

## Speciální teorie relativity a prostoročas (1. část)

*Elemír Scholtz, důchodce, Martin Scholtz, MFF UK Praha*

**Abstract.** The theory of relativity represents one of the pillars of modern theoretical physics. As the theory of relativity deals with the properties of space and time, it represents the framework for any other theory, especially the quantum mechanics. In the series of articles, we explain the role of the theory of relativity in theoretical physics. The postulates of classical physics are mentioned for didactical purposes, and Einstein's postulates of the special theory of relativity are introduced. Then, we examine the consequences of the postulates and we translate them into the geometrical language of Minkowski spacetime. It is demonstrated how geometry can help us to understand the relativistic effects (time dilatation) and causal relations between events. Finally, we present the geometrical explanation of the twin paradox. In the following parts of the series, we focus on the general theory of relativity and the relationship between special relativity and quantum mechanics.

### Úvod

Moderní fyzika přinesla celou řadu významných změn v našem chápání světa. Revoluci ve fyzice otevřelo formulování speciální a obecné teorie relativity a kvantové mechaniky v prvních desetiletích dvacátého století a tyto teorie dnes tvoří, jak se oprávněně říká, pilíře současné vědy. Od té doby vývoj fyziky pokročil v mnoha směrech. Obecná relativita položila základy kosmologie, umožnila fyzikům klást si otázky o struktuře, vývoji a vzniku vesmíru a dnes dokonce nachází uplatnění i v navigačních zařízeních GPS. Kvantová mechanika nalezla aplikace ve fyzice tuhých látek, teorii magnetismu, supravodivosti a supratekutosti, v elektronice, chemii a v mnoha jiných oblastech. Všechny tyto aplikace významně ovlivňují náš každodenní život, ale ukazují též, že teorie relativity a kvantová mechanika vskutku zachycují podstatné rysy přírody.

Vývoj fundamentální teoretické fyziky se ovšem u těchto úspěšných teorií nezastavil. Kvantová mechanika formulovaná Schrödingerem a Heisenbergem je nekompatibilní se speciální teorií relativity, a proto se fyzikové snažili o nalezení relativistické kvantové mechaniky. Ačkoli byla tato snaha doprovázena důležitými objevy, například Diracovy rovnice,

vysvětlení existence spinu či objev antičástic, ukázalo se, že původní kvantovou mechaniku založenou na pojmu vlnové funkce nelze konzistentně zobecnit na relativistickou. Pojem vlnové funkce byl nahrazen pojmem pole a teorie, jež korektně sjednocuje speciální relativitu s kvantovou mechanikou se nazývají kvantové teorie pole. Tyto teorie ukázaly, že vlastnosti elementárních částic jsou úzce spjaty s prostoročasovými symetriemi. Nejúspěšnější kvantovou teorií pole je kvantová elektrodynamika, která do všech podrobností popisuje vlastnosti elektromagnetického záření a jeho interakci s elementárními částicemi, zejména elektrony. Za kvantovou elektrodynamiku byla v roce 1965 udělena Nobelova cena fyzikům R. Feynmanovi, S. Tomonagovi a J. Schwingerovi.

Po formulaci kvantové elektrodynamiky se zájem teoretické fyziky přesunul k dalším fundamentálním interakcím, silné a slabé jaderné síle. Tak jako v 19. století Maxwell našel sjednocený popis elektrických a magnetických sil, v roce 1960 S. Glashow ukázal, že i elektromagnetické a slabé jaderné síly lze popsat v jediném rámci, proto dnes hovoříme o elektroslabé síle. Kvantová teorie pole, která popisuje silné jaderné interakce, se nazývá kvantová chromodynamika. V současnosti jsou sjednoceny i elektroslabé a silné interakce v tom smyslu, že jsou popisovány stejným typem teorie. Jedná se o *kalibrační teorie*. V kalibračních teoriích je každá interakce sprostředkována částicí, *kalibračním bosonem*, pro elektromagnetickou sílu je to foton, pro slabou interakci jsou to  $W^\pm$  a  $Z^0$  bosony. Problémem těchto teorií bylo, že předpovídaly nulovou hmotnost kalibračních bosonů. Tento nedostatek byl odstraněn v roce 1967 S. Weinbergem a A. Salamem, kteří zavedli do teorie elektroslabých interakcí *Higgsovův mechanismus*. Ten vysvětluje, jak elementární částice získávají hmotnost, vyžaduje ovšem existenci nového pole a jemu příslušné částice, Higgsova bosonu.

Všechny tyto teorie tvoří *standardní model* elementárních částic. Tento model je v souladu se všemi dosavadními experimenty a vedl k mnoha potvrzeným předpovědím. Jedinou předpovědí, která dlouhou dobu ověřena nebyla, je existence Higgsova bosonu, avšak nejnovější experimenty prováděné v urychlovači LHC silně naznačují jeho objev.

V šedesátých a sedmdesátých letech se obnovil zájem fyziků o obecnou teorii relativity a kosmologii. Aplikace nových geometrických a topologických metod vedly k hlubšímu pochopení vlastností černých děr, byla nalezena překvapivá souvislost mezi fyzikou černých děr a termodynamikou, byly pochopeny vlastnosti gravitačního záření, byly odvozeny hluboké teoremy o prostoročasových singularitách uvnitř černých děr a na

počátku Velkého třesku. Byl formulován standardní kosmologický model založený na teorii inflace, což je prudké rozpínání vesmíru těsně po jeho vzniku, které vysvětluje, proč je v současnosti vesmír homogenní a izotropní. Samotná teorie Velkého třesku byla potvrzena objevem reliktního záření.

Bylo též zjištěno, že strukturu viditelného vesmíru není možné vysvětlit jen pomocí viditelné hmoty, což vedlo k předpokladu o existenci *temné hmoty*, jež tvoří téměř 85 % hmotnosti vesmíru. Největším překvapením v kosmologii bylo zjištění, že rozpínání vesmíru se zrychluje, ačkoli přitažlivé gravitační síly by měly rozpínání vesmíru zpomalovat. Proto byla postulována existence *tmavé energie*, která toto zrychlování způsobuje. Fyzikální povaha temné energie i temné hmoty zůstává nevysvětlena a představuje velkou výzvu současné kosmologii.

Snaha o sjednocení kvantové mechaniky a speciální relativity vedla jednak k hlubšímu pochopení samotné kvantové teorie, jednak umožnila nalézt sjednocený popis elektro-magnetických, slabých a silných jaderných interakcí. Fyzikové proto doufají, že další sjednocení obecné teorie relativity a kvantové teorie pole by přineslo jednotný pohled na všechny interakce, které v přírodě existují. Tato hypotetická teorie kvantové gravitace je však zatím v nedohlednu, navzdory intenzivnímu úsilí nejlepších teoretických fyziků za posledních třicet let. Jediným skutečným úspěchem snah o sjednocení teorie gravitace a kvantové teorie je *kvantová teorie pole na zakřiveném pozadí*, která popisuje kvantová pole šířící se v klasickém prostoročase popisovaném obecnou teorií relativity. Jak ukázal S. Hawking, tato teorie předpovídá, že černé díry ve skutečnosti ztrácejí energii vyzařováním. Další předpovědi je *Unruhův efekt*, podle kterého pozorovatel pohybující se zrychleně v prázdném prostoru registruje tepelné záření. Obě tyto předpovědi jsou ale současnými technickými zařízeními neověřitelné.

Nejdůležitějšími současnými kandidáty na teorii kvantové gravitace jsou teorie strun a smyčková teorie gravitace. V teorii strun jsou bezrozměrné částice nahrazeny jednorozměrnými objekty – strunami. Jednotlivé elementární částice jsou v této teorii vysvětlovány jako různé vibrační módy strun. Mezi slavné předpovědi teorie strun patří závěr, že prostor má víc dimenzí než tři. Ve smyčkové gravitaci jsou základními objekty spinové sítě. K výkladu některých myšlenek těchto teorií se vrátíme v pozdějších článcích.

Moderní teoretická fyzika je v současnosti nesmírně živé odvětví a stojí před ní několik nevyřešených fundamentálních problémů, které,

budou-li vyřešeny, bezpochyby opět významně změní či doplní náš obraz o vesmíru.

Bohužel na středních školách není prostor ani pro zběžné seznámení se s nejdůležitějšími myšlenkami moderních teorií a středoškolský výklad obvykle končí u základů speciální teorie relativity a některých poznatků atomové fyziky v rámci tzv. staré kvantové teorie. To je na jednu stranu pochopitelné: na střední škole se klade důraz na precizní vysvětlování základních pojmů, procvičuje se důsledné vyjadřování a schopnost používat nabyté znalosti k řešení jednoduchých úloh. Na druhé straně, jsou talentovaní a zvědaví studenti, kteří probírané učivo bez potíží zvládají a zajímají je pokročilejší oblasti fyziky. Protože však odborná literatura jim je nepřístupná, jsou odkázáni pouze na populárně-naučné publikace, ve kterých chybí systematický výklad, který je navíc často v zájmu srozumitelnosti zkreslený až zavádějící. Přitom u těchto studentů je předpoklad, že budou ochotni souběžně s fyzikálními znalostmi rozvíjet i svoje matematické schopnosti.

Je přirozené, že se studenti se svými otázkami obracejí na své učitele fyziky. Očekávají a jsou vděční, dostane-li se jim uspokojivých odpovědí i motivace a usměrnění k dalšímu samostatnému studiu. Ambicí autorů této série článků je poskytnout středoškolským učitelům, a jejich prostřednictvím i nadaným studentům, přiměřený vhled do problematiky a tím přispět k prohloubení jejich fyzikálního vzdělání.

Tento článek je první ze série, kterou bychom se chtěli pokusit do jisté míry překlenout mezeru mezi populární literaturou a literaturou odbornou a zpřístupnit některé důležité myšlenky moderní fyziky i studentům a učitelům na středních školách. Naším cílem není systematický výklad všech zaváděných pojmů, jelikož článek nemůže nahradit systematické studium. Pokusíme se ale krok za krokem čtenáře převést přes výše popsané teorie, které utvářely moderní fyziku.

V tomto prvním článku série se zaměříme na geometrickou interpretaci speciální teorie relativity. Předpokládáme přitom, že čtenář (učitel nebo student) je se základy speciální relativity na středoškolské úrovni obeznámen. Nechceme totiž opakovat výklad, který je dostupný v řadě kvalitních učebnic [1, 2, 10]. V článku například nediskutujeme odvození Lorentzových transformací, jejichž systematický výklad a fyzikální důsledky jsou podrobně probrány na středoškolské úrovni například v publikacích [6, 7, 5]. Pokročilejší geometrické metody speciální a obecné teorie relativity jsou na populární úrovni popsány v [8], matematicky rigorózní pojednání čtenář najde například v [9].

V článku se zaměříme na ty myšlenky teorie relativity, které hrají důležitou roli v kvantové mechanice a v obecné teorii relativity, jakož i v teoriích na ně navazujících.

### Postuláty klasické fyziky

Pod *vztažnou soustavou* rozumíme vztažné těleso spolu se souřadnicovým systémem cejchovaným ve zvolených délkových jednotkách (v soustavě jednotek SI je jednotkou délky metr) a nekonečným počtem synchronizovaných hodin umístěných v každém bodě prostoru. Vztažné soustavy, v nichž platí Newtonovy zákony (viz sekce 3), se nazývají *inerciální*. Všechny vztažné soustavy, které se vůči určité inerciální soustavě pohybují rovnoměrně přímočaře nebo setrvávají v klidu, jsou rovněž inerciální.

V klasické fyzice kromě Newtonových pohybových zákonů postulujeme určité vlastnosti prostoru a času v souladu s každodenní zkušeností. Tyto postuláty jsou často přijímány mlčky, ale protože v rámci speciální a obecné teorie relativity musejí být některé z nich opuštěny, uvedeme je nyní explicitně.

Prostor je *třírozměrný*, což znamená, že polohu libovolného bodu prostoru lze udat pomocí tří souřadnic. Ve speciální relativitě se většinou (ale ne nutně) omezujeme na používání *kartézské* souřadnicové soustavy, která je tvořena třemi navzájem kolmými přímkami zvanými *souřadnicové osy*. Tyto osy se protínají v jednom bodě – počátku souřadnicové soustavy. V takto definovaném souřadnicovém systému lze obvyklým způsobem každému bodu jednoznačně přiřadit trojici souřadnic  $(x, y, z)$ .

V klasické fyzice dále předpokládáme, že prostor je *plochý*. Pojem plochého prostoru lze definovat mnoha ekvivalentními způsoby a k přesnější formulaci pojmů plochý či zakřivený prostor se vrátíme v dalších pokračováních tohoto článku. Prozatím si vystačíme s tvrzením, že prostor, v němž lze zkonstruovat kartézský souřadnicový systém, je plochý. Například povrch koule plochý není, protože na něm nelze sestrojít dvě kolmé přímky, které by představovaly osy  $x$  a  $y$ .

Nejen v klasické mechanice, ale i v teorii relativity předpokládáme, že prostor je *spojitý*. Říkáme, že body prostoru tvoří kontinuum, podobně jako čísla na reálné ose. V teorii množin se dokazuje, že i mohutnost třírozměrného (nebo  $n$ -rozměrného) spojitého prostoru je stejná jako mohutnost reálné osy. Pro fyziku je důležité, že v nekvantových teoriích body prostoru netvoří diskrétní množinu, ale kontinuum. Přitom všechny

body prostoru jsou rovnocenné, a proto lze počátek vztažné soustavy posunout do kteréhokoli z nich. Říkáme, že prostor je *homogenní*, má ve všech bodech tytéž vlastnosti.

Podobně jsou v prostoru ekvivalentní nejen všechny body, ale v každém bodě i všechny *směry*. Vztažnou soustavu s libovolným počátkem lze pootočit o libovolný úhel vůči libovolné ose bez toho, aby se změnil matematický tvar fyzikálních zákonů. Hovoříme, že prostor je *izotropní*, má ve všech směrech tytéž vlastnosti.

Analogické předpoklady činíme i o čase. Předpokládáme, že je spojitý a homogenní (všechny časové okamžiky jsou ekvivalentní a tvar fyzikálních zákonů se s časem nemění). Čas je na rozdíl od prostoru *jednorozměrný*. K měření času používáme *hodiny*, jejichž funkce je založena na výběru vhodného periodického děje. Periodu tohoto děje pak nazveme časovou jednotkou. Princip měření času spočívá v porovnávání trvání sledovaného děje se zvolenou časovou jednotkou. Čas, ve kterém došlo k nějaké události, vždy určujeme vzhledem k hodinám nacházejícím se v místě události. Aby mělo smysl porovnávat údaje na různých hodinách nacházejících se v různých bodech prostoru, musejí být tyto hodiny *synchronizovány* – v každém okamžiku musí ukazovat tentýž čas.

Vlastnosti prostoru a času postulované v klasické mechanice platí nezávisle na tělesech (polích), která se v prostoru nacházejí (šíří). Důležitým důsledkem těchto postulátů je i klasické pravidlo pro skládání rychlostí, které je v souladu s každodenní zkušeností. Uvažujme dvě soustavy,  $S$  a  $S'$ , přičemž soustava  $S'$  se vůči soustavě  $S$  pohybuje rychlostí  $\mathbf{v}$ . Uvažujme dále libovolné těleso, kterého rychlost v soustavě  $S'$  je  $\mathbf{v}_{S'}$ . *Klasické pravidlo skládání rychlostí* pak říká, že rychlost téhož tělesa vůči soustavě  $S$  je dána vztahem

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_{S'} + \mathbf{v}.$$

V této části jsme připomněli základní východiska klasické fyziky. Předpokládáme, že jejich důsledky spolu s Newtonovými klasickými zákony pohybu jsou čtenáři známé. V následující sekci se seznámíme se dvěma novými principy, které se posléze staly jádrem speciální teorie relativity; jsou to Einsteinovy postuláty.

## Einsteinovy postuláty

Speciální teorie relativity (dále jen speciální relativita nebo STR) je základním kamenem moderní teoretické fyziky. Bývá považována za

první velkou revoluci ve fyzice, protože odhalila meze platnosti klasické Newtonovy mechaniky a podrobila důkladné analýze tak základní pojmy, jako jsou prostor a čas. Předpovídá řadu efektů, které jsou v rozporu s naší každodenní zkušeností, zejména dilataci času a kontrakci délky. Všechny tyto jevy však byly experimentálně velmi přesně přímo i nepřímo potvrzeny a dnes není známý jediný experimentální fakt, který by teorii relativity protirečil. Naopak, teorie relativity nám pomohla hlouběji pochopit i řadu jevů, které s ní bezprostředně nesouvisejí, například elektromagnetismus a kvantovou mechaniku.

Důvod, proč má teorie relativity tak dalekosáhlé důsledky ve všech oblastech fyziky, spočívá v tom, že tato teorie popisuje vlastnosti prostoru a času, tedy vlastnosti „jeviště“, na němž se všechny fyzikální procesy odehrávají. Cílem této série článků je, mimo jiné, dát tomuto tvrzení konkrétní obsah. Zavedeme Einsteinovy postuláty stojící v základech STR a objasníme jejich fyzikální podstatu. V dalších sekcích ukážeme, že Einsteinovy postuláty lze interpretovat zavedením pojmu *prostorčas* a že jejich obsah se promítá do určitých tvrzení týkajících se *geometrie* *prostor času*.

Einsteinovy postuláty jsou dva: princip relativity a postulát o existenci invariantní rychlosti. Nejprve uvedeme obsah těchto postulátů a vysvětlíme, že v rámci klasické mechaniky jsou navzájem neslučitelné.

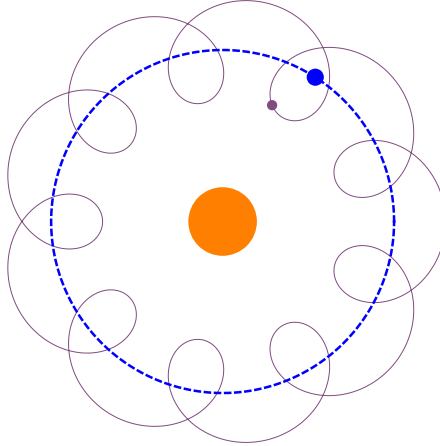
Z klasické mechaniky je známo, že všechny fyzikální děje popisujeme vzhledem ke zvolené vztažné soustavě a různým pozorovatelům odpovídají různé vztažné soustavy. Proto se popis určitého jevu může v různých soustavách lišit. Například skutečnost, že Měsíc obíhá kolem Země, lze formulovat tak, že Měsíc se ve vztažné soustavě spojené se Zemí pohybuje po kružnici\*). Podobně se Země pohybuje po kružnici ve vztažné soustavě spojené se Sluncem. Je však zřejmé, že ve vztažné soustavě spojené se Sluncem se Měsíc nepohybuje po kružnici, ale vykonává poměrně komplikovaný pohyb znázorněný na obr. 1. Vidíme tedy, že popis téhož jevu – pohyb Měsíce – se může v různých vztažných soustavách lišit.

Je třeba zdůraznit, že všechny vztažné soustavy jsou z kinematického hlediska rovnocenné. To znamená, že neexistuje žádná „správná“ soustava, ve které bychom daný jev měli pozorovat, ačkoli v některých soustavách může být tento popis jednodušší. Například pohyb Měsíce je jednodušší v soustavě spojené se Zemí, kde je trajektorií Měsíce kruž-

---

\*) Ve skutečnosti se o přesnou kružnici nejedná a Měsíc se od Země dokonce postupně vzdaluje.

nice, zatímco v soustavě spojené se Sluncem je trajektorií epicykloida znázorněná na obr. 1. Podstatné však je, že pohyb Měsíce lze popisovat *jak* v soustavě spojené se Zemí, *tak* v soustavě spojené se Sluncem a a priori není žádný důvod, proč preferovat jednu z nich.



Obr. 1

Je proto přirozené požadovat, aby i všechny fyzikální zákony měly ve všech vztažných soustavách tentýž tvar. Ukazuje se ale, že pro Newtonovy pohybové zákony to neplatí. Zákon setrvačnosti říká, že těleso, na které nepůsobí žádné síly, setrvává v klidu nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře. Vztažné soustavy, ve kterých zákon setrvačnosti platí, se nazývají *inerciální*. Snadno nahlédneme, že ne všechny soustavy inerciální jsou. Představme si například disk otáčející se konstantní úhlovou rychlostí, k němuž je připevněna koule. Protože je připevněná, koule se otáčí spolu s diskem, a je tak v soustavě spojené s diskem v klidu. Přerušíme-li nyní spojení mezi koulí a diskem, koule se začne pohybovat k okraji disku, ačkoliv na ni nepůsobí žádné síly. Z hlediska soustavy spojené se zemí, vůči níž se disk otáčí, si koule po přerušení spojení v souladu se zákonem setrvačnosti uchová svoji obvodovou rychlost, ale pohybuje se rovnoměrně přímočaře a nesleduje již kruhovou trajektorii, a proto postupně povrch disku opustí. Ovšem z hlediska soustavy spojené s diskem se koule na začátku nachází ve stavu klidu a bez působení sil se začne pohybovat směrem k okraji. V této soustavě tedy zákon setrvačnosti neplatí a soustava spojená s diskem není inerciální.



Tato úvaha ukazuje, že z hlediska formulace fyzikálních zákonů všechny soustavy ekvivalentní nejsou. Newtonovy pohybové zákony platí pouze v soustavách inerciálních, čili v soustavách, které se pohybují rovnoměrně přímočaře nebo se nacházejí v klidu. Ale ve všech inerciálních soustavách již mají Newtonovy zákony tentýž tvar.

Otázka je, zda to platí pro všechny fyzikální zákony. Mohly by se například zákony elektřiny a magnetismu v různých inerciálních soustavách lišit? Mohly by být rovnice elektromagnetického pole různé v různých inerciálních soustavách?

**Princip relativity.** *Všechny inerciální vztažné soustavy jsou rovnocenné a fyzikální zákony musejí mít ve všech inerciálních soustavách tentýž tvar.*

Druhý Einsteinův postulát souvisí s invariancí velikosti rychlosti světla ve vakuu. Ze zkušenosti víme, že rychlost je obecně veličina relativní. Tak jako poloha, tak i rychlost objektu má smysl, pouze když specifikujeme vztažnou soustavu, ve které je tato rychlost měřena. Představme si člověka kráčejícího rychlostí 5 km/h ve vlaku pohybujícím se rychlostí 120 km/h (předpokládáme, že se oba pohybují tímtež směrem). V soustavě spojené s vlakem je rychlost člověka 5 km/h, kdežto v soustavě spojené se Zemí je jeho rychlost 125 km/h. Rychlost pohybujícího se objektu tedy závisí na vztažné soustavě. Opakované, velmi přesné experimenty ukázaly, že pro světlo tato jednoduchá úvaha, a tedy ani jednoduché pravidlo pro skládání rychlostí neplatí a rychlost světla je pro pozorovatele ve všech vztažných soustavách tatáž. V soustavě jednotek SI má rychlost světla ve vakuu hodnotu  $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Veličiny, které mají ve všech vztažných soustavách tutéž hodnotu, se nazývají *invarianty*. Einsteinův druhý postulát tudíž říká, že rychlost světla je invariant a nezávisí od vztažné soustavy, od rychlosti pozorovatele ani zdroje. Někdy se hovoří o principu *konstantnosti* rychlosti světla, to však nevystihuje podstatu druhého postulátu. Slovem *konstantní* označujeme veličiny, které se v čase nemění. Rychlost světla je sice ve vakuu konstantní, protože se s časem nemění, ale smysl druhého postulátu spočívá v tom, že rychlost světla nezávisí na volbě vztažné soustavy, je *invariantní*.

**Existence invariantní rychlosti.** *Existuje invariantní rychlost, která má ve všech vztažných soustavách hodnotu  $c$ .*

Tyto postuláty a jejich důsledky byly mnohokrát ověřeny experimentálně. Teorii relativity tudíž nelze zpochybnit, pokud nějaký experiment neukáže, že některý z postulátů neplatí, nebo pokud se neukáže, že

k těmto postulátům je třeba přidat další princip. V nedávné minulosti byly učiněny různé návrhy na modifikaci postulátů STR, ale žádné z nich zatím nenašly experimentální podporu nebo byly přímo vyvráceny.

Je zajímavé, že sám Einstein tyto postuláty formuloval bez odkazu na experimentální údaje. Ačkoli si zřejmě byl vědom výsledků slavného Michelsonova–Morleyova experimentu (důkaz druhého postulátu), ve svých pracích se odvolával pouze na filozofické principy a vlastní fyzikální intuici. Po formulaci STR se zabýval úvahami o platnosti prvního postulátu, protože nevěřil, že by příroda spomezi všech možných vztažných soustav privilegovala pouze ty inerciální. Formuloval proto silnější princip relativity, ve kterém postuloval rovnoprávnost *všech* vztažných soustav. Tyto hluboké úvahy ho posléze dovedly k formulaci obecné teorie relativity, která ještě dramatičtěji změnila naše představy o prostoru a čase. Obecná teorie relativity bude náplní dalších článků z této série.

Z Einsteinových postulátů plynou všechny důsledky speciální relativity. V roce 1908 však polský matematik Hermann Minkowski ukázal, že tyto postuláty lze přeložit do geometrického jazyka a interpretovat je v pojmech prostoročasu.

## Literatura

- [1] Bartuška, K.: *Kapitoly ze speciální teorie relativity*. SPN, Praha, 1991.
- [2] Hawking, S. W., Ellis, G. F. R.: *The large scale structure of spacetime*. Cambridge University Press, Cambridge, 1975.
- [3] Horský, J.: *Úvod do teorie relativity*. SNTL, Praha, 1975.
- [4] Penrose, R.: *Techniques of differential topology in relativity*. Society for industrial and applied mathematics, 1987.
- [5] Scholtz, E.: Časopriestorové intervaly v špeciálnej teórii relativity. *Matematika a fyzika ve škole* **5**, č. 20, (1990).
- [6] Scholtz, E.: *Fyzikálne zákony z hľadiska špeciálnej teórie relativity – dynamika*. Metodické centrum, Prešov, 1995.
- [7] Scholtz, E.: *Geometrická interpretácia základov špeciálnej teórie relativity vo vyučovaní fyziky na gymnáziu*. SPN, Bratislava, 1989.
- [8] Scholtz, M.: Periodická řešení Einsteinových rovnic. *Československý časopis pro fyziku* **3** (2002).
- [9] Scholtz, M.: *Helical symmetry, spinors and periodic solutions of Einstein's equations*. Lambert Academic Publishing, 2012.
- [10] Votruba, V.: *Základy speciální teorie relativity*. Academia, Praha, 1977.