}\xi_{\nu} , \tag{1.25}$$
$$\psi \mapsto \bar{\psi} = \psi + 2\xi^{\alpha}{}_{;\alpha} . \tag{1.26}$$

Pokud tedy vybereme ξ^{μ} jako řešení nehomogenní soustavy parciálních diferenciálních rovnic

$$\xi_{\mu}{}^{;\nu}{}_{;\nu} + R^{(0)}_{\mu\nu}\xi^{\nu} = \psi_{\mu\nu}{}^{;\nu} , \quad \xi^{\alpha}{}_{;\alpha} = -\tfrac{1}{2}\psi ,$$

snadno se přesvědčíme, že podmínky (1.22), (1.23) jsou pro $\bar{\psi}_{\mu\nu}$splněny. Díky tomu navíc platí $\bar{\psi}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ a výsledný tvar vlnové rovnice bez členů s Lieovými derivacemi je

$$\Diamond h_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu}{}^{;\beta}{}_{;\beta} - 2R^{(0)}_{\sigma\nu\mu\beta}h^{\beta\sigma} - R^{(0)}_{\mu\sigma}h^{\sigma}{}_{\nu} - R^{(0)}_{\nu\sigma}h^{\sigma}{}_{\mu} = 0 . \tag{1.27}$$

Operátor $\Diamond$ je přirozeným zobecněním d'Alembertova operátoru na zakřivené prostoročasy, jak ho pro symetrické tenzory navrhl Lichnerowicz [20].

Pokud rovnici (1.27) zkontrahujeme, získáme $h^{;\beta}{}_{;\beta} = 0$, takže je konsistentní s podmínkou (1.22). Jejím kovariantním zderivováním získáme

$$(\Diamond h_{\mu\nu})^{;\nu} = h_{\mu\nu}{}^{;\nu\beta}{}_{;\beta} - R^{(0)}_{\mu\nu}h^{\nu\beta}{}_{;\beta} - (2R^{(0)}_{\mu\nu;\beta} - R^{(0)}_{\nu\beta;\mu})h^{\nu\beta} = O(\varepsilon) , \tag{1.28}$$

takže konsistence s druhou kalibrační podmínkou je narušena. Ve vysokofrekvenční aproximaci ovšem můžeme narušení tohoto řádu zanedbat. Navíc je zřejmé, že konzistence je přesná v případě prostoročasů s konstantní křivostí. To je důsledek „dobrého" chování vlnové rovnice (1.27) na rozdíl od „nejjednoduší "rovnice $h_{\mu\nu}{}^{;\beta}{}_{;\beta} = 0$, která se liší o členy řádu $O(\varepsilon)$.

Vysokofrekvenční gravitační vlny jsou tedy v nejnižším řádu řešením vlnové rovnice (1.27) splňujícím navíc podmínky (1.22) , (1.23). Ty zůstanou nezměněny po provedení kalibrační transformace generované řešením soustavy:

$$\xi_{\mu}{}^{;\nu}{}_{;\nu} + R^{(0)}_{\mu\nu}\xi^{\nu} = 0 , \quad \xi^{\alpha}{}_{;\alpha} = 0 .$$

Tuto zbylou kalibrační volnost můžeme užít k dalšímu omezení nefyzikálních stupňů volnosti. Obvykle klademe podmínku

$$h_{\mu 0} = 0 . \tag{1.29}$$

Poznamenejme, že vlnovou rovnici (1.27) můžeme obdržet pomocí klasického variačního principu pro následující hustotu lagrangiánu

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{32\pi}\left(\tfrac{1}{2}h^{\alpha\beta;\rho}h_{\alpha\beta;\rho} - \tfrac{1}{2}h^{;\rho}h_{;\rho} + h_{;\alpha}h^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - h^{\alpha\beta;\rho}h_{\rho\beta;\alpha}\right)(-\gamma)^{1/2} . \tag{1.30}$$

Toto $\mathcal{L}$ ovšem není kalibračně invariantní. Navíc příslušný kanonický tenzor energie a hybnosti

$$t_\mu{}^\nu \equiv \mathcal{L}\delta_\mu{}^\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h_{\gamma\delta,\nu}}h_{\gamma\delta,\mu} \tag{1.31}$$

není symetrický ani kalibračně invariantní, a navíc $t_0{}^0$ nemusí být positivně definitní.

MacCallum s Taubem [13] a Araujo [14] použili pro vysokofrekvenční gravitační vlny při variaci integrálu $I = \int R(g)\sqrt{-g}\, d^4X$ techniku vystředovaného lagrangiánu a takzvanou „two-timing“ metodu (spočívá ve variaci na dvou škálách odpovídajících pomalu se měnící amplitudě a rychle se měnící frekvenci perturbací). Výhodou tohoto přístupu je, že středují skalár a nikoli tenzor, jak postupoval Isaacson [11]. Ovšem díky tomu, že jejich postup při určování vlivu vln na pozadí je iterativní (začínají vakuovým prostoročasem a postupně dodávají dopočtené korekce) dostávají velké omezení na vztah mezi velikostí perturbací ε a jejich vlnovou délkou λ. V obou článcích dojdou k podmínce $\varepsilon^2 \ll \lambda^2$, což je ovšem ve srovnání s Isaacsonovým přístupem [11] , kde mohou být obě škály stejné, silně restriktivní.

1.1.4 Efektivní tenzor energie a hybnosti pro gravitační záření

Nyní (ve výše definované kalibraci) odvodíme tenzor energie a hybnosti gravitačního záření, který efektivně určuje vliv vln na metriku pozadí. K tomu upravíme rovnici (1.19) do formálního tvaru Einsteinových rovnic

$$R^{(0)}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R^{(0)} = 8\pi T^{eff}_{\mu\nu} , \tag{1.32}$$

kde efektivní tenzor energie hybnosti je dán následujícím způsobem

$$T^{eff}_{\mu\nu} \equiv -\tfrac{1}{8\pi}\left(R^{(2)}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R^{(2)}\right) = -\tfrac{1}{16\pi}\left(Q_{\mu\nu} - S_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{;\rho}\right) . \tag{1.33}$$

Tenzory Q a S mají po využití kalibračních podmínek následující tvar

$$Q_{\mu\nu} \equiv -\tfrac{1}{2}h^{\rho\tau}{}_{;\mu}h_{\rho\tau;\nu} + h^{\tau;\rho}\left(h_{\tau\mu;\rho} - h_{\rho\mu;\tau}\right) - \tfrac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\left(\tfrac{1}{2}h^{\rho\tau;\alpha}h_{\rho\tau;\alpha} - h^{\alpha\tau;\rho}h_{\alpha\rho;\tau}\right) , \tag{1.34}$$

$$S_{\mu\nu}{}^{\rho} \equiv -\delta^\rho_\nu h^{\alpha\tau}h_{\alpha\tau;\mu} - h^{\rho\tau}\left(h_{\mu\nu;\tau} - h_{\tau\mu;\nu} - h_{\tau\nu;\mu}\right) + \tfrac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}h_{\alpha\tau}h^{\alpha\tau;\rho} . \tag{1.35}$$

Tenzor Q je kvadratický v ∂h, kdežto S má formu typu $h\partial h$. Vzhledem k tomu, že příspěvek od S v (1.33) má tvar divergence, můžeme ho při použití integrálního středování zanedbat. Dalším důvodem, proč uvažovat středování, je známá analogie s elektromagnetismem. Když studujeme dielektrikum, také se nesnažíme určovat změny elektrického pole na úrovni meziatomových vzdáleností, v naprosté většině případů vystředujeme Maxwellovy rovnice přes oblast řádově větší, než jsou rozměry nábojových fluktuací a zabýváme se pouze vystředovanými veličinami. Situace u vysokofrekvenčního gravitačního záření je obdobná. Také nás nezajímají detailní fluktuace pozadí způsobené perturbacemi, ale především jejich makroskopický vliv na křivost.

Středování vysokofrekvenčních vln přes čas poprvé užili Brill a Hartle již při studiu gravitačního geonu [18]. My ovšem nemáme víceméně stacionární problém, proto budeme středovat přes prostoročasovou oblast, podobně jako Arnowitt, Deser a Misner [21]. Užitý postup budeme přesto označovat *BH středování* a zapisovat ho $\langle \cdots \rangle$. Středování bude probíhat přes oblast, jejíž charakteristický rozměr je malý v porovnání se škálou na níž se mění pozadí. Je ovšem nezávislý na ε (t.j. $O(1)$), a proto velký ve srovnání s vlnovou délkou záření ve vysokofrekvenční limitě. Pravidla pro úpravy členů tenzoru energie a hybnosti plynoucí z takového středování jsou následující:

1. Divergenční členy jsou redukovány faktorem ε, v nejnižším řádu aproximace můžeme například vypustit člen $S_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{;\rho}$.

2. Můžeme integrovat „per partes" a vynechat povrchové členy, které jsou také o řád zredukovány.

3. Komutátor kovariantních derivací perturbací je o dva řády nižší než druhá derivace perturbací, takové derivace v limitě $\varepsilon \to 0$ proto komutují.

Výsledný tenzor energie a hybnosti daný středováním (1.33) má tudíž jednoduchý tvar [11]

$$T^{BH}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{32\pi} \langle h^{\rho\tau}{}_{;\mu} h_{\rho\tau;\nu} \rangle + O(\varepsilon) \,. \tag{1.36}$$

Pokud navíc kalibrací zajistíme $h_{0\mu} = 0$, je T^{BH}_{00} pozitivně definitní.

Nyní se budeme zabývat invariancí tohoto výrazu vůči kalibrační transformaci obsahující vysokofrekvenční vlny. Ke zjednodušení výpočtů užijeme schematický zápis. Po provedeném středování je zřejmé, že k výslednému tenzoru přispívají pouze členy výše definovaného tenzoru $Q \sim (\partial h)^2$. Kalibrační transformace $h \mapsto \bar{h} \sim h + \partial\xi$ se projeví následujícím způsobem

$$Q \mapsto \bar{Q} \sim (\partial h)^2 + (\partial h)(\partial^2 \xi) + (\partial^2 \xi)^2 \,.$$

Pro vysokofrekvenční vlny předpokládáme $\xi_{\mu;\nu\rho} = O(1)$ a tedy takovéto derivace v limitě krátkých vlnových délek komutují. Dodatečné členy vzniklé kalibrační transformací nyní dále upravíme. Člen $(\partial h)(\partial^2\xi)$ lze integrací „per partes", komutováním derivací a aplikací vlnové rovnice převést na divergenci. Podobně upravíme i člen $(\partial^2\xi)^2$. Užitím pravidel pro počítání s vystředovanými veličinami nakonec dostáváme (viz. [11])

$$T^{BH}_{\mu\nu} \mapsto \bar{T}^{BH}_{\mu\nu} = T^{BH}_{\mu\nu} + O(\varepsilon) \,.$$

Je tedy zřejmé, že tenzor energie a hybnosti je ve vysokofrekvenční limitě *kalibračně invariantní*. To ovšem platí jen zásluhou výše popsaného středování.

1.1.5 WKB analýza

V *plochém prostoročase* se vlnová rovnice (1.27) redukuje na známý tvar $\Box h_{\mu\nu} = 0$, jehož řešení obvykle hledáme jako fourierovskou komponentu obecného řešení ve tvaru

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp ik_\alpha x^\alpha \ ,$$

kde $A_{\mu\nu}$ i k_α jsou konstanty. V našem případě je ovšem *prostoročas globálně zakřiven*, ale můžeme ho považovat za lokálně plochý v oblastech o rozměru $\lesssim L$ (neboť $R^{(0)}_{\mu\nu\gamma\delta} \sim L^{-2}$, jak plyne užitím Riemannových normálních souřadnic). Na této škále budou tedy zmíněné parametry přibližně konstantní, ale globálně to musí být *pomalu* se měnící funkce. Řešení našeho problému tedy zkusíme hledat ve tvaru

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp i\phi \ , \tag{1.37}$$

kde $A_{\mu\nu} = O(\varepsilon)$ je pomalu se měnící reálná funkce polohy v prostoročase a ϕ je reálná funkce s velkou derivací (což zajišťuje vysokou frekvenci záření), jejíž hodnota se mění pomalu (což odpovídá zvolna se měnícímu k_ν). Fyzikálně to odpovídá vysokofrekvenční vlně bez rychlých změn vlnové délky, tedy situaci, kterou zpravidla očekáváme. Název WKB aproximace pro zmíněný tvar řešení je motivován známým použitím této aproximace pro řešení jednodimensionálních problémů v kvantové mechanice. Ještě dříve však byl tento přístup použit také v elektromagnetismu (eikonálová rovnice v geometrické optice) a v akustice, fyzice plazmatu, teorii elasticity i hydrodynamice. Proto se používají také jiné názvy, např. eikonálová aproximace nebo metoda stacionární fáze.

Vzhledem k možné korespondenci s rovinnou vlnou zavedeme vlnový vektor

$$k_\alpha \equiv \phi_{,\alpha} \ . \tag{1.38}$$

Shrňme nyní předpokládané řády jednotlivých výrazů, se kterými budeme pracovat

$$\begin{array}{rclrcl} R^{(0)}_{\mu\nu\gamma\delta} & = & O(1) \ , & A^{\mu\nu}{}_{;\tau} & = & O(\varepsilon) \ , \\ k_\mu & = & O(\varepsilon^{-1}) \ , & k_{\mu;\nu} & = & O(\varepsilon^{-1}) \ . \end{array} \tag{1.39}$$

Substitucí (1.37) do kalibračních podmínek (1.22) a (1.23) získáme

$$\gamma^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = 0 \ , \tag{1.40}$$

$$ik_\nu A^{\mu\nu} + A^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \ . \tag{1.41}$$

V rovnici (1.41) je první člen řádu $O(1)$ a druhý pouze řádu $O(\varepsilon)$. V nejnižší aproximaci proto musí platit

$$k_\nu A^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{1.42}$$

Podobně po substituci do vlnové rovnice (1.27) dostáváme

$$\begin{aligned}&\left(-k_\beta k^\beta A_{\mu\nu}\right) + i\left(2k_\beta A_{\mu\nu}{}^{;\beta} + k^\beta{}_{;\beta}A_{\mu\nu}\right)\\ &\quad + \left(A_{\mu\nu}{}^{;\beta}{}_{;\beta} - 2R^{(0)}_{\sigma\nu\mu\beta}A^{\beta\sigma} - R^{(0)}_{\mu\sigma}A^\sigma{}_\nu - R^{(0)}_{\nu\sigma}A^\sigma{}_\mu\right) = 0\,.\end{aligned} \tag{1.43}$$

Členy v závorkách odpovídají stejným řádům; první závorka je řádu $O(\varepsilon^{-1})$, druhá $O(1)$ a třetí $O(\varepsilon)$. V nejnižším řádu proto musí platit

$$k_\beta k^\beta = 0\,. \tag{1.44}$$

Ze zavedení vlnového vektoru plyne, že je normálou k ploše konstantní fáze, udává proto směr toku záření. Rovnice (1.44) tedy říká, že gravitační paprsky jsou nulové vektory. V analogii s elektromagnetismem ji můžeme zapsat ve tvaru eikonálové rovnice $\gamma^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} = 0$.

Zaveďme nyní kongruenci křivek s tečným vektorovým polem k^μ. Takovéto křivky $x^\mu\,(l)$ jsou řešením rovnice

$$\frac{dx^\mu}{dl} = k^\mu\,. \tag{1.45}$$

Jsou to zjevně nulové geodetiky a l je preferovaný afinní parametr, neboť kovariantním zderivováním, užitím symetrie Christoffelových symbolů a záměnnosti parciálních derivací snadno dokážeme $k_{\mu;\nu}k^\nu$.

Paprsky vysokofrekvenčních gravitačních vln jsou tedy paralelně přenášeny tečně podél nulových geodetik v naprosté analogii s elektromagnetismem. Proto vlny ve WKB aproximaci podléhají rudému posuvu a ohybu stejným způsobem jako světlo.

Pokročíme-li ke druhému řádu vlnové rovnice (1.43) získáme vztah

$$A_{\mu\nu}{}^{;\beta}k_\beta + \tfrac{1}{2}A_{\mu\nu}k^\beta{}_{;\beta} = 0\,. \tag{1.46}$$

Opět po vzoru elektromagnetismu oddělíme chování amplitudy a polarizace. Zaveďme normalizované tenzorové pole polarizace $e_{\mu\nu} \equiv \left(A^{\mu\nu}A_{\mu\nu}\right)^{-1/2}A_{\mu\nu}$ (tedy skutečně $e_{\mu\nu}e^{\mu\nu} = 1$) a definujme amplitudu vlny $\mathcal{A} \equiv \left(A_{\mu\nu}A^{\mu\nu}\right)^{1/2}$, což je reálný nezáporný skalár určující intenzitu pole. Po provedení substituce $A_{\mu\nu} = \mathcal{A}\,e_{\mu\nu}$ v rovnici (1.46) dostáváme

$$\left(\mathcal{A}_{,\beta}\,k^\beta + \tfrac{1}{2}\mathcal{A}\,k^\beta{}_{;\beta}\right)e_{\mu\nu} + \mathcal{A}\,e_{\mu\nu;\beta}k^\beta = 0\,. \tag{1.47}$$

Vynásobením tenzorem $e^{\mu\nu}$ dostaneme

$$(\ln\mathcal{A})_{,\beta}\,k^\beta + \tfrac{1}{2}k^\beta{}_{;\beta} = 0\,. \tag{1.48}$$

Užitím rovnice (1.45) upravíme předchozí vztah na obyčejnou diferenciální rovnici podél paprsků

$$\tfrac{d}{dl}\,(\ln\mathcal{A}) = -\tfrac{1}{2}k^\beta{}_{;\beta}\,, \tag{1.49}$$

která nám říká, jak se amplituda perturbací zmenšuje s rozbíhajícími se paprsky.

Pro polarizaci z rovnice (1.47) odvodíme vztah

$$e_{\mu\nu;\beta}k^{\beta} = \frac{De_{\mu\nu}}{dl} = 0 \; . \tag{1.50}$$

Tenzor polarizace je tedy přenášen paralelně podél nulových geodetik $x^{\mu}(l)$. V libolném pevném bodě této geodetiky můžeme klást počáteční podmínky:

$$\begin{aligned} e_{\mu\nu}k^{\nu} &= 0 \; , \qquad (1.51)\\ e_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} &= 0 \; . \qquad (1.52) \end{aligned}$$

Jelikož $e_{\mu\nu}$ i k_{μ} se přenášejí paralelně, tyto podmínky platí podél celé geodetiky, což zaručuje konzistenci s podmínkami (1.40) a (1.42). Podobnost s geometrickou optikou je tedy zřejmá, podrobně je rozpracována v dodatku k prvnímu Isaacsonově článku [11]. Pokud rovnici (1.48) přepíšeme do tvaru

$$\left(\mathcal{A}^2 k^{\beta}\right)_{;\beta} = 0 \; , \tag{1.53}$$

můžeme ji také interpretovat jako „zákon zachování počtu gravitonů“, jestliže ve shodě s Isaacsonem definujeme

$$\mathcal{N} = \int_{\Sigma} k^0 \mathcal{A}^2 (-\gamma)^{\frac{1}{2}} d^3x \; , \tag{1.54}$$

kde Σ je prostorupodobná nadplocha a x^0 odpovídající časová souřadnice. Užitím Greenovy věty zjistíme, že pro gravitační vlny s lokalizovaným zdrojem platí $\mathcal{N}_{,0} = 0$.

Z výše uvedeného plyne, že hledáme-li tedy perturbace ve tvaru

$$h_{\mu\nu} = Re\{\mathcal{A} e_{\mu\nu} \exp i\phi\} \; , \quad k_{\nu} = \phi_{,\nu} \; , \tag{1.55}$$

splňují veličiny tyto rovnice

$$\begin{aligned} k^{\nu}k_{\nu} &= 0 \; , \qquad (1.56)\\ e_{\mu\nu;\alpha}k^{\alpha} &= 0 \; , \qquad (1.57)\\ \left(\mathcal{A}^2 k^{\beta}\right)_{;\beta} &= 0 \; , \qquad (1.58)\\ e^{\mu\nu}e_{\mu\nu} &= 1 \; , \qquad (1.59)\\ k_{\mu}e^{\mu\nu} &= 0 \; , \qquad (1.60)\\ \gamma^{\mu\nu}e_{\mu\nu} &= 0 \; . \qquad (1.61) \end{aligned}$$

Nyní použijeme tuto WKB aproximaci ke zjednodušení tenzoru energie a hybnosti (1.36) gravitačního záření ve vysokofrekvenční limitě (VF). V nejnižším řádu platí

$$T^{VF}_{\mu\nu} = \langle \tfrac{1}{32\pi} \mathcal{A}^2 k_{\mu} k_{\nu} \sin^2 \phi \rangle = \tfrac{1}{64\pi} \mathcal{A}^2 k_{\mu} k_{\nu} \; . \tag{1.62}$$

To je přesně tvar pro pole „nulového“ záření (jaký má například též čisté elektromagnetické záření).

Nyní lze řešit vakuové Einsteinovy rovnice do druhého řádu. Obecně máme deset nezávislých rovnic určujících tvar perturbací, které se šíří na pozadí určeném dalšími deseti Einsteinovými rovnicemi, na jejichž pravé straně vystupuje tenzor $T^{VF}_{\mu\nu}$. Tento problém je samozřejmě složitý a při řešení konkrétních příkladů s výhodou využijeme symetrie řešení.

WKB aproximaci můžeme aplikovat také na dominantní část Riemannova tenzoru, kterou užijeme k rozpoznání souřadnicových a fyzikálních vln,

$$R^{(1)}_{\mu\nu\gamma\delta} = -2k_{[\mu}h_{\nu][\gamma}k_{\delta]} + O(1) , \tag{1.63}$$

kde hranaté závorky značí antisymetrizaci. Pokud si připomeneme, že tato část Riemannova tenzoru je řádu $O(\varepsilon^{-1})$, pak jednoduše z rovnic (1.56) a (1.60) ověříme platnost vztahu $R_{\mu\nu\gamma\delta}(g)k^{\delta} = O(1)$. V rámci této aproximace jsme tedy dospěli k velmi zajímavému výsledku. Celková metrika je v nejnižší aproximaci typu N v Petrovově algebraické klasifikaci.

WKB aproximace je tedy velmi užitečná, ovšem má i svá omezení. Pokud se vrátíme k rovnici (1.48), vidíme, že v případě konvergentní kongruence nulových geodetik amplituda záření roste. Ještě před „kolapsem“ takové kongruence a vznikem singularity tedy přestává WKB aproximace platit.

1.1.6 Zobecnění na více módů

Dosud jsme studovali jen monochromatickou vlnu, nyní provedeme přímočaré zobecnění na jejich superpozice [11]. Nechť perturbace lze zapsat

$$h_{\mu\nu} = \sum_m h^{[m]}_{\mu\nu} , \tag{1.64}$$

kde každá monochromatická vlna $h^{[m]}_{\mu\nu} = A^{[m]}_{\mu\nu} \exp i\phi^{[m]}$ je řešením vlnové rovnice (1.27). Pak je díky její linearitě také (1.64) řešením. Pokud jde o tenzor energie a hybnosti, v nejnižší aproximaci platí

$$\langle h^{\rho\tau}{}_{;\mu} h_{\rho\tau;\nu} \rangle = \sum_{m,n} k^{[m]}_{\mu} k^{[n]}_{\nu} A^{[m]\,\rho\tau} A^{[n]}_{\rho\tau} \langle \sin\phi^{[m]} \sin\phi^{[n]} \rangle \ .$$

Pro nekoherentní vlny užijeme ortogonality sinů při středování a výsledkem je

$$T^{VF}_{\mu\nu} = \sum_m T^{[m]\,VF}_{\mu\nu} \tag{1.65}$$

$$T^{[m]\,VF}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{64\pi} (\mathcal{A}^{[m]})^2 k^{[m]}_{\mu} k^{[m]}_{\nu} \tag{1.66}$$

Pro různé módy vysokofrekvenčních vln tedy platí princip superpozice.

1.2 Slabé gravitační vlny v zobecněném formalismu

1.2.1 Ve vakuu

M. Efroimsky v zajímavém příspěvku [17] popsal nový přístup k problému studia slabých gravitačních vln. Na následujících stránkách jej přiblížíme a porovnáme jak s klasickým přístupem, tak i s vysokofrekvenční aproximací. Efroimského přístup je pozoruhodný především tím, že umožňuje konzistentně připsat tensor energie a hybnosti také *nízkofrekvenčním* gravitačním vlnám na daném pozadí, oproti klasickému přístupu, který pracuje pouze s vakuovým pozadím (viz. např. linearizované vlny na Minkowského pozadí). Formalismus je založen na zavedení tří různých hladkých nedegenerovaných symetrických metrik na diferencovatelné varietě M:

1. $\gamma_{\mu\nu}$ – vakuová metrika odpovídající čistému pozadí bez gravitačních vln,
2. $g_{\mu\nu}$ – celková vakuová metrika obsahující pozadí i vlny,
3. $q_{\mu\nu}$ – nevakuová metrika obsahující pozadí a perturbace jejichž vlnová délka je větší než L (v podstatě vystředovaná celková metrika).

Dostáváme tak tři různé metrické prostory. Hodnota L je závislá na *observačních schopnostech* pozorovatele a odříznutí velmi nízkých frekvencí lze chápat jako přirozený proces plynoucí z „experimentu“.

V klasické teorii slabých linearizovaných gravitačních vln dochází k mírné nekonzistenci, neboť bere v úvahu jen metriky γ a g, a odpovídající perturbace ve tvaru

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \ .$$

Následně definuje kontravariantní komponenty metriky

$$g^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O(h^2) \ ,$$

ovšem ke snižování a zvyšování indexů u ostatních tenzorů používá metriku $\gamma_{\mu\nu}$. Není tedy jasné, na Riemannově varietě jaké metriky se nacházíme.

Efroimsky pro libovolnou metriku g definuje Ricciho a Einsteinův tenzor následujícím způsobem

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}(g) = {} & [\tfrac{1}{2}g^{\gamma\rho}(g_{\rho\nu,\mu} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho})]_{,\gamma} - [\tfrac{1}{2}g^{\gamma\rho}(g_{\rho\gamma,\mu} + g_{\rho\mu,\gamma} - g_{\mu\gamma,\rho})]_{,\nu} \\ & + [\tfrac{1}{2}g^{\gamma\delta}(g_{\rho\delta,\gamma} + g_{\rho\gamma,\delta} - g_{\gamma\delta,\rho})][\tfrac{1}{2}g^{\delta\rho}(g_{\rho\nu,\mu} + g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho})] \\ & - [\tfrac{1}{2}g^{\gamma\rho}(g_{\rho\delta,\nu} + g_{\rho\nu,\delta} - g_{\nu\delta,\rho})][\tfrac{1}{2}g^{\delta\rho}(g_{\rho\gamma,\mu} + g_{\rho\mu,\gamma} - g_{\mu\gamma,\rho})] \ , \end{aligned} \tag{1.67}$$

$$G_{\mu\nu}(g) = R_{\mu\nu}(g) - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}(g) \ , \tag{1.68}$$

kde $g^{\rho\tau} = (g)^{-1}_{\rho\tau}$. Tyto definice mají tenzorový charakter bez ohledu na to, ve kterém Riemannově prostoru (pro danou varietu M) se nacházíme. S ohledem na naše předpoklady 1.–3. pak platí

$$G_{\mu\nu}(\gamma) = G_{\mu\nu}(g) = 0 \ , \quad G_{\mu\nu}(q) \neq 0 \ . \tag{1.69}$$

Zaveďme dále dvě kovariantní tenzorová pole určující rozdíly mezi komponentami výše definovaných metrik:

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - q_{\mu\nu} \ , \quad \&_{\mu\nu} \equiv q_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu} \ . \tag{1.70}$$

V tomto bodě nyní specifikujeme, na jakém Riemannově prostoru se budeme pohybovat: jak snižování a zvyšování indexů, tak i kovariantní derivování bude prováděno pomocí metriky q. Například pro nově zavedená vektorová pole platí

$$h^{\mu\nu} \equiv q^{\mu\alpha} q^{\nu\beta} h_{\alpha\beta} \ , \quad \&^{\mu\nu} \equiv q^{\mu\alpha} q^{\nu\beta} \&_{\alpha\beta} \ . \tag{1.71}$$

Při výpočtu Ricciho tenzoru ovšem nesmíme zapomenout, že je definován s použitím inverze příslušné metriky a nikoli pomocí kontravariantních komponent. Nyní vezmeme $h_{\mu\nu}$ jako perturbace metriky $q_{\mu\nu}$ a rozvineme Ricciho tenzor metriky $g_{\mu\nu}$ stejným způsobem jako v Isaacsonově vysokofrekvenční aproximaci (1.7)–(1.10) úlohu γ nyní přebírá q , úlohu h mají h a $\&$, a g reprezentuje obě vakuové metriky g a γ:

$$R_{\mu\nu}(g) = R^{(0)}_{\mu\nu}(q) + R^{(1)}_{\mu\nu}(q,h) + R^{(2)}_{\mu\nu}(q,h) + R^{(3)}_{\mu\nu}(q,h) + O(h^4) \ . \tag{1.72}$$

Podobně rozvineme

$$R_{\mu\nu}(\gamma) = R^{(0)}_{\mu\nu}(q) + R^{(1)}_{\mu\nu}(q,-\&) + R^{(2)}_{\mu\nu}(q,-\&) + O(\&^3) \ . \tag{1.73}$$

Jelikož $R^{(1)}_{\mu\nu}(q,-\&)$ je lineární v perturbacích $-\&$, můžeme jejich znaménko vytknout. Podle předpokladů jsou metriky g a γ vakuové, a platí tedy

$$0 = R_{\mu\nu}(g) - R_{\mu\nu}(\gamma) =$$

$$= R^{(1)}_{\mu\nu}(q,h) + R^{(2)}_{\mu\nu}(q,h) + R^{(1)}_{\mu\nu}(q,\&) + R^{(3)}_{\mu\nu}(q,h) + O(h^4) + O(\&^2) \ . \tag{1.74}$$

Efroimsky poté vznáší tři předpoklady:

(i) perturbace h i $\&$ jsou malé v tom smyslu, že členy $O(h^4)$ a $O(\&^2)$ můžeme vůči předešlým zanedbat,

(ii) mezi perturbacemi platí vztah $\& \simeq h^2$,

(iii) tenzorové pole $h_{\mu\nu}$ sestává z módů, jejichž vlnová délka nepřesahuje danou škálu L.

Interpretace takto zavedených perturbací je pak následující: $h_{\mu\nu}$ charakterizuje měřitelné gravitační vlny a $\&_{\mu\nu}$ je posun geometrie z vakuové metriky γ na nevakuovou metriku q, způsobený přítomností gravitačních vln. Díky výše uvedeným předpokladům, pak rovnici (1.74) interpretuje jako vlnovou rovnici pro perturbace h na pozadí metriky q. K tomu je ale třeba vyjádřit $\&$ pomocí h. Po užití Brillova-Hartleova středování přes oblast velikosti L na rovnici (1.74) takový vztah skutečně získáme

$$R^{(1)}_{\mu\nu}(q,\&) = -\langle R^{(2)}_{\mu\nu}(q,h)\rangle_L \ . \tag{1.75}$$

Na levé straně jsou odstraněny středovací závorky, neboť obsahuje jen módy s vlnovou délkou přesahující L. Z této rovnice je zřejmé, proč u nízkofrekvenčních vln platí požadavek (ii). Je ovšem jasné, že pro Isaacsonovu vysokofrekvenční aproximaci tento bod neplatí, přestože Efroimsky svůj postup považuje za universální. V kapitole 2.1 bude nastíněno řešení tohoto problému.

Pokud jsou však předpoklady (i)-(iii) splněny, můžeme v souladu s článkem [17] zavést kalibraci pro $\&$ analogickou (1.22), (1.23), určenou rovnicemi $\&_{\mu}{}^{\mu} = 0, \&_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0$. Pomocí těchto vztahů Efroimsky upraví levou stranu (1.75), přičemž užije komutativity kovariantních derivací (která zde ovšem zjevně *obecně* neplatí). Pokud příslušnou chybu napravíme a výpočet provedeme v rámci zavedené kalibrace, získáme následující explicitní vztah pro výpočet posuvu geometrie $\&$ pomocí perturbací h

$$\&_{\mu\nu}{}^{;\beta}{}_{;\beta} - 2R^{(0)}_{\sigma\mu\nu\beta}(q)\&^{\sigma\beta} - R^{(0)}_{\mu\sigma}(q)\&^{\sigma}{}_{\nu} - R^{(0)}_{\nu\sigma}(q)\&^{\sigma}{}_{\mu} = 2\langle R^{(2)}_{\mu\nu}(q,h)\rangle_L \ . \tag{1.76}$$

Nyní obrátíme pozornost na Efroimského odvození tenzoru energie a hybnosti gravitačních vln. V analogii s rozvoji Ricciho tenzorů platí

$$0 = G_{\mu\nu}(\gamma) = G_{\mu\nu}(q) + G^{(1)}_{\mu\nu}(q, -\&) + O(\&^2) \ . \tag{1.77}$$

Na základě tohoto vztahu, pak uvažuje následující Einsteinovu rovnici

$$G_{\mu\nu}(q) = 8\pi T^{(vac)}_{\mu\nu} = R^{(1)}_{\mu\nu}(q,\&) - \tfrac{1}{2} q_{\mu\nu} q^{\rho\tau} R^{(1)}_{\rho\tau}(q,\&) \ . \tag{1.78}$$

Ze vztahu (1.75) tedy plyne, že v rámci Brill-Hartleova středování se právě zavedený tenzor energie a hybnosti gravitačních vln shoduje s Isaacsonovým. Efroimsky ale nesprávně tvrdí, že Isaacsonova metrika pozadí odpovídá jeho vakuové metrice γ. Podstatou vysokofrekvenční aproximace je ovšem právě *nevakuovost* pozadí, které tím pádem odpovídá metrice q.

Výhodou popsaného Efroimského postupu je především možnost konzistentního přístupu ke *slabým nízkofrekvenčním gravitačním vlnám* a explicitní odvození tenzoru energie a hybnosti pro tento případ.

1.2.2 V přítomnosti látky

Ukážeme nyní Efroimského zobecnění postupu na případ nenulového tenzoru energie a hybnosti $T_{\mu\nu}(m,\varphi)$, kde φ zastupuje látková pole a m libovolnou z metrik q, γ, g. Případný kosmologický člen pro zjednodušení úvah zahrneme do $T_{\mu\nu}$ (pro FRW prostoročasy to znamená přítomnost ideální tekutiny tlaku $p = -\frac{1}{8\pi}\Lambda$ a hustoty $\rho = \frac{1}{8\pi}\Lambda$). Tři základní metriky mají nyní poněkud odlišné vlastnosti:

1. $\gamma_{\mu\nu}$ – nevakuová metrika odpovídající čistému pozadí bez gravitačních vln, splňující Einsteinovy rovnice s $T_{\mu\nu}(\gamma,\varphi)$,

2. $g_{\mu\nu}$ – celková nevakuová metrika obsahující pozadí i vlny, splňující Einsteinovy rovnice s $T_{\mu\nu}(g,\varphi)$,

3. $q_{\mu\nu}$ – nevakuová metrika obsahující pozadí a perturbace jejichž vlnová délka je větší než L (v podstatě vystředovaná celková metrika).

Pertubace $h_{\mu\nu}$ a $\&_{\mu\nu}$ mají stejný význam (1.70) jako v případě vakua. Pokud zavedeme $\tilde{T}_{\mu\nu}(m,\varphi) \equiv T_{\mu\nu}(m,\varphi) - \frac{1}{2}m_{\mu\nu}m^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}(m,\varphi)$, můžeme využít dříve odvozených rozvojů Ricciho tenzoru, a platí proto

$$R_{\mu\nu}(\gamma) = 8\pi\tilde{T}_{\mu\nu}(\gamma,\varphi)\ ,\ R_{\mu\nu}(g) = 8\pi\tilde{T}_{\mu\nu}(g,\varphi)\ , \tag{1.79}$$

$$R_{\mu\nu}(q) = 8\pi\left[\tilde{T}_{\mu\nu}(g,\varphi) + \tilde{T}^{(nv)}_{\mu\nu}(q,h,\varphi)\right]\ , \tag{1.80}$$

a $T^{(nv)}_{\mu\nu}$ je nevakuový tenzor energie a hybnosti gravitačních vln. Provedeme-li odvození v souladu s (1.72), (1.73) a (1.74), získáme do třetího řádu v h užitím $\& \sim h^2$ rovnici

$$\begin{aligned} &R^{(1)}_{\mu\nu}(q,h) + R^{(1)}_{\mu\nu}(q,\&) + R^{(2)}_{\mu\nu}(q,h) + R^{(3)}_{\mu\nu}(q,h) \\ &\qquad = 8\pi\left[\tilde{T}^{(1)}_{\mu\nu}(q,h,\varphi) + \tilde{T}^{(1)}_{\mu\nu}(q,\&,\varphi) + \tilde{T}^{(2)}_{\mu\nu}(q,h,\varphi) + \tilde{T}^{(3)}_{\mu\nu}(q,h,\varphi)\right]\ , \end{aligned} \tag{1.81}$$

kde

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{(1)}_{\mu\nu}(q,h,\varphi) &= T^{(1)}_{\mu\nu}(q,h,\varphi) - \tfrac{1}{2}h_{\mu\nu}q^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}(q,\varphi) + \tfrac{1}{2}q_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}(q,\varphi) \\ &\quad -\tfrac{1}{2}q_{\mu\nu}q^{\alpha\beta}T^{(1)}_{\alpha\beta}(q,h,\varphi)\ , \end{aligned} \tag{1.82}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{(2)}_{\mu\nu}(q,h,\varphi) &= T^{(2)}_{\mu\nu}(q,h,\varphi) + \tfrac{1}{2}h_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}(q,\varphi) - \tfrac{1}{2}h_{\mu\nu}q^{\alpha\beta}T^{(1)}_{\alpha\beta}(q,h,\varphi) \\ &\quad +\tfrac{1}{2}q_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}T^{(1)}_{\alpha\beta}(q,h,\varphi) - \tfrac{1}{2}q_{\mu\nu}q^{\alpha\beta}T^{(2)}_{\alpha\beta}(q,h,\varphi) \\ &\quad -\tfrac{1}{2}q_{\mu\nu}h^{\alpha\sigma}h_{\sigma}{}^{\beta}T_{\alpha\beta}(q,h,\varphi)\ . \end{aligned} \tag{1.83}$$

a podobně pro $\&$ namísto h. Zde $T^{(1)}_{\mu\nu}$ a $T^{(2)}_{\mu\nu}$ jsou příslušné lineární a kvadratické členy v rozvoji tenzoru energie a hybnosti v mocninách h nebo $\&$. Abychom mohli (1.81) považovat za vlnovou rovnici, vyjádříme $\&$ pomocí h vystředováním této rovnice podobně jako v nevakuovém případě

$$R^{(1)}_{\mu\nu}(q,\&) - 8\pi\langle\tilde{T}^{(1)}_{\mu\nu}(q,\&,\varphi)\rangle_L + \langle R^{(2)}_{\mu\nu}(q,h)\rangle_L - 8\pi\langle\tilde{T}^{(2)}_{\mu\nu}(q,h,\varphi)\rangle_L = 0\ . \tag{1.84}$$

Z rovnice (1.81) je dobře vidět, že i v lineární aproximaci vlnové rovnice pro nízkofrekvenční gravitační vlny,

$$R^{(1)}_{\mu\nu}(q,h) - 8\pi\tilde{T}^{(1)}_{\mu\nu}(q,h,\varphi) = 0\ , \tag{1.85}$$

existuje přímá závislost na negravitačních polích φ. Jak ukázal Efroimsky [17], v případě ideální tekutiny a čistě gravitačních vln lze tuto závislost odstranit. Další postup mírně přeformulujeme, nebot' v článku [17] je poněkud nepřehledný a vyskytuje se v něm jedna (pravděpodobně tisková) chyba. K vyjádření tenzoru energie a hybnosti gravitačních vln rozvineme Einsteinovu rovnici $G_{\mu\nu}(\gamma) = 8\pi T_{\mu\nu}(\gamma, \varphi)$ okolo metriky q :

$$G_{\mu\nu}(q) + G^{(1)}_{\mu\nu}(q, -\&) = 8\pi \left[T_{\mu\nu}(q, \varphi) + T^{(1)}_{\mu\nu}(q, -\&, \varphi)\right] \ . \tag{1.86}$$

Porovnáním s rovnicí (1.80) upravenou do podoby Einsteinovy rovnice pro q získáme pro hledaný tenzor následující vyjádření

$$\begin{aligned}
8\pi T^{(nv)}_{\mu\nu}(q, h, \varphi) &= -8\pi T^{(1)}_{\mu\nu}(q, \&, \varphi) + G^{(1)}_{\mu\nu}(q, \&) \\
&= -8\pi T^{(1)}_{\mu\nu}(q, \&, \varphi) + R^{(1)}_{\mu\nu}(q, \&) - \tfrac{1}{2} q_{\mu\nu} q^{\alpha\beta} R^{(1)}_{\alpha\beta}(q, \&) \\
&\quad + \tfrac{1}{2} q_{\mu\nu} \&^{\alpha\beta} R^{(0)}_{\alpha\beta}(q) - \tfrac{1}{2} \&_{\mu\nu} q^{\alpha\beta} R^{(0)}_{\alpha\beta}(q) \ .
\end{aligned} \tag{1.87}$$

Vidíme, že od vakuového případu (1.78) se liší nejen přítomností členu $T^{(1)}_{\mu\nu}$ pocházejícího z rozvoje tenzoru energie a hybnosti látky, ale i dodatečných členů daných geometrií, které jsou ve vakuovém případě nulové. Ekvivalentní vyjádření tenzoru lze získat rozvojem Einsteinových rovnic pro metriku g, pokud si uvědomíme, že je podle předchozí rovnice kvadratický v h

$$\begin{aligned}
8\pi T^{(nv)}_{\mu\nu}(q, h, \varphi) &= 8\pi T^{(2)}_{\mu\nu}(q, h, \varphi) - G^{(2)}_{\mu\nu}(q, h) \\
&= 8\pi T^{(vac)}_{\mu\nu}(q, h) + 8\pi T^{(2)}_{\mu\nu}(q, h, \varphi) + \tfrac{1}{2} h_{\mu\nu} q^{\alpha\beta} R^{(1)}_{\alpha\beta}(q, h) \\
&\quad - \tfrac{1}{2} q_{\mu\nu} h^{\alpha\beta} R^{(1)}_{\alpha\beta}(q, h) - \tfrac{1}{2} h_{\mu\nu} h^{\alpha\beta} R^{(0)}_{\alpha\beta}(q) + \tfrac{1}{2} q_{\mu\nu} h^{\alpha\xi} h_{\xi}{}^{\beta} R^{(0)}_{\alpha\beta}(q) \ .
\end{aligned} \tag{1.88}$$

Shrňme závěrem, že uvedený postup nezahrnuje negravitační perturbace, například rychlostí a hustot. Příslušné zobecnění by však změnilo pouze explicitní tvar rozvoje tenzoru energie a hybnosti .

1.3 Detektory vysokofrekvenčních gravitačních vln

V úvodu práce jsme již uvedli, že problematika detekce gravitačních vln dnes představuje vysoce aktuální téma. Zmiňme se proto nyní o zajímavých teoretických pracích Tourrence [22] a Cruise [23], které se zabývají problematikou možné detekce gravitačních vln vysokých frekvencí prostřednictvím elektromagnetických detektorů. V principu lze k elektromagnetické detekci užít mnoho způsobů, ale teprve rozvoj elektroniky v posledních letech umožňuje zvýšení citlivosti aparatur na hranici detegovatelnosti předpovězených realistických amplitud gravitačního záření. Jedním ze způsobů je pozorování změn parametrů R , L , C v normálních či supravodivých elektrických obvodech. Dalším je sledování malých změn vlastností elektromagnetických vln při průchodu vlnovodem. Jak ukázal Tourrenc [22], lze v tomto případě působení gravitační vlny na elektromagnetické pole rozdělit na:

- přímé, kterým se budeme zabývat dále,
- nepřímé, dané změnou geometrie hraničních podmínek (stěn vlnovodu),
- vliv na podstatu hraničních podmínek (například hustotu náboje na rozhraní).

Přímý vliv analyzuje článek Cruise [23] pro případ rovinných gravitačních vln o frekvencích řádu MHz až GHz (interferenční detektory zachytí maximálně KHz) na Minkowského pozadí. Díky tomu získává explicitní výsledky umožňující odhady citlivosti aparatury při započtení šumu. V následujících odstavcích se pokusíme o aplikaci Cruiseova postupu na speciální případ Isaacsonovy vysokofrekvenční gravitační vlny.

Podstatou aparatury je vysokofrevenční elektromagnetická vlna obíhající v kruhovém vlnovodu. Abychom mohli k jejímu popisu použít geometrickou optiku musí mezi vlnovou délkou λ_e elektromagnetické a λ_g gravitační vlny platit vztah $\lambda_e \ll \lambda_g$ (toto omezení by mohlo být v našem případě v principu dosti restriktivní). V takovém případě se elektromagnetická vlna šíří prostřednictvím paralelního přenosu polarizačního vektoru Π^μ daného rovnicí

$$\frac{d\Pi^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}(g)\Pi^\nu \frac{dx^\sigma}{ds} = 0 \; , \tag{1.89}$$

kde s je parametr kruhové dráhy ve vlnovodu a g je celková metrika obsahující perturbace. Pokud uvažíme rozklad $g = \gamma + h$ v Isaacsonově smyslu (včetně odpovídajících řádů derivací jednotlivých členů), pak nejvyšší řád v rozvoji Christoffelových symbolů je

$$\check{\Gamma}^\mu_{\nu\sigma} = \Gamma^\mu_{\nu\sigma}(\gamma) + \tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\sigma}(\gamma, h) \; , \tag{1.90}$$

kde $\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\sigma}(\gamma, h) \equiv \frac{1}{2}\gamma^{\mu\delta}(h_{\delta\nu,\sigma} + h_{\sigma\delta,\nu} - h_{\nu\sigma,\delta})$.

Poté, co zvolíme vhodnou soustavu souřadnic odpovídající rovině, ve které se nachází kruhový vlnovod, a počáteční polarizaci elektromagnetické vlny šířící se vlnovodem ($s = 0$), můžeme na základě rovnice (1.89) spočítat, jak se polarizační vektor v důsledku působení gravitačního záření mění. Tuto rovnici totiž můžeme integrovat přes s a získáme tak pro jeho změnu rovnici

$$\Delta\Pi^\mu = \int_0^{s_1} \frac{d\Pi^\mu}{ds} ds = -\int_0^{s_1} \left(\Gamma^\mu_{\nu\sigma}(g)\Pi^\nu \frac{dx^\sigma}{ds} \right) ds \,. \tag{1.91}$$

Abychom demonstrovali, jak výhodný je tento postup v našem případě, přejdeme do lokální kartézské soustavy souřadnic $x^\mu = (u, z, x, y)$ (u je retardovaný čas příslušný souřadnici z) spojené se středem kruhu vlnovodu, přičemž křivka po níž se pohybuje elektromagnetická vlna je dána

$$x^\mu = \left(\frac{2\pi s}{\omega_0}, 0, b \sin 2\pi s, b \cos 2\pi s \right) . \tag{1.92}$$

Necht'počáteční polarizace míří do směru z, tedy $\Pi^\mu = (1, 1, 0, 0)$, a vysokofrekvenční gravitační vlna dopadá ze stejného směru. Dostatečně daleko od zdroje ji můžeme lokálně považovat za rovinnou. Jak uvidíme v části 2.2.1 lze takovou vlnu (zvolili jsme jednu z polarizací) a jí odpovídající pozadí zapsat

$$h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = A(u, x, y) \cos \phi(u)(dx^2 - dy^2) \,, \tag{1.93}$$

$$ds^2 = -2h(u, x, y)du^2 - 2dudz + dx^2 + dy^2 \,, \tag{1.94}$$

pro dostatečně malé f v (2.8). Pokud předpokládáme, že h se na průřezu vlnovodu mění jen minimálně a derivace perturbací jsou velké pouze pokud derivujeme jejich fázi, získáme

$$\Delta\Pi^2 = \int_0^1 2\pi Ab \left(\phi_{,u} \sin \phi \cos 2\pi s + \phi_{,u} \sin \phi \sin 2\pi s \right) \,. \tag{1.95}$$

Pokud se frekvence gravitační vlny popsané fází ϕ bude dostatečně shodovat s frekvencí ω oběhu elektromagnetické vlny vlnovodem, nastane rezonance, nebot' $\phi(u) \doteq \phi_{,u} u = 2\pi s \frac{\phi_{,u}}{\omega}$. Druhý člen na pravé straně rovnice (1.95) bude pozitivně definitní. Změna ve sledované komponentě polarizačního vektoru je v takovém případě řádu $\pi b A \phi_{,u}$ na jeden oběh elektromagnetické vlny. Na základě parametrů současných dostupných vlnovodů a započítáním šumu dospívá Cruise [23] k následujícím odhadům citlivosti pro větší počet oběhů vlnovodem: 10^{-19} vzhledem k teplotnímu šumu a téměř 10^{-20} vzhledem k fotonovému šumu pro signál s jedním módem. Zmíněná zařízení by tedy v principu mohla být již v nedaleké budoucnosti použitelná k detekci relevantních astrofyzikálních zdrojů.

Kapitola 2

Původní výsledky

2.1 Zobecnění formalismů

2.1.1 Modifikace Efroimského přístupu na vysokofrekvenční vlny

Nejprve se budeme věnovat článku M. Efroimského [17]. Jak jsme již poznamenali v kapitole 1.2.1, autor považuje svůj postup za obecný a speciálně předpokládá jeho platnost i ve vysokofrekvenční aproximaci (sám porovnává své výsledky s Isaacsonovým přístupem [11]). Zde ovšem ukážeme, že v tomto případě není možné uvedený postup užít. Zároveň naznačíme, jak lze Efroimského přístup modifikovat, aby jej bylo možné aplikovat i na vysokofrekvenční gravitační vlny.

Pro jednoduchost uvažujme jen vakuový případ. Zavedení metrik a jejich odchylek (1.70) pochopitelně přebíráme z části 1.2.1 . Tenzorové pole h nyní obsahuje vysokofrekvenční vlny, tím pádem řády jednotlivých členů rozvoje Ricciho tenzoru $R_{\mu\nu}(g)$, pro $g = q + h$, budou stejné jako v Isaacsonově rozvoji (1.7), po záměně q za γ. Na druhou stranu, $\&$ (vyjadřující posuv geometrie) takové vlny neobsahuje. Sestavíme-li nyní vlnovou rovnici (1.74) a pomocí BH středování z ní vyjádříme rovnici (1.75), vidíme, že jsme se dostali do sporu s předpokladem (ii). Podle něj má totiž platit $\& = O(\varepsilon^2)$, pokud zavedeme $h = O(\varepsilon)$. Ovšem pravá strana (1.75) je řádu $O(1)$ a stejnou velikost tedy musí mít i strana levá. Jelikož $\&$ *neobsahuje* vysokofrekvenční gravitační vlny, je nutné aby platilo $\& = O(1)$. Tato podmínka je nejen ve sporu s předpokladem (ii), ale dokonce znemožňuje provádět jakékoliv perturbační rozvoje v mocninách $\&$.

Pokusme se nyní modifikovat Efroimského postup tak, aby zahrnoval i případ, kdy se metrika pozadí vlivem vysokofrekvenčních gravitačních vln stane „značně“ nevakuovou. Místo perturbačního rozvoje (1.73) provedeme následující rozklad Ricciho tenzoru metriky $\gamma = q - \&$,

$$R_{\mu\nu}(\gamma) = R^{(0)}_{\mu\nu}(q) + \Delta R_{\mu\nu}(q, -\&) \ ,$$

jímž je zde $\Delta R_{\mu\nu}$ definováno a který lze provést vždy. Oba členy na pravé straně jsou řádu $O(1)$. Otázkou kalibrační invariance rozkladu tohoto typu se podrobně zabývá Andersonův článek [19], zejména v souvislosti s různými způsoby zavedení vlnové rovnice a tenzoru energie a hybnosti gravitačních vln. V něm je ukázáno, že pokud transformace souřadnic zachová funkční závislost metriky pozadí q, je $\Delta R_{\mu\nu}(q,-\&)$ invariantní vůči kalibrační transformaci indukované touto změnou souřadnic. Není zde ani nutné předpokládat infinitesimální charakter transformace. Po záměně $R^{(1)}_{\mu\nu}(q,\&)$ za $-\Delta R_{\mu\nu}(q,-\&)$ v rovnicích (1.74), (1.75) a (1.78) (když odstraníme případný zbytek $O(\&^2)$), získáme tedy vztahy platné *obecně*, přičemž v případě gravitačních vln neobsahujících vysokofrekvenční módy můžeme stále provést rozvoj v mocninách $\&$ a užívat jen jeho dominantní člen $R^{(1)}_{\mu\nu}(q,\&)$. Na druhou stranu již obecně neplatí rovnice (1.76), takže výpočet $\&$ pomocí h z rovnice (1.75) se stává velmi obtížný, neboť se jedná o nelineární diferenciální rovnici v $\&$.

Z rovnice (1.75), modifikované výše zmíněnou záměnou $R^{(1)}_{\mu\nu}$ za $-\Delta R_{\mu\nu}$, můžeme ovšem dosadit za $\Delta R_{\mu\nu}$ do obdobně modifikovaných rovnic (1.74) a (1.78), čímž získáme

$$R^{(1)}_{\mu\nu}(q,h) + R^{(2)}_{\mu\nu}(q,h) - \langle R^{(2)}_{\mu\nu}(q,h)\rangle + R^{(3)}_{\mu\nu}(q,h) + O(h^4) = 0\,, \tag{2.1}$$

$$-G_{\mu\nu}(q) = \langle R^{(2)}_{\mu\nu}(q,h)\rangle - \tfrac{1}{2} q_{\mu\nu} q^{\rho\tau} \langle R^{(2)}_{\rho\tau}(q,h)\rangle\,. \tag{2.2}$$

Druhá rovnice se přesně shoduje s Isaacsonovou rovnicí popisující vliv vln na pozadí (viz. rovnice (1.32), (1.33) po užití středování). První rovnici interpretujeme jako vlnovou rovnici. V nejvyšším řádu z ní získáme $R^{(1)}_{\mu\nu} = 0$, která se shoduje s Isaacsonovou rovnicí (1.18). Další členy by nás zajímaly, pokud bychom chtěli studovat nelineární efekty.

2.1.2 Modifikace Isaacsonova přístupu na nevakuový případ

Je tedy vidět, že v případě vysokofrekvenčních vln se výhody Efroimského přístupu [17] ztrácejí a je výhodnější užívat původní Isaacsonovu metodu [11]. Isaacson ji ovšem definoval pouze pro *vakuový* případ a my ji nyní zobecníme na nevakuový. Nebudeme však uvažovat nejobecnější možnou situaci, omezíme se jen na čistě gravitační perturbace a třídu tenzorů energie a hybnosti neobsahujících derivace metriky. Právě tento poslední předpoklad umožní převzít většinu výsledků z původního Isaacsonova článku [11]. Přesto není příliš restriktivní a zahrnuje řadu fyzikálně zajímavých případů (např. kosmologický člen, tenzor energie a hybnosti elektromagnetického a skalárního pole nebo ideální tekutiny).

Einsteinovy rovnice pro metriku $g = \gamma + h$, kterou rozkládáme na pozadí γ a vlny h jako v části 1.1.1, přepíšeme do tvaru

$$R_{\mu\nu}(g) = 8\pi \tilde{T}_{\mu\nu}(g,\varphi)\,, \tag{2.3}$$

kde $\tilde{T}_{\mu\nu}(g,\varphi) \equiv T_{\mu\nu}(g,\varphi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}(g,\varphi)$ a tenzor energie a hybnosti $T_{\mu\nu}(g,\varphi)$ je závislý též na negravitačních polích φ. Nechť platí předpoklady (1.3) Isaacsonovy vysokofrekvenční aproximace pro rozklad metriky tvaru (1.1). Proveďme následující rozvoj obou stran rovnice (2.3) až do druhého řádu v h

$$R^{(0)}_{\mu\nu}(\gamma) + R^{(1)}_{\mu\nu}(\gamma, h) + R^{(2)}_{\mu\nu}(\gamma, h) = 8\pi[\tilde{T}^{(0)}_{\mu\nu}(\gamma, \varphi) + \tilde{T}^{(1)}_{\mu\nu}(\gamma, h, \varphi) + \tilde{T}^{(2)}_{\mu\nu}(\gamma, h, \varphi)] \,, \quad (2.4)$$

kde $\tilde{T}^{(0)}_{\mu\nu}(\gamma, \varphi) \equiv \tilde{T}_{\mu\nu}(\gamma, \varphi)$ a další členy na pravé straně odpovídají definicím (1.82) a (1.83). Členy v rozvoji Ricciho tenzoru a jejich řády jsou stejné jako ve vakuovém případě (1.8)–(1.10). Pro členy rozvoje tenzoru energie a hybnosti, na základě předpokladu o jeho nezávislosti na derivacích metriky, platí $\tilde{T}^{(0)}_{\mu\nu} = O(1)$, $\tilde{T}^{(1)}_{\mu\nu} = O(\varepsilon)$ a $\tilde{T}^{(2)}_{\mu\nu} = O(\varepsilon^2)$. V nejvyšším řádu tedy získáme vlnovou rovnici

$$R^{(1)}_{\mu\nu}(\gamma, h) = 0 \,, \quad (2.5)$$

identickou s vakuovým případem (1.18). Další řád určuje vliv vln na pozadí,

$$R^{(0)}_{\mu\nu}(\gamma) - 8\pi\tilde{T}^{(0)}_{\mu\nu}(\gamma, \varphi) = -R^{(2)}_{\mu\nu}(\gamma, h) \,. \quad (2.6)$$

Rovnici (2.6) převedeme do tvaru Einsteinovy rovnice pro pozadí

$$G_{\mu\nu}(\gamma) - 8\pi T_{\mu\nu}(\gamma, \varphi) = -[R^{(2)}_{\mu\nu}(\gamma, h) - \tfrac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R^{(2)}(\gamma, h)] \,, \quad (2.7)$$

která se od vakuového případu liší (viz. rovnice (1.32), (1.33)) přítomností druhého členu na levé straně, který představuje dominantní člen rozvoje tenzoru energie a hybnosti. Jak vlnovou rovnici (2.5), tak pravou stranu rovnice (2.7) můžeme dále upravovat pomocí středování a WKB aproximace stejným způsobem jako ve vakuu. V následujícím textu se proto budeme i v nevakuovém případě odkazovat na příslušné vztahy odvozené při nulovém tenzoru energie a hybnosti $T_{\mu\nu} = 0$. To nám umožní zkoumat i vysokofrekvenční vlny v prostoročasech s nenulovou kosmologickou konstantou Λ. Je ihned zřejmé, že chování vysokofrekvenčních gravitačních vln v de Sitterově resp. anti-de Sitterově vesmíru je určeno vlnovou rovnicí (2.5), jak bylo již dříve demonstrováno v [24].

Následující části práce budou věnovány studiu konkrétních příkladů vysokofrekvenčních gravitačních vln ve speciálních prostoročasech.

2.2 Gravitační vlny ve WKB aproximaci

V této části provedeme explicitní konstrukci vysokofrekvenčních gravitačních vln užitím Isaacsonovy metody ve WKB aproximaci „geometrické optiky“. Soustředíme se přitom na prostoročasy, které mají významné geometrie vlnoploch, resp. speciální algebraickou strukturu pozadí.

2.2.1 Rovinné vlny

Začneme studiem vysokofrekvenčních vln v prostoročasech s velmi privilegovanou strukturou, kdy vlnoplochy zářivého řešení mají rovinnou geometrii. Řešení problémů v elektrodynamice či teorii kontinua je v případě rovinné vlnoplochy obvykle velmi jednoduché, nejinak tomu bude i zde.

Vyjdeme ze známé metriky pp-vln (viz. např. [7], kde lze nalézt i řadu odkazů, především na klasické práce Bondiho, Piraniho a Robinsona [4], Ehlerse a Kundta [4], a dalších)

$$ds^2 = -2f(u,x,y)du^2 - 2dudv + dx^2 + dy^2 \ . \tag{2.8}$$

Tato metrika představuje nejjednodušší gravitační vlny v Minkowského vesmíru šířící se v nulovém směru $\frac{\partial}{\partial v}$ s fází popsanou retardovaným časem u. Pokud f splňuje rovnici $\Delta f = 0$, kde $\Delta = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$, je metrika (2.8) přesným řešením vakuových Einsteinových rovnic. Funkce $f(u,x,y)$ nebude ovšem v našem případě popisovat přesné gravitační vlny, ale vliv vysokofrekvenčních perturbací na pozadí tvaru (2.8). Zavedeme fázi gravitační vlny $\phi = \phi(u)$ a odpovídající vlnový čtyřvektor $k_\mu = (\dot{\phi}, 0, 0, 0)$, kde $\dot{\phi}=\frac{\partial \phi}{\partial u}$. Zaveďme dále parametr rychlosti $U \equiv \frac{dv}{d\tau} = v^1$ pozorovatele na pevném x a y, příslušnou čtyřrychlost v^μ pak určíme z rovnice $v^\mu v_\mu = -1$, tedy

$$\left(v^0\right)^2(-2f) - 2v^0 U = -1 \ .$$

Řešením této kvadratické rovnice dostaneme $v^0 = (U \pm \Gamma)^{-1}$, kde $\Gamma = \sqrt{U^2 + 2f}$. Abychom zajistili kladnou složku $v^0 = \frac{du}{d\tau}$, zvolíme horní znaménko, tvar čtyřrychlosti tedy je :

$$v^\mu = \left((U+\Gamma)^{-1}, U, 0, 0\right) \ .$$

V případě, kdy funkci f můžeme považovat za dostatečně malou, lze přibližně psát $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(t+z)$, $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(t-z)$, což pro nulové f transformuje metriku (2.8) do Minkowského tvaru. Parametr rychlosti se tak zjednoduší na $U = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{dz}{d\tau} + \frac{dt}{d\tau})$, pro stojícího pozorovatele platí $U = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pozorovatel se čtyřrychlostí v^μ pozoruje frekvenci gravitačních vln

$$\omega(u)[U,x,y] = v^\mu k_\mu = (U+\Gamma)^{-1}\dot{\phi} \ ,$$

kde je oddělena závislost na poloze pozorovatele a jeho rychlosti od časového průběhu měřené frekvence. Pozorovatel stojící v souřadnicích x, y, z tedy měří při malé hodnotě f frekvenci $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\phi}$.

Nyní určíme charakter gravitačního záření s rovinnými vlnoplochami ve WKB aproximaci (1.55)

$$h_{\mu\nu} = \mathcal{A}(u,v,x,y)\, e_{\mu\nu} \exp i\phi(u) \ ,$$

kde $\mathcal{A}$ a ϕ splňují podmínky (1.39) zaručující konzistenci aproximace. Perturbace musí splňovat podmínky (1.56)–(1.61), které určují vliv pozadí na šíření vln:

1. $k^\nu k_\nu = \gamma^{00} k_0 k_0 = 0$, kde jsme užili explicitní tvar vlnového vektoru a skutečnosti $\gamma^{00} = 0$.

2. $k_\mu e^{\mu\nu} = k_0 e^{0\nu} = 0 \Rightarrow e^{0\nu} = 0$, takže $e_{1\nu} = 0$.

   K dalšímu omezení stupňů volnosti polarizace můžeme užít dva způsoby.

   První spočívá ve využití dodatečné kalibrační volnosti (viz. rovnice (1.29)), která nenarušuje kalibrační podmínky. Obvyklý požadavek lze zapsat ve tvaru $v^\mu e_{\mu\nu} = 0$, což vyjadřuje ortogonalitu perturbací vůči čtyřrychlosti pozorovatele. Výsledkem je podmínka $e_{0\mu} = 0$.

   Druhý spočívá v užití členu nejvyššího řádu (1.63) v rozvoji Riemannova tenzoru k rozlišení skutečných a „souřadnicových vln“ (souřadnicové k němu nepřispívají). Takto zjistíme, že jediné nenulové složky jsou tyto $R^{(1)}_{0202} \simeq -(k_0)^2 h_{22}$, $R^{(1)}_{0303} \simeq -(k_0)^2 h_{33}$ a $R^{(1)}_{0203} \simeq -(k_0)^2 h_{32}$. Tedy složky $e_{0\nu}$ nejsou fyzikální, ale jen souřadnicové vlny, nebot’ nepřispívají ke křivosti. Dostáváme tedy shodný výsledek.

3. Podmínka $\gamma^{\mu\nu} e_{\mu\nu} = 0$ má proto tvar

   $$e_{22} + e_{33} = 0 \ .$$

   Výše uvedený postup snížil počet stupňů volnosti na dva, odpovídající $e_{22} = -e_{33} \neq 0$ a $e_{23} \neq 0$. Oba módy vysokofrekvenčních gravitačních vln musí splňovat následující normalizační podmínku:

4. Rovnici $e^{\mu\nu} e_{\mu\nu} = 1$. Tedy

   $$(e_{22})^2 + 2(e_{23})^2 + (e_{33})^2 = 1.$$

   Podmínky 3. a 4. evidentně splňují následující ortonormální tenzory (v tomto případě konstantní) polarizace

   $$e^{(+)}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ ; \quad e^{(\times)}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ . \quad (2.9)$$

Tyto polarizace přesně odpovídají lineárním polarizacím z teorie slabých vln na Minkowského prostoročase značeným $+$ a $\times$. Obecnou polarizaci zapíšeme $e_{\mu\nu} = a e^{(+)}_{\mu\nu} + b e^{(\times)}_{\mu\nu}$, kde $a^2(u,x,y) + b^2(u,x,y) = 1$, zajišťující zachování normalizace.

5. Užitím kontravariantního tvaru vlnového čtyřvektoru $k^\mu = (0, -\dot{\phi}, 0, 0)$ upravíme podmínku $e_{\mu\nu;\alpha}k^\alpha = 0$ do tvaru

$$e_{\mu\nu,1} - \Gamma^\alpha_{\nu 1} e_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu 1} e_{\nu\alpha} = 0.$$

   Dosazením explicitního tvaru Christoffelových symbolů zjistíme, že podmínka je splněna pro oba výše zavedené tenzory polarizace.

6. Amplitudu nakonec určíme ze zbylé rovnice $(\mathcal{A}^2 k^\beta)_{;\beta} = 0$, která se v tomto případě stává triviální,

$$\mathcal{A}_{,1} = 0 \implies \mathcal{A} \neq \mathcal{A}(v)\,.$$

Výsledný tvar perturbací je tedy: $h_{\mu\nu} = \mathcal{A}\, e_{\mu\nu} \exp i\phi$, kde $\mathcal{A}(u,x,y)$ a $\phi(u)$ jsou *libovolné* funkce splňující podmínky (1.39), přičemž tenzory polarizací $e_{\mu\nu}$ mají výše uvedený transverzální charakter (2.9).

Z Einsteinova tenzoru pro metriku (2.8) plyne následující rovnice pro reakci pozadí na přítomnost vysokofrekvenčních vln

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(u,x,y) = \tfrac{1}{8}\mathcal{A}^2(u,x,y)\dot{\phi}^2\,, \tag{2.10}$$

podle vztahů (1.32) a (1.62) pro $T^{eff}_{\mu\nu} = T^{VF}_{\mu\nu}$. Z rovnice (2.10) plyne, že f je pomalu se měnící funkcí u, neboť takové jsou podle předpokladů WKB aproximace jak amlituda $\mathcal{A}$, tak „frekvence" $\phi_{,u}$. V případě, kdy je f pouze funkcí u, dostneme na levé straně poslední rovnice nulu, tedy v tomto případě nelze zkonstruovat vysokofrekvenční gravitační záření konzistentní s daným pozadím. To ovšem není nikterak překvapivé, neboť odpovídající metriku lze transformovat do Minkowského tvaru. Rovnice (2.10) je formálně shodná s rovnicí, kterou musí splňovat přesné pp-vlny v přítomnosti pole negravitačního nulového záření.

2.2.2 Cylindrické vlny

Vyjdeme z metriky v Einsteinově-Rosenově tvaru

$$ds^2 = -e^{2\gamma(t,\rho) - 2\psi(t,\rho)}(dt^2 - d\rho^2) + e^{2\psi(t,\rho)} dz^2 + \rho^2 e^{-2\psi(t,\rho)} d\varphi^2\,,$$

která popisuje přesné cylindrické gravitační vlny (splňují-li funkce γ a ψ příslušné rovnice pole) [5], [8], [7].

Naším cílem je zkonstruovat příslušné vysokofrekvenční gravitační vlny ve smyslu perturbačním. Položíme $\psi = 0$, požadujeme $\gamma(t,\rho) = \gamma(t-\rho)$ a přejdeme k retardovanému času $u = t - \rho$. V souřadnicích u, ρ, z, ϕ má metrika pozadí tvar

$$ds^2 = e^{2\gamma(u)}(-du^2 - 2dud\rho) + dz^2 + \rho^2 d\varphi^2 \ .$$

Pozorovatelé, kteří se pohybují pouze v prostorovém směru $\frac{\partial}{\partial\rho}$ s rychlostí $U = \frac{d\rho}{d\tau}$, přičemž $z = konst.$, $\varphi = konst.$ mají čtyřrychlost

$$v^\mu = (-U + \Gamma, U, 0, 0) \ ,$$

kde nyní $\Gamma = \sqrt{U^2 + e^{-2\gamma}}$. Pokud opět zavedeme fázi $\phi = \phi(u)$ a odpovídající vlnový čtyřvektor $k_\mu = (\dot\phi, 0, 0, 0)$, naměří tito pozorovatelé frekvenci

$$\omega(u)[U] = (-U + \Gamma)\dot\phi \ .$$

Pozorovatel v klidu ($\rho = konst.$), pak měří frekvenci $\omega = e^{-\gamma}\dot\phi$, závislou v tomto případě pouze na retardovaném čase (všichni pozorovatelé při průchodu danou nadplochou $u = konst.$ naměří stejnou hodnotu nezávislou na ρ, z, φ).

Nejobecnější tvar perturbací v tomto případě je dán amplitudou $\mathcal{A} = \mathcal{A}(u,\rho)$. Podmínky 1., 2. i následující poznámka o vyloučení nefyzikálních módů $e_{0\mu}$ uvedené v předchozí části 2.2.1 platí i zde. Řešení ostatních podmínek je následující:

3. Podmínka $\gamma^{\mu\nu}e_{\mu\nu} = 0$ má tvar

$$\frac{1}{\rho^2}(\rho^2 e_{22} + e_{33}) = 0 \ .$$

4. Podmínku normalizace $e_{\mu\nu}e^{\mu\nu}$ upravíme do tvaru

$$\frac{1}{\rho^4}[\rho^4(e_{22})^2 + 2\rho^2(e_{23})^2 + (e_{33})^2] = 1 \ .$$

   Uvedeným podmínkám vyhovují tenzory

$$e^{(+)}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho^2 \end{pmatrix} \ ; \ e^{(\times)}_{\mu\nu} = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

   Splňují i bod 5. z části 2.2.1, o čemž se lze přesvědčit explicitním výpočtem.

6. Modifikace nastává v případě rovnice pro amplitudu. Rovnici $(\mathcal{A}^2 k^\beta)_{;\beta} = 0$, kde $k^\mu = (0, -e^{-2\gamma(u)}\dot\phi, 0, 0)$, lze upravovat následujícím způsobem :

$$(\mathcal{A}^2 k^1)_{,1} + \mathcal{A}^2\Gamma^\beta_{\beta 1}k^1 = 0 \ ,$$
$$2\mathcal{A}_{,1} + \mathcal{A}\Gamma^\beta_{\beta 1} = 0 \ ,$$
$$2\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\rho} + \frac{\mathcal{A}}{\rho} = 0 \ .$$

Užitím separace proměných $\mathcal{A}(u,\rho) = \mathcal{U}(u)R(\rho)$ se rovnice zjednoduší na

$$\frac{2}{R}\frac{\partial R}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}(\ln R^2) = -\frac{1}{\rho} ,$$

jejímž řešením je $R = K/\sqrt{\rho}$,kde K je konstanta.

Perturbace proto mají tvar $h_{\mu\nu} = (1/\sqrt{\rho})\mathcal{U}(u)\, e_{\mu\nu} \exp i\phi$.

Rovnice reakce pozadí na přítomnost gravitační vlny je dána

$$\frac{\partial \gamma(u)}{\partial u} = -\tfrac{1}{8}\mathcal{U}^2(u)\dot{\phi}^2 ,$$

Pro pozorovatele, který v užitých souřadnicích stojí, platí

$$\frac{\partial \gamma(u)}{\partial u} = -\tfrac{1}{8}\mathcal{U}^2(u)\omega^2(u)e^{2\gamma(u)} .$$

2.2.3 „Sférické“ vlny Robinsonova-Trautmanova typu s $\Lambda \neq 0$

V této části budeme předpokládat, že pozadím, v němž se šíří vysokofrekvenční gravitační vlny, je prostoročas Robinsonova-Trautmanova typu [6], [7], [25]. Metrika má ve standardních souřadnicích tvar

$$ds^2 = -[K - 2m(u)/r - 2Mr - H^2r^2]du^2 - 2dudr + \frac{r^2}{P^2}(d\eta^2 + d\xi^2) , \qquad (2.11)$$

kde $H^2 = \Lambda/3$ (Λ je kosmologická konstanta), $M = (\ln P)_{,u}$, $K = \Delta(\ln P)$, $\Delta \equiv P^2(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2})$ a $P = P(u,\eta,\xi)$ je zatím obecná funkce. Pokud funkce P splňuje Robinsonovu-Trautmanovu polní rovnici, pak je (2.11) přesným řešením.

Uvažujme pozorovatele, kteří se pohybují pouze *radiálně* ($\eta = konst.$, $\xi = konst.$), a to rychlostí $U = \frac{dr}{d\tau} = v^1$. Čtyřrychlost zmíněných pozorovatelů má v souřadnicích (u,r,η,ξ) tvar:

$$v^\mu = \big((U+\Gamma)^{-1}, U, 0, 0\big) ,$$

kde $\Gamma = \sqrt{U^2 - \gamma_{00}}$.

Vzhledem k existenci privilegovaných nulových geodetik ve směru $\frac{\partial}{\partial r}$ a definici retardovaného času u, zavedeme fázi gravitačních vln ve tvaru $\phi = \phi(u)$ a odpovídající vlnový čtyřvektor $k_\mu = (\dot{\phi}, 0, 0, 0)$. Libovolný fyzikální pozorovatel s rychlostí $U = \frac{dr}{d\tau}$ v místě r, η, ξ pak měří frekvenci

$$\omega(u)[U, r, \eta, \xi] = k_\mu v^\mu = (U+\Gamma)^{-1}\dot{\phi} , \qquad (2.12)$$

kde nalevo je oddělena závislost na poloze pozorovatele a jeho rychlosti od časového průběhu měřené frekvence. Pozorovatel v klidu by tedy v místě, kde platí $\gamma_{00} = -1$, naměřil frekvenci $\omega = \dot{\phi}$.

Nyní určíme strukturu gravitační záření v Robinsonových-Trautmanových prostoročasech ve WKB aproximaci

$$h_{\mu\nu} = \mathcal{A}(u, r, \eta, \xi) e_{\mu\nu} \exp i\phi(u) \ .$$

Podmínky 1., 2. i následující poznámka o vyloučení nefyzikálních módů $e_{0\mu}$ z části 2.2.1 opět platí. Modifikace ostatních podmínek a jejich řešení jsou následující:

3. Podmínku $\gamma^{\mu\nu} e_{\mu\nu} = 0$ upravíme do tvaru

$$\frac{P^2}{r^2}(e_{22} + e_{33}) = 0 \ .$$

Volba vhodné kalibrace snížila počet stupňů volnosti na dva, odpovídající $e_{22} = -e_{33} \neq 0$ a $e_{23} \neq 0$. Oba módy musí splňovat následující normalizační podmínku :

4. $e^{\mu\nu} e_{\mu\nu} = 1$, kterou můžeme upravit

$$\frac{P^4}{r^4}\left[(e_{22})^2 + 2(e_{23})^2 + (e_{33})^2\right] = 1.$$

Nyní již lze zapsat řešení ve tvaru normalizovaných bázových módů tenzoru polarizace :

$$e^{(+)}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{r^2}{p^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ ; \ e^{(\times)}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{r^2}{p^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Snadno zjistíme,že oba módy vyhovují bodu 3. , jsou normovány (bod 4.) a navíc jsou navzájem ortogonální. Obecnou polarizaci zapíšeme

$$e_{\mu\nu} = a e^{(+)}_{\mu\nu} + b e^{(\times)}_{\mu\nu} \ , \quad a^2(u, \eta, \xi) + b^2(u, \eta, \xi) = 1 \qquad (2.13)$$

5. Užitím kontravariantních složek vlnového čtyřvektoru $k^\mu = (0, -\dot{\phi}, 0, 0)$ upravíme podmínku $e_{\mu\nu;\alpha} k^\alpha = 0$ do tvaru

$$e_{\mu\nu,1} - \Gamma^{\alpha}_{\nu 1} e_{\mu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu 1} e_{\nu\alpha} = 0.$$

Dosazením explicitního tvaru Christoffelových symbolů pro metriku (2.11) zjistíme, že podmínka je splněna pro oba výše zavedené tenzory.

6. Amplitudu nakonec určíme z rovnice $(\mathcal{A}^2 k^\beta)_{;\beta} = 0$, kterou upravíme dotvaru

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r} + \frac{\mathcal{A}}{r} = 0 \ ,$$

užijeme separaci proměných $\mathcal{A}(u,r,\eta,\xi) = U(u,\eta,\xi)R(r)$ a rovnice se zjednoduší na diferenciální rovnici

$$\frac{\partial}{\partial r}(\ln R) = -\frac{1}{r}\ .$$

Řešením je evidentně $R(r) = K/r$, kde K je konstanta.

Celkové řešení má tudíž tvar

$$h_{\mu\nu} = r^{-1}U(u,\eta,\xi)e_{\mu\nu}\exp i\phi(u)\ ,$$

kde $U(u,\eta,\xi)$ a $\phi(u)$ jsou zatím libovolné funkce splňující podmínky (1.39) a $e_{\mu\nu}$ má tvar (2.13). Pokud definujeme

$$U^{(+)}(u,\eta,\xi) = U(u,\eta,\xi)a(u,\eta,\xi),\ U^{(\times)}(u,\eta,\xi) = U(u,\eta,\xi)b(u,\eta,\xi)\ ,$$

můžeme řešení přepsat do tvaru

$$h_{\mu\nu} = r^{-1}\left[U^{(+)}e^{(+)}_{\mu\nu} + U^{(\times)}e^{(\times)}_{\mu\nu}\right]\exp i\phi(u)\ . \tag{2.14}$$

Tyto vlny můžeme interpretovat jako „sférické“, pokud předpokládáme, že dvojrozměrné nadplochy $r = konst., u = konst.$ s metrikou $dl^2 = P^{-2}(d\eta^2 + d\xi^2)$ jsou homeomorfní $\mathcal{S}^2$ (topologicky sférické). Navíc lze ukázát (viz. [16]), že pokud jsou nadplochy skutečně sférami, můžeme vysokofrekvenční záření lokálně v asymptotické oblasti $r \to \infty$ považovat za rovinné.

Ovlivnění pozadí určíme z rovnice $R^{(0)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(0)}\gamma_{\mu\nu} + \Lambda\gamma_{\mu\nu} = 8\pi T^{HF}_{\mu\nu}$ (viz. (2.7) za použití (1.62)), která svazuje funkce $U^{(+)}(u,\eta,\xi)$, $U^{(\times)}(u,\eta,\xi)$ a $\phi(u)$ s funkcemi $P(u,\eta,\xi)$ a $m(u)$ vystupujícími v metrice pozadí v úloze „zdrojů“. Konkrétně pro jedinou netriviální složku $(0,0)$ platí (po vynásobení $\frac{r^2}{2}$)

$$\begin{aligned}\left(-\frac{\partial m(u)}{\partial u} + 3M(u,\eta,\xi)m(u) + \tfrac{1}{4}\Delta K(u,\eta,\xi)\right) &= \tfrac{1}{16}\{[U^{+}(u,\eta,\xi)]^2 + [U^{\times}(u,\eta,\xi)]^2\}\dot{\phi}^2 \\ &= \tfrac{1}{16}\{[U^{+}(u,\eta,\xi)]^2 + [U^{\times}(u,\eta,\xi)]^2\}\omega_0^2(u)[r_0,\eta,\xi]^2 \\ &\quad\times\left(K(u,\eta,\xi) - 2M(u,\eta,\xi)r_0 - \frac{2m(u)}{r_0} - H^2{r_0}^2\right)\ ,\end{aligned} \tag{2.15}$$

kde jsme užili řešení ve tvaru (2.14). Frekvenci $\omega_0(u)$ měří pozorovatel v klidu ($\frac{dr}{d\tau} = 0$) v místě r_0, η, ξ.

Obdrželi jsme tak výsledky, které jsou v úplné shodě s těmi, které dříve získali Hogan a Futamase [16]. Rozdíl mezi rovnicí (3.55) z jejich článku a rovnicí (2.15) je jen v tom, že *uvažovali pouze konstantní frekvenci*, $\dot{\phi} = konst.$. Hogan a Futamase sice vyšli z obecnějšího prostoročasu, ale nakonec získali explicitní vysokofrekvenční záření pouze na Robinsonova-Trautmanově pozadí. Postupovali technikou rozpracovanou Burnettem [15], která se podstatně liší od Isaacsonova přístupu (například místo středování užívá slabou limitu). Jejich výsledek je ovšem i přes náročnější a nepříliš přehledný postup méně obecný než náš, nebot' (jak jsme již řekli) apriori pracují jen s konstantní frekvencí.

Uveďme ještě, že členu $\frac{\partial m}{\partial u}$ nelze dát obecně jasný fyzikální význam, nebot' se m netriviálně transformuje při změně souřadnic u a r, jak v závěru svého článku upozorňují Hogan a Futamase. Z rovnice (2.15) však lze vytvořit invariantní výraz, pokud předpokládáme, že $K(u, \eta, \xi)$ nemá singularity na uzavřených nadplochách Σ_2 daných $u = konst.$,$r = konst.$ (K je Gaussova křivost těchto prostorových dvouploch, parametrizovaných η, ξ). Po vydělení rovnice (2.15) P^2 a integraci přes nadplochu Σ_2 totiž dostáváme výraz invariantní vůči zmíněným změnám souřadnic,

$$\oint_{\Sigma_2} P\frac{\partial}{\partial u}(P^{-3}m)\, d\eta d\xi = -\frac{1}{16}\oint_{\Sigma_2} P^{-2}\{[U^+(u,\eta,\xi)]^2 + [U^\times(u,\eta,\xi)]^2\}\dot{\phi}^2\, d\eta d\xi \ . \quad (2.16)$$

Tato rovnice má tvar Bondiho-Sachsovy formule pro ztrátu hmoty „zdroje“ gravitačního záření.

V následující části se zaměříme na důležitý speciální prostoročas Robinsonova-Trautmanova typu (2.11). Půjde o pozadí tvaru Vaidyovy–de Sitterovy a Vaidyovy–anti-de Sitterovy metriky, v nichž jsou vlnoplochy skutečně sférické.

2.2.4 Vysokofrekvenční vlny ve Vaidyově–de Sitterově a Vaidyově–anti-de Sitterově vesmíru

Metrika známého Vaidyova řešení s kladnou kosmologickou konstantou má v Eddingtonových-Finkelsteinových souřadnicích u, r, θ, φ tvar [7]

$$ds^2 = -[1 - 2m(u)/r - H^2r^2]du^2 - 2dudr + r^2d\Omega^2 \ , \quad (2.17)$$

kde $m(u)$ je zatím libovolná kladná nerostoucí funkce, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$, $H^2 = \Lambda/3$. Jedná se o speciální prostoročas Robinsonovy-Trautmanovy třídy (2.11) pro $P = 1 + \frac{1}{4}(\eta^2 + \xi^2)$, $M = 0$ a $K = 1$, přejdeme-li ke standardním sférickým souřadnicím na Σ_2. Pro $m(u) = konst.$ dostáváme známé Schwarzschildovo–de Sitterovo řešení vakuových Einsteinových rovnic s kosmologickým členem.

Vzhledem k tvaru metrického koeficientu γ_{00} v (2.17) je tvar závislosti amlitudy ve WKB aproximaci jednodušší než v obecném případě, totiž

$$h_{\mu\nu} = \mathcal{A}(u, r)e_{\mu\nu}\exp i\phi(u) \ ,$$

nebot' jediná netriviální složka Einsteinova tenzoru nebude záviset na souřadnicích θ, φ parametrizujících vlnoplochy. Podobně vzhledem k sférické symetrii je tvar frekvence $\omega(u)[U, r]$, tedy opět nezávislý na θ, φ.

Oproti obecnému případu Robinsonovy-Trautmanovy metriky diskutovanému v předchozí části 2.2.3 dojde v tomto spaciálním případě jen ke změně tenzorů polarizace a rovnice (2.15) určující vztah pozadí a perturbací.

Podmínka $\gamma^{\mu\nu}e_{\mu\nu} = 0$ má v souřadnicích u, r, θ, φ tvar

$$\frac{e_{22}}{r^2} + \frac{e_{33}}{r^2 \sin\theta^2} = 0,$$

podmínka na normu $e_{\mu\nu}e^{\mu\nu} = 1$, pak

$$\frac{(e_{22})^2}{r^4} + \frac{2(e_{23})^2}{r^4 \sin\theta^2} + \frac{(e_{33})^2}{r^4 \sin\theta^4} = 1.$$

Řešením těchto rovnic jsou evidentně polarizační módy :

$$e^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{r^2 \sin\theta}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; e^{(2)}_{\mu\nu} = \frac{r^2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta^2 \end{pmatrix} .$$

Amplituda vysokofrekvenčních vln je opět $\mathcal{A} = r^{-1}U(u)$.

Rovnici (2.15) lze upravit do tvaru

$$\frac{\partial m(u)}{\partial u} = -\tfrac{1}{16}\{[U^+(u,\eta,\xi)]^2 + [U^\times(u,\eta,\xi)]^2\}\dot{\phi}^2 =$$
$$= -\tfrac{1}{16}\{[U^+(u,\eta,\xi)]^2 + [U^\times(u,\eta,\xi)]^2\}\omega_0^2(u)[r_0(u)]\left(1 - \frac{2m(u)}{r_0(u)} - H^2 r_0^2(u)\right) ,(2.18)$$

kde frekvenci ω_0 měří stojící pozorovatel ve vzdálenosti r_0. Jak plyne z (2.12), frekvenci $\dot{\phi}$ by měřil pozorovatel v klidu v nekonečnu pro $\Lambda = 0$ (tedy ve Vaidyově řešení), pro $\Lambda > 0$ a $m > 0$ ale takový pozorovatel neexistuje. V tomto speciálním případě Robinson-Trautmanovy metriky má $\frac{\partial m(u)}{\partial u}$ skutečně význam změny hmotnosti „zdroje". Z poslední rovnice vidíme, že pokud hvězda o hmotnosti $m(u)$ vyzařuje vlny o frekvenci $\omega_0(u)$ ze svého povrchu $r_0(u)$, tak ztrácí hmotu. Začne-li hvězda kolabovat, její poloměr $r_0(u)$ se zmenšuje a blíží se horizontu příslušné černé díry danému $r_+ = \frac{2}{\sqrt{\Lambda}} \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$ (poznamenejme, že pro $9\Lambda m^2 < 1$ existují tři kořeny kubické rovnice $\gamma_{00} = 0$, z nichž kladné jsou r_+ a $r_{++} = \frac{2}{\sqrt{\Lambda}} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \quad ; r_+ < r_{++};$ $\cos\alpha = -3m(u)\sqrt{\Lambda}$).

Jak se poloměr hvězdy blíží r_+ (malá rychlost takové změny opravňuje zanedbání rychlosti), dochází k stále většímu rudému posuvu pozorovaného záření, až dojde k vynulování pravé strany rovnice (2.18) a hmotnost $m(u)$ se stává konstantní.

Doposud jsme pracovali pouze s retardovaným časem u, ale stejný postup řešení lze užít i pro advancovaný čas. Jeho zavedení se projeví opačným znaménkem u nediagonálního členu metriky. V takovém případě bychom dospěli k neklesající funkci hmotnosti. Nedávno Wagh a Maharaj [26] studovali právě tento případ Vaidyovy–de Sitterovi metriky s ohledem na výskyt nahých singularit. Omezili se na lineárně rostoucí funkci hmoty m vycházející z nulové počáteční hodnoty a rostoucí na konstantní konečnou hodnotu vlivem dopadající slupky záření. Zjistili, že singularita je lokálně nahá, ve shodě s podobným zjištěním pro Vaidyovu metriku s nulovou kosmologickou konstantou. Na rozdíl od Vaidyovy metriky zde ovšem neexistují asymptotičtí pozorovatelé v nekonečnu, na které se odvolávají obvyklé formulace hypotézy kosmické cenzury. Jejich výsledek tedy podporuje potřebnost Penroseovy *Hypotézy silné kosmické cenzury* [27], která požaduje, aby singularita nebyla viditelná pro žádného fyzikálního pozorovatele, nejen asymptotického.

Podobně lze vyšetřovat i vysokofrekvenční gravitační záření ve Vaidyově–anti-de Sitterově vesmíru. Rozdíl oproti předchozímu případu spočívá pouze v zápornosti členu H^2. Ta se přímo projeví pouze při řešení rovnice $\gamma_{00} = 0$. Dva kořeny jsou komplexní a jeden reálný, totiž

$$r = -2\sqrt{-\frac{1}{3H^2}}\cot 2\alpha,$$

kde $\tan\alpha = \sqrt[3]{\tan\beta/2}$ $\big(\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, 0)\big)$, kde $\tan\beta = H^2/m(u)\sqrt{(-\Lambda)^{-3}}$ $\big(\beta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)\big)$. Jednoduše se přesvědčíme, že v našem případě jde o kořen kladný.

Příklady zkoumané v částech 2.2.1–2.2.4 jasně ukázaly, jak může symetrie a privilegovaná algebraická struktura pomoci v řešení problému vysokofrekvenčních vln. Směr šíření gravitačních vln, je totiž geometricky určen směrem připouštějícím příslušné nerotující a nedeformující se kongruence nulových geodetik. Značné zjednodušení úlohy přináší též zavedení odpovídající světelné souřadnice. Pokud jsou v metrice navíc separovány souřadnice popisující vlnoplochy gravitačního záření $u = konst.$, lze poměrně jednoduše odhadnout tvar dvou odpovídajících ortonormálních tenzorů polarizace. Chování amplitudy gravitačních vln v závislosti na prostorové souřadnici, v jejímž směru se šíří, přesně odpovídá očekávání známému z elektromagnetismu: v případě rovinné vlny je konstantní, v cylindrickém případě klesá jako $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ a ve sférickém jako $\frac{1}{r}$.

2.3 Vysokofrekvenční záření ve FRW modelech s křivostí $k = 0$

Doposud jsme používali při výpočtech selfkonzistentní přístup založený na WKB aproximaci. V této části již naším cílem nebude započítávat vliv vysokofrekvenčních vln na pozadí, ale pouze odhalit jaký vliv má křivé pozadí na jejich šíření. Oproti WKB přístupu, v němž byl směr šíření vln geometricky privilegován a tudíž dán apriori, budeme nyní zkoumat obecný případ šíření v libovolném směru. Budeme studovat prostorově homogenní a izotropní FRW prostoročasy s tenzorem energie a hybnosti ideální tekutiny a nulovou prostorovou křivostí k. Zmíněný tenzor energie a hybnosti splňuje podmínky našeho zobecnění Isaacsonovy vysokofrekvenční aproximace popsané v části 2.1.2. Víme tedy, že klíčovou vlnovou rovnicí je vztah (2.5). Z rozboru její kalibrační invariance uvedeného v části 1.1.2 víme, že je invariantní do řádu $O(1)$. Navíc, díky členům řádu $O(\varepsilon)$, pro pozadí, jehož Ricciho tenzor splňuje $R_{\mu\nu;\beta} = 0$ (což platí například pro případy de-Sitterovy a anti–de-Sitterovy metriky probírané v 2.3.1 a 2.3.2), je rovnice (2.5) plně konzistentní s kalibračními podmínkami $h_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0$, $h^{\mu}{}_{\mu} = 0$ (viz. rovnice (1.22) a (1.23)). Budeme proto používat vlnovou rovnici (1.27) v takovéto kalibraci.

Ve speciálním případě FRW prostoročasů můžeme metriku pozadí užitím konformního času η zapsat v obvyklém tvaru [28]

$$ds^2 = a^2(\eta)\left(-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\right)\ . \tag{2.19}$$

Nyní dosadíme Christofellovy symboly a tenzor křivosti příslušející této metrice do kalibračních podmínek a vlnové rovnice. Navíc využijeme dodatečné kalibrační volnosti a budeme klást na perturbace podmínku (1.29), tedy $h_{\mu 0} = 0$. V takovém případě se kalibrační podmínka $h^{\mu}{}_{\mu} = 0$ zjednoduší na rovnici

$$\bar{h} \equiv h_{11} + h_{22} + h_{33} = 0$$

a podmínka $h_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0$ na tyto rovnice pro jednotlivé komponenty

$$\begin{aligned} \mu = 0 : \quad h_{11} + h_{22} + h_{33} &= 0\ , \\ \mu = i : \ h_{1i,1} + h_{2i,2} + h_{3i,3} &= 0\ . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Jediné netriviální komponenty vlnové rovnice (1.27) lze nyní upravit do následujícího tvaru

$$\begin{aligned} (i,j)_{i\neq j} : \quad a^2(-h_{ij,00} + h_{ij,11} + h_{ij,22} + h_{ij,33}) + 2a\dot{a}h_{ij,0} - 4\dot{a}^2 h_{ij} &= 0\ , \\ (i,i) : \ a^2(-h_{ii,00} + h_{ii,11} + h_{ii,22} + h_{ii,33}) + 2a\dot{a}h_{ii,0} - 2\dot{a}^2(2h_{ii} - \bar{h}) &= 0\ , \end{aligned} \tag{2.21}$$

kde $\dot{a} = \frac{\partial a}{\partial \eta}$ a v poslední rovnici se nesčítá přes i. Složky vlnové rovnice $(0,0)$ a $(0,i)$ jsou splněny identicky zásluhou kalibračních podmínek (2.20). Dosazením (2.20) do dynamických rovnic (2.21) zjistíme, že *všech šest* komponent tenzoru perturbací splňuje stejnou rovnici, totiž

$$a^2\left[-\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right]+2a\dot{a}\frac{\partial f}{\partial\eta}-4\dot{a}^2 f=0\ , \tag{2.22}$$

kde $f(\eta,x,y,z)$ představuje libovolnou komponentu vysokofrekvenční perturbace h_{ij}. Poznamenejme ovšem, že první z kalibračních podmínek (2.20) omezuje počet nezávislých komponent tenzoru perturbací na pět, a to ve shodě s očekávaným počtem stupňů volnosti pro pole spinu 2. Rovnici (2.22) můžeme přepsat pomocí kovariantního d'Alembertova operátoru

$$\Box f=f^{;\mu}{}_{;\mu}=a^{-2}\left[-\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right]-2a^{-3}\dot{a}\frac{\partial f}{\partial\eta}$$

do následujícího tvaru

$$\Box f+\frac{4}{a^2}\left(\frac{f}{a}\right)^{\bullet}=0\ .$$

K úpravě rovnice (2.22) se nabízí Fourierova transformace v proměných $\vec{x}=(x,y,z)$,

$$\tilde{f}\equiv\mathcal{F}[f](\eta,\vec{k})=\int f(\eta,\vec{x})\exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{x}\right)d\vec{x}\ ,$$

jejíž pomocí získáme

$$\left[a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+|\vec{k}|^2\right)-2a\dot{a}\frac{\partial}{\partial\eta}+4\dot{a}^2\right]\tilde{f}=0\ . \tag{2.23}$$

Konkrétní řešení této obyčejné lineární diferenciální rovnice druhého řádu závisí na explicitním tvaru funkce expanze $a(\eta)$, která určuje, na jakém prostoročase se vysokofrekvenční vlny šíří. Dostaneme tím spektrum možných perturbací $\tilde{f}(\eta,\vec{k})$ a jeho časovou závislost.

2.3.1 Gravitační vlny v de Sitterově vesmíru

De Sitterovo řešení Einsteinových rovnic ve standardních konformně plochých globálních souřadnicích má tvar (viz. např [29])

$$ds^2=\frac{\alpha^2}{\eta^2}(-d\eta^2+dx^2+dy^2+dz^2)\ , \tag{2.24}$$

kde $\alpha=\sqrt{3/\Lambda}$ ($\Lambda>0$ je kosmologická konstanta). Představuje tedy speciální (maximálně symetrický) případ vakuových FRW modelů s $k=0$. V tomto případě tedy budeme dosazovat $a(\eta)=\alpha/\eta$. De Sitterovu varietu lze chápat jako čtyřrozměrný hyperboloid vnořený do pětirozměrného plochého prostoročasu s metrikou signatury $(-1,1,1,1,1)$. (To, zda jde o FRW prostoročas s prostorovou křivostí $k=0,+1$

nebo -1 ovšem závisí na volbě prostorupodobného řezu zmíněným hyperboloidem [8], což je důsledkem lokálního charakteru Einsteinových rovnic.) De Sitterovo řešení je prostoročasem s kladnou konstantní Ricciho skalární křivostí $R = 4\Lambda$ a má (maximální desetiparametrickou) grupu isometrií $SO(1,4)$. V moderní kosmologii hraje významnou roli jako model inflační fáze rozpínání raného vesmíru.

Nyní vyřešíme rovnici (2.23) pro spektrum perturbací v tomto speciálním případě. Po dosazení konkrétního tvaru funkce $a(\eta)$ a jednoduchých úpravách získáme rovnici

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \eta^2} + \frac{2}{\eta}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta} + \left(\frac{4}{\eta^2} + |\vec{k}|^2\right)\tilde{f} = 0 \, . \tag{2.25}$$

Obecným řešením této diferenciální rovnice jsou cylindrické Besselovy funkce J_ν s imaginárním indexem,

$$\tilde{f} = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\left[A(\vec{k})J_{i\frac{\sqrt{15}}{2}}(|\vec{k}|\eta) + B(\vec{k})J_{-i\frac{\sqrt{15}}{2}}(|\vec{k}|\eta)\right] \, . \tag{2.26}$$

Výsledek je v naprosté shodě s tím, jaký obdržel Podolský [24], který ovšem použil vyjádření de Sitterova vesmíru ve formě standardní *synchronní* FRW metriky s $k = 0$. Ta se nejčastěji užívá v inflační kosmologii, pokrývá však pouze polovinu ($\eta > 0$ v globálních souřadnicích) výše zmíněného hyperboloidu a není tedy geodeticky úplná [29]. V práci [24] jsou dále uvedeny explicitní tvary řešení v asymptotických oblastech a výsledek inverzní Fourierovy transformace rovnice (2.26) v případě monochromatické vlny, tedy pro $A(\vec{k}) = A_0\delta(\vec{k} - \vec{k_0})$,$B = B_0\delta(\vec{k} - \vec{k_0})$. Tyto výsledky lze samozřejmě získat i z našeho tvaru metriky. Například tvar monochromatické vlny po inverzní Fourierově transformaci je

$$f = (2\pi)^{-3}\frac{1}{\sqrt{\eta}}\left[A_0 J_{i\frac{\sqrt{15}}{2}}(|\vec{k_0}|\eta) + B_0 J_{-i\frac{\sqrt{15}}{2}}(|\vec{k_0}|\eta)\right] e^{i\vec{k_0}\vec{x}} \, . \tag{2.27}$$

Rovnice (2.25) ovšem umožňuje vyřešit vlnovou rovnici i pro perturbace, u nichž nepředpokládáme vysokofrekvenční charakter. Modifikace spočívá v prostém přidání členu $(-3/\eta^2)$ na její pravou stranu. Pokud zachováme stejnou kalibraci jako pro vysokofrekvenční vlny, získáme řešení ve tvaru rovnice (2.26), ovšem s Besselovými funkcemi indexů $\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Získáváme tedy znovu výsledky shodné s prací [24], kde jsou též uvedeny frekvence gravitační vlny v asymptotické oblasti synchronní metriky. V případě vysokofrekvenční vlny ale musíme být opatrní při jejich fyzikální interpretaci, neboť závisí na členech řádu $O(\varepsilon)$ vlnové rovnice, který není kalibračně invariantní.

2.3.2 Gravitační vlny v anti–de Sitterově vesmíru

Anti–de Sitterův prostoročas je konformně plochým vakuovým řešením Einsteinových rovnic s negativní kosmologickou konstantou. V kontrastu s de Sitterovým vesmírem má však konstantní *zápornou* křivost R=$4\Lambda < 0$. Podobně jako v případě de Sitterova vesmíru ho lze znázornit jako čtyřrozměrný hyperboloid vložený do pětirozměrného prostoročasu se signaturou (-,-,+,+,+), tedy dvěma časovými osami [30]. Řešení vlnové rovnice provedeme v konformně ploché metrice

$$ds^2 = \frac{\beta^2}{x^2}\left(-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \ , \quad \beta = \sqrt{-3/\Lambda} \tag{2.28}$$

vyjádřené v souřadnicích pokrývající celou varietu. Vidíme ihned, že po formální transformaci $\hat{x} = i\eta$, $\hat{\eta} = ix$, $\hat{\alpha} = i\beta$ a vypuštění stříšek získáme metriku (2.24) de Sitterova prostoročasu a nabízí se převzít i odpovídající řešení. To by ovšem v původních souřadnicích znamenalo vynulování komponent perturbací $h_{1\mu}$ díky kalibrační podmínce $h_{0\mu} = 0$ aplikované v nových souřadnicích. Tato podmínka se obecně také zapisuje ve tvaru $h_{\mu\nu}v^\nu = 0$, kde v^ν je čtyřrychlost pozorovatele. V původních souřadnicích by tedy podmínce $h_{1\mu} = 0$ vyhovovala nadsvětelná rychlost ve směru x. Navíc nová souřadnice $\hat{x}$ je ryze imaginární a nemohli bychom v ní provádět Fourierovu transformaci. Tento postup tedy aplikovat nelze.

Vrátíme se proto k obecným kalibračním podmínkám a vlnové rovnici vyjádřené v metrice (2.28), klademe-li $h_{\mu 0} = 0$. Podmínka $h^\mu{}_\mu = 0$ se opět zjednoduší na

$$h_{11} + h_{22} + h_{33} = 0 \ .$$

Netriviální komponenty kalibrační podmínky $h_{\mu\nu}{}^{;\nu}$ mají tvar

$$x(h_{1i,1} + h_{2i,2} + h_{3i,3}) - 2h_{1i} = 0 \ .$$

Jednotlivé komponenty dynamické rovnice (1.27) získávají následující tvar

$$(0,0) : h_{22} + h_{33} = 0 \ ,$$

$$(i,0) : \qquad h_{i1,0} = 0 \ ,$$

$$\begin{aligned}
(1,1) : x^2(-h_{11,00} + h_{11,11} + h_{11,22} + h_{11,33}) + 2xh_{11,1} + 4x(h_{21,2} + h_{31,3}) - 2h_{11} &= 0 \ , \\
(1,2) : x^2(-h_{12,00} + h_{12,11} + h_{12,22} + h_{12,33}) + 2xh_{12,1} + 2x(h_{22,2} + h_{32,3} - h_{11,2}) &= 0 \ , \\
(1,3) : x^2(-h_{13,00} + h_{13,11} + h_{13,22} + h_{13,33}) + 2xh_{13,1} + 2x(h_{32,2} + h_{33,3} - h_{11,3}) &= 0 \ , \\
(2,2) : \ x^2(-h_{22,00} + h_{22,11} + h_{22,22} + h_{22,33}) + 2xh_{22,1} - 4xh_{21,2} + 2(h_{22} - h_{33}) &= 0 \ , \\
(2,3) : x^2(-h_{23,00} + h_{23,11} + h_{23,22} + h_{23,33}) + 2xh_{23,1} - 2x(h_{31,2} + h_{21,3}) + 4h_{23} &= 0 \ , \\
(3,3) : \ x^2(-h_{33,00} + h_{33,11} + h_{33,22} + h_{33,33}) + 2xh_{33,1} - 4xh_{31,3} + 2(h_{33} - h_{22}) &= 0 \ ,
\end{aligned}$$

Dosazením kalibračních podmínek získáme následující vztahy pro perturbace $h_{\mu\nu}$

$$h_{11} = 0 \ , \quad h_{22} = -h_{33} \ , \quad h_{21,0} = 0 \ , \quad h_{31,0} = 0 \ ,$$
$$h_{21,2} + h_{31,3} = 0 \ ,$$
$$x^2(h_{21,11} + h_{21,22} + h_{21,33}) + 4h_{21} = 0 \ ,$$
$$x^2(h_{31,11} + h_{31,22} + h_{31,33}) + 4h_{31} = 0 \ ,$$
$$x^2(-h_{22,00} + h_{22,11} + h_{22,22} + h_{22,33}) + 2xh_{22,1} - 4xh_{21,2} + 4h_{22} = 0 \ ,$$
$$x^2(-h_{23,00} + h_{23,11} + h_{23,22} + h_{23,33}) + 2xh_{23,1} - 2x(h_{31,2} + h_{21,3}) + 4h_{23} = 0 \ .$$

Z uvedených rovnic vidíme, že zbyly pouze dva dynamické stupně volnosti odpovídající $h_{22} = -h_{33}$ a h_{23}. Zbylé dvě nenulové komponenty h_{21} a h_{31} jsou nezávislé na konformním čase η, hrají tedy úlohu „okrajových" podmínek. Nejjednodušší volba je $h_{21} = 0 = h_{31}$, která určitě vyhovuje odpovídajícím rovnicím. V tomto případě dostáváme řešení s dvěma stupni volnosti (polarizacemi), které lze chápat jako *vlnu šířící se ve směru osy* x, jež je čistě transverzální, tedy ovlivňuje geometrii jen v příčných směrech y,z (poznamenejme, že konformně plochá metrika anti–de Sitterova vesmíru není izotropní, ale pouze konformně izotropní). Při zmíněné volbě se rovnice pro oba dynamické stupně volnosti $h_{22} = -h_{33}$ a h_{23} zjednoduší na tvar

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4}{x^2} f = 0 \ ,$$

kde f zastupuje obě možné komponenty h_{22},h_{23}. Pokud nyní provedeme separaci proměných $f(\eta, x, y, z)$=$g(x) \exp i(-k_0\eta + k_2 y + k_3 z)$, získáme rovnici

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial g}{\partial x} + \left(\frac{4}{x} + k_1^2\right) g = 0 \ ,$$

kde $(k_1)^2 = (k_0)^2 - (k_2)^2 - (k_3)^2$. Ta je formálně shodná s (2.25), po záměně x za η a k_1^2 za $|\vec{k}|^2$. Řešením je tedy monochromatická vlna

$$f = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[A J_{i\frac{\sqrt{15}}{2}}(k_1 x) + B J_{i\frac{\sqrt{15}}{2}}(k_1 x) \right] \exp i(-k_0\eta + k_2 y + k_3 z) \ ,$$

která je analogonem vysokofrekvenční monochromatické vlny (2.27) v de Sitterově vesmíru.

Na závěr uveďme zajímavou souvislost našeho výsledku s přesnými gravitačními vlnami v anti–de Sitterově vesmíru popsanými Defriseovým řešením [31], [7], zkoumaným podrobně v nedávné práci [32]

$$\begin{aligned} ds^2 &= \beta^2(d\theta^2 + \sinh^2\theta d\phi^2) + 8\beta^2(\cosh\theta + \sinh\theta\cos\phi)^2 du dv \\ & \quad 16\beta^2(\cosh\theta + \sinh\theta\cos\phi)^4 d(u) du^2 \ , \end{aligned} \tag{2.29}$$

kde $\theta \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$, u,$v$$\in (-\infty, +\infty)$ a vlnoplochy $u = konst.$ jsou dvojdimenzionální povrchy hyperboloidu s konstantní zápornou křivostí $-\beta$, parametrizované θ, ϕ. Metriku (2.29) můžeme interpretovat i ve smyslu perturbačním. Pozadí v takovém případě tvoří metrika (2.29), pro $d(u) = 0$. Naopak člen metriky γ_{uu} obsahující funkci $d(u)$ představuje vysokofrekvenční perturbace, popsané „malou", ale rychle se měnící funkcí $d(u)$=$O(\varepsilon)$. Kalibrační podmínky jsou tímto perturbačním řešením splněny triviálně. Dosazením explicitního řešení (2.29) do vlnové rovnice (1.27) zjistíme, že je splněna do řádu $O(\varepsilon)$, neboť všechny netriviální komponenty mají tvar $d(u)f(\theta, \phi)$ Vzhledem ke kalibrační neinvarianci vlnové rovnice v tomto řádu, je takový výsledek postačující. Popsané řešení je tedy konzistentní s vlnovou rovnicí (1.27).

Závěrečné poznámky

V přehledové části diplomové práce byla nejprve podrobně popsána Isaacsonova perturbační metoda pro vakuové prostoročasy [11], umožňující studovat vysokofrekvenční gravitační vlny šířící se na křivém pozadí. Poté byl probrán poměrně nedávný příspěvek Efroimského [17], který se týká nového formalismu popisu slabých gravitačních vln. V původní části 2.1.1 bylo provedeno zobecnění Efroimského postupu na vysokofrekvenční vlny a popsána souvislost s Isaacsonovou metodou. Část 2.1.2 byla věnována zobecnění Isaacsonovy metody na nevakuové prostoročasy, jejichž tenzory energie a hybnosti neobsahují derivace metriky.

V oddílu 2.2 bylo pomocí WKB aproximace „geometrické optiky" studováno vysokofrekvenční gravitační záření na význačných pozadích tvaru pp-vln, Einsteinova-Rosenova a Robinsonova-Trautmanova typu. Symetrie i speciální algebraická struktura těchto řešení umožnila nalézt odpovídající explicitní řešení perturbací a jejich vlivu na odpovídající pozadí. Byla též diskutována souvislost s předchozí prací Hogana a Futamaseho [16].

V závěrečném oddílu 2.3 byl studován charakter vysokofrekvenčního záření ve FRW vesmírech s křivostí $k = 0$ bez užití WKB aproximace. Speciálně byl řešen případ de Sitterova vesmíru. Podobně byl v části 2.3.2 zkoumán též případ anti-de Sitterova vesmíru. Zatímco v případě de Sitterova vesmíru jsme obdrželi zcela obecné řešení, pro anti-de Sitterův vesmír jsme získali transverzální gravitační vlny v jednoduchém tvaru, jen pokud se šíří ve význačném směru, což je pochopitelným důsledkem neizotropního charakteru použité konformně ploché metriky.

V předložené diplomové práci byly prezentovány některé nové výsledky, ale zároveň se otevřela řada dalších problémů. Bylo by jistě zajímavé nalézt charakter gravitačního záření ve WKB aproximaci pro případy pozadí, jež postrádají význačné symetrie. Přirozeně se nabízí také problém studia gravitačních vln v obecnější třídě FRW prostoročasů s nenulovou křivostí k, případně v prostorově anizotropních Bianchiho vesmírech.

Literatura

[1] LIGO: `http://www.ligo.caltech.edu`
VIRGO: `http://virgo4p.pg.infn.it/virgo`

[2] Nollert H.P., *Gravitational Wave Astronomy*, Ann. Phys. (Leipzig) **9** (2000), 355-367
Podolský J., *Gravitační vlny: výzva pro příští století*, Čs. čas. fyz. **49** (1999), 113-119

[3] Petrov A.Z., *Classification of spaces defined by gravitational fields*, Sci. Not. Kazan. State Univ. **114** (1954), 55
Debever R., *Tenseur de super-énergie, tenseur de Riemann: cas singuliers*, C. R. Acad. Sci. (Paris) **249** (1959), 1744-1746
Penrose R., *A spinor approach to general relativity*, Ann. Phys. (USA) **10** (1960), 171-201

[4] Bondi H., Pirani F.A.E. a Robinson I., *Gravitational waves in general relativity, III. Exact plane waves*, Proc. Roy. Soc. Lond. **A251** (1959), 519-533
Ehlers J. a Kundt K., *Exact solutions of the Gravitational field equations*, Gravitation: an introduction to Current Research, editor Witten L., J. Wiley& Sons, New York (1962), 49-101

[5] Einstein A. a Rosen N., *On Gravitational Waves*, Journ. Franklin. Inst. **223** (1937), 43-45

[6] Robinson I. a Trautman A., *Spherical Gravitational Waves*, Phys. Rev. Lett. **4** (1960), 431-432
Robinson I. a Trautman A., *Some spherical gravitational waves in general relativity*, Proc. Roy. Soc. Lond. **A265** (1962), 463-473

[7] Kramer D. a kol., *Exact solutions of the Einstein's field equations*, Cambridge University Press, Cambridge (1980)

[8] Bičák J., *Selected solutions of Einstein's equations: their role in general relativity and astrophysics*, v Einstein's Field Equation and Their Physical Interpretation, Festschrift for J. Ehlers, ed. B.G. Schmidt, Lecture Notes in Physics, vol. **540**, Springer, Berlin (2000), 1-126

[9] Einstein A., *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*, Preuss. Akad. Wiss. Sitz. **1** (1916), 688-696
Einstein A., *Über Gravitationwellen*, Preuss. Akad. Wiss. Sitz. **1** (1918), 154-167

[10] Bičák J. a Rudenko V.N., *Teorie relativity a gravitační vlny*, skripta MFF UK, Praha (1986)

[11] Isaacson R.A., *Gravitational radiation in the limit of high frequency I., II.*, Phys. Rev. **166** (1968), 1263-1280

[12] Choquet-Bruhat Y., *Construction de solutions radiatives approchées des équations d'Einstein*, Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Serie VIII, vol.XLIV, fasc. **5** (1968), 649-652

[13] MacCallum M.A.H. a Taub A.H., *The averaged lagrangian and high-frequency gravitational waves*, Commun. Math. Phys. **30** (1973), 153-169

[14] Araujo M.E., *Lagrangian methods and nonlinear high-frequency gravitational waves*, General Relat. and Gravitation **21** (1989), 323-348

[15] Burnett G.A., J. Math. Phys. **30** (1989), 90

[16] Hogan P.A. a Futamase T., *Some high-frequency spherical gravity waves*, J. Math. Phys. **34** (1993), 154-169

[17] Efroimsky M., *Gravity waves in vacuum and in media*, Class. Quantum Gravity **9** (1992), 2601-2614

[18] Brill D.R. a Hartle J.B., Phys. Rev. **135** (1964), B271

[19] Anderson P.R., *Gauge-invariant effective stress-energy tensors for gravitational waves*, Phys.Rev. **D 55** (1997), 3440-3443

[20] Lichnerowicz A., *Relativity, Groups and Topology* (1964), 827

[21] Arnowitt R., Deser S. a Misner C.W., Phys. Rev. **121** (1961), 1556

[22] Tourrenc P., *Effect of a Gravitational Wave on Electromagnetic Radiation confined in a cavity: I. Boundary Coupling*, Gen. Relat. and Gravitation **9** (1978), 123-140

[23] Cruise A.M., *An electromagnetic detector for very-high- frequency gravitational waves*, Class. Quantum Grav. **17** (2000), 2525-2530

[24] Podolský J., *Gravitační záření v kosmologii*, diplomová práce (1987), KTF MFF UK, Praha

[25] Bičák J. a Podolský J., *Cosmic no-hair conjecture and black-hole formation: An exact model with gravitational radiation*, Phys. Rev. **D 52** (1995), 887-895

[26] Wagh S.M. a Maharaj S.D., *Naked singularity of the Vaidya-de Sitter spacetime and cosmic censorship conjecture*, Gen. Relat. and Gravitation **31** (1999), 975-982

[27] Penrose R., *General Relativity. An Einstein Centenary Survey*, ed. Hawking S. W. a Isreal W., Cambridge University Press, Cambridge (1979)

[28] Misner C.W., Thorne K. a Wheeler J.A., *Gravitation*, Freeman, San Francisco (1973)

[29] Podolský J., *On exact radiative space-times with cosmological constant*, kandidátská disertační práce (1993), KTF, MFF UK, Praha

[30] Hawking S.W. a Ellis G.F.R., *The large scale structure of space-time*, Cambridge (1973)

[31] Defrise L., *Groupes d'isotropie et groupes de stabilité conforme dans les escapes lorentziens*, Thése Université Libre de Bruxelles (1969)

[32] Podolský J., *Exact non-singular waves in the anti–de Sitter universe*, Gen. Relat. and Gravitation **33** (2001), v tisku