Speciální teorie relativity a prostoročas (2. část)

Elemír Scholtz, důchodce, Martin Scholtz, MFF UK Praha

Abstract. The theory of relativity represents one of the pillars of modern theoretical physics. As the theory of relativity deals with the properties of space and time, it represents the framework for any other theory, especially the quantum mechanics. In the series of articles, we explain the role of the theory of relativity in theoretical physics. The postulates of classical physics are mentioned for didactical purposes, and Einstein's postulates of the special theory of relativity are introduced. Then, we examine the consequences of the postulates and we translate them into the geometrical language of Minkowski spacetime. It is demonstrated how geometry can help us to understand the relativistic effects (time dilatation) and causal relations between events. Finally, we present the geometrical explanation of the twin paradox. In the following parts of the series, we focus on the general theory of relativity and the relationship between special relativity and quantum mechanics.

Prostoročasový interval

Nyní ukážeme, jak lze Einsteinovy postuláty přeložit do jazyka geometrie. Klíčovým pojmem v teorii relativity je pojem *událost.* Tento pojem je považován z matematického hlediska za elementární, takže jej nelze definovat pomocí základnějších pojmů. Fyzikálně je však událost „děj“ – „něco“, co se událo v určitém čase na určitém místě. Hovoříme-li v tomto smyslu o události, abstrahujeme od konkrétního děje a určujeme pouze čas a polohu, ve které se událost odehrála.

V klasické fyzice se mlčky předpokládá, že pokud si pozorovatelé v obou soustavách synchronizují své hodiny v určitém čase, budou jejich hodiny synchronizovány i v každém pozdějším čase, takže pro časovou souřadnici libovolné události platí $t' = t$. Tento předpoklad musíme v teorii relativity opustit. V každé vztažné soustavě je bodová událost plně charakterizovaná jednou časovou a třemi prostorovými souřadnicemi (t, x, y, z). Tyto tzv. *rozšířené souřadnice* dané události se v různých soustavách liší.

Uvažujme dvě inerciální vztažné soustavy S a S', které se vůči sobě pohybují konstantní rychlostí $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$[1]. V soustavě S zavedeme

[1] Velikost vektoru $\boldsymbol{v}$ označujeme symbolem $v = |\boldsymbol{v}|$.

kartézskou sořadnicovou soustavu (t, x, y, z) a v S' soustavu (t', x', y', z'). Pod souřadnicemi události U budeme proto rozumět uspořádanou čtveřici souřadnic, přičemž připouštíme, že všechny čtyři souřadnice dané události mohou být v různých soustavách odlišné. Pro určitou bodovou událost U hodnocenou z hlediska dvou vztažných soustav budeme používat zápis

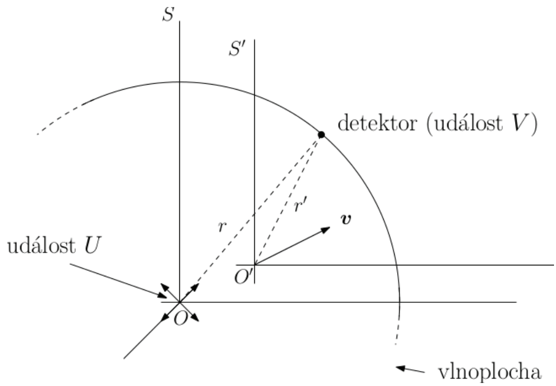
$$S\colon U[t, x, y, z], \qquad S'\colon U[t', x', y', z'].$$

Zkoumejme nyní, jaký je vztah mezi souřadnicemi určité události v různých vztažných soustavách. Pro jednoduchost předpokládejme, že když uvažované soustavy S a S' procházely kolem sebe, uvedly současně svoje vynulované hodiny do chodu, a tedy měly v čase $t = t' = 0$ společný počátek $O = O'$. Nechť v tomto čase došlo v počátku k vyslání světla. Tuto událost označíme symbolem $U_O[0, 0, 0, 0]$. Souřadnice této události jsou v obou soustavách stejné. Světlo se ve vakuu šíří z daného bodu všemi směry invariantní rychlostí c. Body, do nichž světlo v libovolném čase dospěje, tvoří sférickou *vlnoplochu*.

Je-li v určitém bodě prostoru umístěn detektor, jenž se příchodem světla aktivuje, zaregistrují to pozorovatelé v obou soustavách jako událost U. Souřadnice této události v jednotlivých soustavách potom označíme

$$S\colon U[t, x, y, z], \qquad S'\colon U[t', x', y', z'].$$

Situace je znázorněná na obr. 1. Podle principu relativity jsou uvažované vztažné soustavy rovnocenné a pozorovatel v každé z nich může svoji soustavu považovat za nehybnou.



Obr. 1. Světelné vlnoplochy z hlediska dvou inerciálních soustav

Vzhledem k soustavě S má vlnoplocha v čase t poloměr $r = c\,t$ a vzhledem k soustavě S' poloměr $r' = c\,t'$. Napíšeme-li pro obě soustavy rovnici sférické vlnoplochy s příslušným poloměrem a převedeme všechny členy na jednu stranu, dostaneme vztahy

$$c^2\,t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0, \qquad c^2\,t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0. \tag{1}$$

Připustíme-li, že příchod světla do detektoru byl vzhledem k oběma uvažovaným soustavám současný, tj. že $t' = t$, vztahy (1) by pro tentýž signál popisovaly dvě různé vlnoplochy, což není možné. Z obr. 1 je totiž vidět, že počátek O' se v čase t vzhledem k soustavě S posunul o vzdálenost $v\,t$, a dostal se tak blíž k detektoru. Proto poloměr vlnoplochy se středem v počátku O' nemůže mít velikost $c\,t$, ale musí být menší.

Nyní vidíme, že Einsteinovy postuláty jsou s představou klasické fyziky o absolutnosti současnosti neslučitelné. Tento paradox v klasické mechanice neexistuje, neboť rychlost světla není pro všechny pozorovatele tatáž, v soustavě S' je rychlost světla $c' = c - v$. Když ale přijmeme oba Einsteinovy postuláty, musíme připustit i to, že časové souřadnice tytéž události nejsou v obou soustavách shodné a ve vztazích (1) platí $t' \neq t$. Ve speciální teorii relativity je tedy současnost relativní.

Ačkoli se transformují jak prostorové, tak časové souřadnice, v obou soustavách platí vztahy (1). Jinými slovy, když pro kteroukoli soustavu definujeme veličinu

$$s^2 = c^2\,t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \tag{2}$$

kde (t, x, y, z) jsou souřadnice bodové události U – detekce světelného signálu, vidíme, že tato veličina je v každé vztažné soustavě nulová. Veličina s^2 se nazývá *prostoročasový interval* dvou událostí, v našem případě událostí U_O a U.

Vztah (2) je analogický známému vztahu pro vzdálenost dvou bodů v euklidovském prostoru

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{3}$$

Tento výraz je invariantní vůči posunutí i rotaci souřadnicové soustavy, a je tedy nezávislý na volbě souřadnicové soustavy, ačkoli souřadnice bodů na zvoleném systému závisejí. Tato podobnost je klíčem ke geometrické interpretaci Einsteinových postulátů. Viděli jsme, že souřadnice událostí jsou závislé na volbě vztažné soustavy, ale prostoročasový interval definovaný vztahem (2) (jenž formálně připomíná vztah (3)) má pro všechny pozorovatele tutéž hodnotu, je invariantní. Jsou-li tedy dvě události spojené světelným signálem, v uvedeném příkladě jsou to události U_O (vyslání signálu) a U (detekce signálu), prostoročasový interval mezi těmito událostmi je nulový v každé soustavě.

Jednoduchou úvahou se přesvědčíme, že i když dvě události nejsou spojeny se šířením světelného signálu, hodnota prostoročasového intervalu bude invariantní, byť obecně nenulová.

Uvažujme soustavy S_1, S_2 a S_3 a označme symbolem $\boldsymbol{v}_{ij}$ rychlost soustavy S_j vůči soustavě S_i, kde i, j nabývají hodnot $1, 2$ a 3. Předpokládejme, že v čase $t = 0$ měly všechny tři soustavy společný počátek O. Nechť v nějakém pozdějším čase došlo k události U, jejíž souřadnice v soustavě S_i jsou (t_i, x_i, y_i, z_i). V každé vztažné soustavě definujeme prostoročasový interval mezi událostmi U a O vztahem

$$s_i^2 = c^2\, t_i^2 - x_i^2 - y_i^2 - z_i^2,$$

kde dolní index i označuje soustavu. Chceme ukázat, že ve skutečnosti platí $s_1^2 = s_2^2 = s_3^2$. Využijeme přitom to, že podle Einsteinových postulátů je $s_i^2 = 0$, pokud jsou události spojené světelným signálem.

Předpokládejme obecný lineární vztah mezi veličinami s_1^2 a s_2^2,

$$s_2^2 = A\, s_1^2 + B, \tag{4}$$

kde A a B jsou zatím neznámé koeficienty, které mohou obecně záviset na souřadnicích a rychlosti $\boldsymbol{v}_{12}$. Podle předpokladu o homogenitě prostoru jsou všechny jeho body ekvivalentní, takže koeficienty A a B nemohou záviset na souřadnicích, a musí tak záviset pouze na rychlosti $\boldsymbol{v}_{12}$. Podle předpokladu o izotropii prostoru jsou všechny směry v prostoru ekvivalentní, takže koeficienty A a B nesmí záviset ani na směru rychlosti. Zůstává tak pouze závislost na velikosti rychlosti v_{12}.

Hodnoty koeficientů tedy nezávisejí na popisované události (protože nezávisejí na souřadnicích), ale závisejí pouze na velikosti vzájemné rychlosti soustav. Pro šíření světelného signálu platí $s_1^2 = s_2^2 = 0$, takže vztah (4) může být splněn pouze pro $B = 0$. Tytéž úvahy můžeme zopakovat pro všechny dvojice soustav S_1, S_2 a S_3, takže nejobecnější transformace prostoročasového intervalu mezi soustavami S_i a S_j je

$$s_j^2 = A\,(v_{ij})\; s_i^2,$$

kde jsme explicitně zvýraznili, že koeficient A závisí pouze na velikosti vzájemné rychlosti.

Nakonec si uvědomíme, že postupná transformace prostoročasového intervalu ze soustavy S_1 do soustavy S_2 a pak do soustavy S_3 musí vést k témuž výsledku jako přímá transformace z S_1 do S_3. Tento požadavek vede na podmínku

$$A\left(v_{12}\right)\,A\left(v_{23}\right)=A\left(v_{13}\right),$$

kterou lze obecně splnit pouze tak, že položíme A identicky rovno jedné,

$$A(v_{ij})=1.$$

Tím dospíváme k poznatku, že pro libovolné dvě soustavy platí $s_i^2=s_j^2$ a prostoročasový interval mezi libovolnými dvěma událostmi je invariantní.

Minkowského prostoročas

V euklidovském prostoru je vzdálenost zvoleného bodu P od počátku souřadnicové soustavy dána invariantním vztahem (3). Vzdálenost libovolné dvojice bodů v tomto prostoru je dána analogickým vztahem

$$\Delta r^2=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2. \tag{5}$$

Tyto vztahy dávají do souvislosti souřadnice daných bodů, které ovšem žádný invariantní smysl nemají. Umožňují však pomocí souřadnic bodů v euklidovském třírozměrném prostoru vyjádřit jejich vzdálenosti. Proto vztahy (3) a (5) definují *metriku euklidovského prostoru.*

Body euklidovského prostoru popisujeme trojicí souřadnic (x,y,z), ale body prostoru samozřejmě nemůžeme ztotožnit s jejich souřadnicemi. I když daný bod budeme popisovat v jiném souřadnicovém systému, je to stále tentýž bod. Důsledkem je, že vzdálenost dvou bodů je na souřadnicích nezávislý invariant.

V předcházející sekci jsme zavedli pojem událost, která je plně charakterizovaná čtyřmi souřadnicemi $U(t,x,y,z)$ vůči zvolené vztažné soustavě. V jiné vztažné soustavě jsme souřadnice tytéž události označili jako $U(t',x',y',z')$. Vzhledem k ekvivalenci všech inerciálních vztažných soustav můžeme fyzikální jevy popisovat v kterékoli z nich rovnicemi, jež mají shodný matematický tvar. Souřadnice událostí se tudíž chovají stejně jako souřadnice bodů v euklidovském prostoru.

Jediný rozdíl oproti klasické mechanice spočívá v tom, že jsme připustili i transformaci časové souřadnice t. Analogie s geometrií euklidovského prostoru potom logicky vyžaduje existenci invariantní funkce souřadnic, jejíž matematický tvar by se při libovolné změně vztažné soustavy neměnil. Tato funkce by představovala absolutní, na souřadnicích nezávislý vztah mezi událostmi, podobně jako metrika (3) definuje absolutní, na souřadnicích nezávislou vzdálenost mezi body euklidovského prostoru.

Jak jsme již ukázali, taková veličina existuje – je to prostoročasový interval definovaný vztahem (2). Kromě formální podobnosti mezi vztahy (2) a (5) je prostoročasový interval invariantní vůči změně vztažné soustavy, podobně jako je euklidovská vzdálenost r^2 invariantní vůči změně souřadnicového systému. Přitom invarianci prostoročasového intervalu jsme odvodili výhradně z Einsteinových postulátů a z předpokladů o homogenitě a izotropii prostoru. Proto lze Einsteinovy postuláty formulovat jako poznatek, že prostoročasový interval (2) je invariant.

Až dosud jsme pojem události chápali jako uspořádanou čtveřici čísel (t, x, y, z). V teorii relativity se v souvislosti s rozšířenými souřadnicemi událostí nabízí analogie mezi body euklidovského prostoru a událostmi jako body matematického čtyřrozměrného prostoru[2)], který nazýváme *prostoročas*. Bodové události potom chápeme jako body prostoročasu, kterým ve zvolené čtyřrozměrné souřadnicové soustavě přiřadíme uspořádanou čtveřici souřadnic (t, x, y, z). Prostoročas je absolutní v tom smyslu, že jeho prvky jsou události, na nichž se shodnou všichni pozorovatelé. Avšak každému pozorovateli neboli každé vztažné soustavě ve fyzikálním prostoru odpovídá jiná *souřadnicová soustava* v prostoročase. Přitom samotné události jsou absolutní, na souřadnicové soustavě nezávislé. Důsledkem toho je, že prostoročasový interval mezi libovolnou dvojicí událostí je invariant. V tomto smyslu definuje výraz (2) metriku na prostoru událostí.

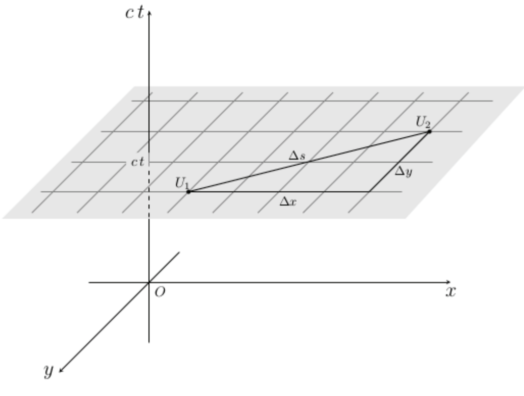
Je vhodné znázorňovat události pomocí tzv. *prostoročasových diagramů*. Pohyb tělesa nebo šíření signálu se v tomto diagramu znázorňuje

---

[2)] Slovo „prostor" tu používame v několika odlišných významech. Ve fyzice pod pojmem prostor rozumíme třírozměrné kontinuum, v němž se nacházejí fyzikální tělesa a pole. V matematice pod prostorem rozumíme abstraktní množinu bodů, mezi nimiž jsou určité vztahy. Jednotlivé matematické prostory se potom liší v tom, jaké dodatečné vztahy mezi těmito body postulujeme. Například vektory tvoří tzv. lineární prostor a dodatečnou strukturou na tomto prostoru je operace sčítání vektorů. Prostor, na kterém je možné zavést souřadnice, se v matematice označuje pojmem *varieta* a dodatečnou strukturou jsou různé souřadnicové systémy a transformace mezi nimi. Prostoročas je tedy čtyřrozměrnou varietou.

úsečkou – množinou bodových událostí. Tyto úsečky nazýváme *světočáry*. Protože na dvojrozměrné ploše papíru nelze znázornit čtyři prostoročasové dimenze, často znázorňujeme události jako body s jednou časovou a dvěma nebo jednou prostorovou souřadnicí. V tomto textu budeme znázorňovat události jako body se souřadnicemi (t, x, y). Rychlost světla má ve standardních jednotkách tak velkou hodnotu, že události spojené světelným signálem (nulovým prostoročasovým intervalem) není možné v souřadnicovém systému (t, x, y) věrně znázornit. Proto místo hodnoty souřadnice t do diagramů zakreslujeme hodnotu $c\,t$. V této konvenci mají časové i prostorové souřadnice jednotku délky. Světočáry znázorňující šíření světla svírají se souřadnicovými osami úhel 45°.

Geometricky lze prostoročasový interval interpretovat jako vzdálenost dvou událostí v prostoročase. Na posloupnosti prostoročasových diagramů vysvětlíme smysl tohoto tvrzení. Zvolme nejprve souřadnicovou soustavu v prostoročase a uvažujme dvě *současné* události U_1 a U_2 zakreslené v diagramu na obr. 2.

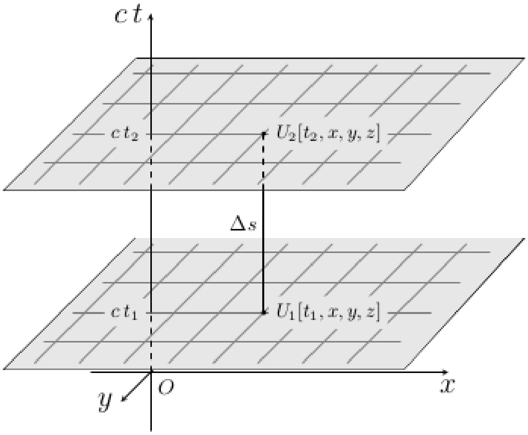


Obr. 2. Prostoročasový interval současných a nesoumístných události U_1 a U_2

Tyto události mají různé prostorové souřadnice, ale protože se odehrály ve stejném čase, leží v jedné rovině prostoročasu, která je kolmá na osu t. Ačkoli v diagramu tuto plochu znázorňujeme jako dvojrozměrnou, ve skutečnosti je třírozměrná a reprezentuje celý fyzikální prostor v daném čase. Hovoříme, že je to *nadplocha* konstantního času nebo též *prostorupodobná nadplocha*.

Prostorová vzdálenost událostí U_1 a U_2 je $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$, zatímco časový interval mezi nimi je $\Delta t = 0$ (současné události). Podle definice prostoročasového intervalu tedy platí $\Delta s^2 = -\Delta r^2$. Vidíme, že pro současné události je velikost prostoročasového intervalu rovna prostorové vzdálenosti událostí a prostoročasový interval je záporný.

Nyní uvažujme události U_1 a U_2, které jsou ve zvolené souřadnicové soustavě nesoučasné a *soumístné*, obr. 3. Dvě nesoučasné události leží ve dvou různých prostorupodobných nadplochách, mezi nimiž je časový interval Δt. Protože jsou soumístné, jejich prostorový interval je $\Delta r = 0$, a jejich prostoročasový interval se tak redukuje na výraz $\Delta s^2 = c^2\,\Delta t^2$. Vidíme, že prostoročasový interval nesoučasných, soumístných událostí je roven časovému intervalu těchto událostí a na rozdíl od současných nesoumístných událostí je v tomto případě kladný.



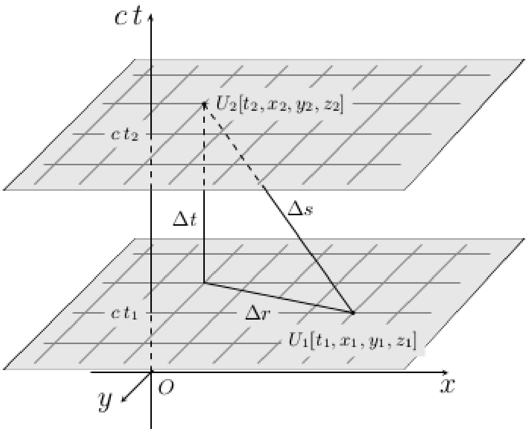
Obr. 3. Prostoročasový interval nesoučasných a soumístných událostí U_1 a U_2

V obecném případě jsou události U_1 a U_2 nesoumístné a nesoučasné. V prostoročase pak leží na různých prostorupodobných nadplochách. Jejich vzdálenost v čase je $\Delta t \neq 0$ a v prostoru $\Delta r \neq 0$, obr. 4. V klasické fyzice neexistuje žádný způsob, jak měřit vzdálenost mezi takovými událostmi. I když v klasické fyzice je někdy užitečné kreslit prostoročasové diagramy (grafikony), nepřináší to žádný hlubší vhled do fyzikální reality projevující se neoddělitelnou souvislostí mezi prostorem a časem. Kdybychom chtěli v klasické fyzice definovat vzdálenost dvou událostí analogicky jako v STR, nejpřirozenější by bylo zobecnit Pythagorovou větu do čtyř dimenzí a interval s událostí vyjádřit vztahem[3)]

$$\Delta s^2 = c^2\,\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2.$$

[3)] Faktor c je nutný z rozměrových důvodů.

Ovšem v klasické fyzice jsou invariantní jak časové, tak i prostorové intervaly a invariance takto definovaného intervalu je jenom triviálním důsledkem postulátů klasické mechaniky.



Obr. 4. Prostoročasový interval nesoučasných a nesoumístných událostí U_1 a U_2

Ukázali jsme, že v STR založené na Einsteinových postulátech prostorové a časové intervaly samy o sobě invariantní nejsou a závisejí na volbě vztažné soustavy. Prostoročasový interval, který je z prostorových a časových intervalů sestaven, invariantní je, a můžeme jej tak považovat za zobecnění pojmu vzdálenosti zavedeného v euklidovském prostoru na pojem vzdálenosti v prostoročase.

Dilatace času

Dilatace času je relativistický jev. Projevuje sa tak, že časový interval $\Delta t' = \Delta t_0$ dvou soumístných událostí U_1, U_2 měřený hodinami H' ve vztažné soustavě $S'[t', x', y', z']$ je kratší než časový interval těchto událostí Δt měřený hodinami H v soustavě $S[t, x, y, z]$, ve které je místo událostí v pohybu. Čas, který uplyne mezi dvěma událostmi je tedy nejkratší v té vztažné soustavě, ve které se odehrály na témže místě. Čas Δt_0 se nazývá vlastní čas.

V soustavě S' má prostoročasový interval dvou soumístných událostí velikost

$$\Delta s^2 = c^2\,(\Delta t_0)^2. \tag{6}$$

Vzhledem k soustavě S se soustava S' za čas Δt přemístí stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$ o vzdálenost $\Delta r = v\,\Delta t$. Prostoročasový interval událostí U_1 a U_2 v soustavě S proto je

$$\Delta s^2 = c^2\,\Delta t^2 - \Delta r^2 = c^2\,\Delta t^2 - v^2\,\Delta t^2. \tag{7}$$

Porovnáním vyjádření (6) a (7) dospíváme ke známému vztahu

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{8}$$

Je-li rychlost $v < c$, jmenovatel zlomku je menší než jedna, a tudíž $\Delta t > \Delta t'$. Dospíváme tak k poznatku, že pozorovatel v klidové soustavě (hodiny H) vidí, že v pohybující se soustavě (hodiny H') plyne čas pomaleji (proto dilatace času).

Literatura

[1] Bartuška, K.: *Kapitoly ze speciální teorie relativity.* SPN, Praha, 1991.

[2] Hawking, S. W., Ellis, G. F. R.: *The large scale structure of spacetime.* Cambridge University Press, Cambridge, 1975.

[3] Horský, J.: *Úvod do teorie relativity.* SNTL, Praha, 1975.

[4] Penrose, R.: *Techniques of differential topology in relativity.* Society for industrial and applied mathematics, 1987.

[5] Scholtz, E.: Časopriestorové intervaly v špeciálnej teórii relativity. *Matematika a fyzika ve škole* **5**, č. 20, (1990).

[6] Scholtz, E.: *Fyzikálne zákony z hľadiska špeciálnej teórie relativity – dynamika.* Metodické centrum, Prešov, 1995.

[7] Scholtz, E.: *Geometrická interpretácia základov špeciálnej teórie relativity vo vyučovaní fyziky na gymnáziu.* SPN, Bratislava, 1989.

[8] Scholtz, M.: Periodická řešení Einsteinových rovnic. *Československý časopis pro fyziku* **3** (2002).

[9] Scholtz, M.: *Helical symmetry, spinors and periodic solutions of Einstein's equations.* Lambert Academic Publishing, 2012.

[10] Votruba, V.: *Základy speciální teorie relativity.* Academia, Praha, 1977.