Je Hospodin hospodárný?

Jiří Langer

1. Tempori parce!

K šetření časem vyzýval už Seneca (*Epistulae Morales XIII*). Ve skutečnosti je to ten vůbec nejstarší zákon na světě, protože jedním z prvních božích počinů bylo stvoření světla (*Gen. 1.3*) a světlu dal Hospodin zmíněný příkaz do vínku. Všiml si toho ovšem až Pierre de Fermat (1601-1665) [1] v r. 1662: *Fermatův princip* říká, že světlo se šíří tak, aby dráhu mezi dvěma danými body prošlo v co nejkratším čase. V moderním matematickém zápise to znamená, že má nabývat minima funkcionál

$$t = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2}\ \frac{\mathrm{d}\lambda}{v}, \tag{1}$$

kde v je rychlost světla v daném prostředí, tedy $v = c/n(x, y, z)$, přičemž $n(x, y, z)$ je index lomu daného prostředí, obecně závisející na poloze, s je oblouk podél světelného paprsku a λ parametrizuje příslušnou křivku.

Fermat ovšem formuloval princip jen slovně a aplikoval jej pouze na odvození zákonu lomu, což nevyžaduje plný formalismus variačního počtu. Rozšířil tak výsledek Herona z Alexandrie (10-70), který objevil platnost tohoto principu v případě odrazu světla. Šířením světla v prostředí s proměnným indexem lomu se zabýval až Johann Bernoulli (1667-1748) v r. 1697 v souvislosti s úlohou o brachistochroně: najít křivku, po která musí klouzat v gravitačním poli hmotný bod, má-li proběhnout dráhu mezi dvěma zadanými body v nejkratším možném čase. Tuto úlohu předložil o rok dříve evropským matematikům s výzvou k jejímu řešení a úlohu více méně současně vyřešilo různými prostředky několik velkých matematiků té doby – Johann Bernoulli sám, jeho bratr Jacob, Leibniz a jeden anonym. Jak však Bernoulli řekl, v nepodepsaném autorovi „poznal lva podle jeho spáru" – Newtona.

Po formální stránce se zapíše úloha o brachistochroně úplně stejně jako Fermatův princip (1) pro paprsek pohybující se jen ve svislé rovině, přičemž jeho rychlost v se určí ze zákona zachování součtu kinetické a potenciální energie, tedy pokud osa y směřuje vzhůru, $v = \sqrt{2g(y_0 - y)/m}$, kde g je gravitační zrychlení a y_0 počáteční výška hmotného bodu (vypuštěného z klidu). Úloha je tedy ekvivalentní úloze pro paprsek v prostředí se speciální závislostí indexu lomu na výšce, čehož Johann Bernoulli využil a řešil úlohu jako limitu paprsku, který se postupně láme ve vrstevnatém prostředí s odpovídající změnou indexu lomu.

Fyzikálně je ovšem mezi oběma úlohami podstatný rozdíl. V případě světla jde o *volný pohyb*, světlo si hledá cestu podél cykloidy, která úlohu řeší, zatímco brachistochrona představuje *vazbu*, působící na hmotný bod dodatečnými silami ve směru normály. Volný pohyb, tedy pohyb pod vlivem pouze gravitační síly, se po brachistochroně neděje.

2. Naturam operari per modos faciliores

Svůj zákon šíření světla pokládal Fermat za speciální důsledek obecného „principu hospodárnosti”. Jak uvádí ve své (latinsky psané) práci [1], ... příroda pracuje těmi snažšími a pohodlnějšími způsoby.

Co ale je ten *modus facile*? V případě světla to znamenalo pracovat s co nejmenším zdržením, ale už jsme uvedli, že pro pohyb hmotných bodů to nefunguje. Hodíme-li kámen s věže a on dopadne kus od její paty, pohybuje se po parabole. Pokud by ale měl dráhu urazit v nejkratším čase, měl by se pohybovat po brachistochroně, kterou je cykloida. Přesto metafyzický princip hospodárnosti či lenosti přírody velmi přitahoval řadu slovutných matematiků-fyziků (tehdy ještě neexistovala Jednota, ale panovala jednota matematiků a fyziků).

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) v článku nazvaném *Zákony pohybu a klidu odvozené z metafyzického principu* [2], kromě „důkazu existence Boha odvozeného z divů přírody”, slovně naznačil princip, jenž měl být základním principem pohybu těles. Princip nese jeho jméno, ale ne tak docela právem. Jeho použitelnou matematickou formulaci podal totiž až matematik daleko většího formátu, Leonhard Euler.

Leonhard Euler (1707-1783) a Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) především nalezli nutnou podmínku pro minimum funcionálu tvaru

$$\int_{u_1}^{u_2} F(x^1, \ldots, x^n; \mathrm{d}x^1/\mathrm{d}u, \ldots, \mathrm{d}x^n/\mathrm{d}u; u)\, \mathrm{d}u, \tag{2}$$

známé Lagrangeovy-Eulerovy rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial F}{\partial(\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}u)}\right) - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n; \tag{3}$$

význam jednotlivých veličin je zřejmý a předpokládáme, že jednotlivé funkce mají potřebnou diferencovatelnost.

Euler [5] pak formuloval Maupertuisův princip požadavkem, že veličina

$$A = \int_{s_1}^{s_2} v\, \mathrm{d}s \tag{4}$$

nabývá minima. Obsah tohoto principu budeme rozebírat pro jeden hmotný bod nepodrobený vazbám, zobecnění na více bodů podrobeným vazbám je však přímočaré, viz např. [3]. Veličina v značí velikost rychlosti, s je oblouk podél dráhy bodu. Vidíme ovšem, že nikde nevystupuje veličina popisující silové působení. Variační princip je totiž nutno chápat jako princip s vedlejší podmínkou, kterou je zákon zachování energie, funguje tedy jen pro pole popsané potenciálem nezávislým na čase. Pokud dosadíme za v ze vztahu

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x,y,z) = E, \tag{5}$$

kde m je hmotnost, V potenciální energie a ds vyjádříme pomocí parametru λ jako $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\lambda)^2 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}\lambda)^2 + (\mathrm{d}z/\mathrm{d}\lambda)^2}\,\mathrm{d}\lambda$, nabývá (4) tvaru

$$A = m^{-1}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{2m(E - V(x,y,z))((\mathrm{d}x/\mathrm{d}\lambda)^2 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}\lambda)^2 + (\mathrm{d}z/\mathrm{d}\lambda)^2)}\,\mathrm{d}\lambda \tag{6}$$

a to už je funkcionál typu (2). Příslušná Lagrangeova-Eulerova rovnice dává rovnici trajektorie parametrizované λ, časová závislost je pak určena vztahem (5), přepsaným do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{(2/m)(E - V(x,y,z))}{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\lambda)^2 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}\lambda)^2 + (\mathrm{d}z/\mathrm{d}\lambda)^2}}\,. \tag{7}$$

Snadno se ukáže, že výsledné pohybové rovnice jsou za daných předpokladů ekvivalentní Newtonovým, resp. Lagrangeovým rovnicím II. druhu, odvozeným ze známějšího principu Hamitonova, požadujícího, aby extrému nabýval funkcionál

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - V)\,\mathrm{d}t = 0, \tag{8}$$

kde T je kinetická a V potenciální energie (viz Dodatek).

Nás však v tomto článku zajímá především „metafyzický základ" Maupertuisova principu: vyjadřuje opravdu hospodárnost přírodních dějů? Tento „theologický a mystický" pohled na mechaniku ostře kritizoval Ernst Mach (1838-1916) [4], podobně jako o stopadesát let dříve Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). A kritika je oprávněná. Veličina A (resp. mA) v (4) se tendenčně nazvala „účinek" či „akce". Ale je těžké najít nějaký metafyzický či fyzikální důvod, proč právě tato veličina má nabývat extrému. Či jinak. Fyzikální důvod je zde jediný – dává správné pohybové rovnice, to však není zdůvodnění, proč se pohyb řídí právě těmito rovnicemi.

3. ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ

Můžeme samozřejmě pokorně uznat, že názor Přírody na hospodárnost může být jiný než náš. Nad vstupem do Platonovovy Akademie byl údajně vyryt nadpis této kapitolky, volně překládaný jako „Nevstupuj bez znalosti geometrie". Nevěřím, že by mezi čtenáři byl takový hříšník, přece jen však něco z riemannovské geometrie připomenu. „Elementární vzdálenost" je v trojrozměrném riemannovském prostoru určena kvadratickou formou

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ik}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^k, \tag{9}$$

kde i, j nabývá hodnot 1...3 a přes opakované indexy se sčítá. V euklidovském prostoru jsou $g_{ik} = \delta_{ik}$ a v *konformně plochém* prostoru $g_{ik} = f(x_1, x_2, x_3)\delta_{ik}$, kde $f(x_1, x_2, x_3)$ je libovolná funkce souřadnic.

„Přímka", definovaná jako nejkratší spojnice dvou bodů, tedy jako *geodetika*, je pak v konformně plochém prostoru určena podmínkou, že funkcionál

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{f(x_1, x_2, x_3)\left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2\right)}\,\mathrm{d}\lambda \tag{10}$$

nabývá minima. Porovnáme-li s touto podmínkou nyní (1), (4), vidíme, že obě úlohy můžeme chápat geometricky jako hledání geodetiky, ovšem ne v reálném prostoru, nýbrž v jakémsi "prostoru idejí", kde metrika konformně plochého prostoru je určena specifickou úlohou.

Skutečnost, že funkcionály mají rozdílný fyzikální rozměr, nás nemusí trápit, stačí je vynásobit vhodnou konstantou, aby všechny měly rozměr délky. Matematika samozřejmě vždy potěší, když se na první pohled různé úlohy převedou na formálně stejný základ, přináší to i technické výhody, ale metafyzickému argumentu to zas tak moc neposlouží. Boží hospodárnost jsme zachránili na úkor boží spravedlivosti, Hospodin různým dějům neměří stejně, pro každý předepisuje speciální metriku. Možná jim ale měří po zásluze, co víme.

4. Festina lente!

Je tu ale ještě jeden problém. Splnění (3) totiž nezaručuje, že funkcionál (2) nabývá lokálního minima – může to být i maximum nebo sedlový bod. Vraťme se k Fermatovu principu, který jsme popsali Senecovým „Šetři časem". Nejjednodušší aplikací Fermatova principu je odvození zákona odrazu. Jde-li o odraz na rovinném zrcadle, snadná geometrická konstrukce ukáže, že v tomto případě nabývá čas lokálního minima. Představme si ale zrcadlo eliptické; paprsky vyslané z jednoho ohniska libovolným směrem se všechny odrazí do ohniska druhého. Délka dráhy a tím i čas, za který ji světlo urazí, je pro všechny paprsky stejná. Čas tedy nenabývá minima, je jen stacionární. Sofistikovanější volbou odrážející plochy lze dosáhnout i toho, že je maximální. Zde se tedy světlo neřídí morálním maximem „šetři časem", spíše se zde hodí „spěchej pomalu" z nadpisu tohoto odstavce.

Důležitějším příkladem je variační princip, který určuje pohyb relativistické částice v gravitačním poli. Podle obecné relativity se pohybuje po geodetické čáře, která extremalizuje funkcionál představující délku „oblouku", či raději prostoročasového intervalu, měřeného podél dané křivky. Jenže jde o „oblouk" v prostoročase, který má indefinitní metriku. Fyzikální smysl této veličiny je přírůstek vlastního času částice, tedy času měřeného hodinami, které si částice nese sebou. Ten podél „světočáry" částice nabývá maxima, ne minima. Planeta obíhající Slunce se loudá, přírůstek jejího vlastního času je větší, než kdyby se pohybovala po některé z blízkých drah. Takže hospodárnost je v přírodě někdy chápána jako maximální plýtvání.

Pro zákony pohybu však není vůbec důležité, zda extremála minimalizuje či maximalizuje příslušný funkcionál, nebo zda jde jen o „sedlový bod”. Důležité je, že hodnota funkcionálu je na ní stacionární.

5.Fata viam invenient?

„Osud si cestu najde”, říká Jupiter ve Vergiliově Aeneidě, ale jak si ji hledá? Cíl, $\tau\epsilon\lambda o\sigma$, je u Aristotela jednou z legitimních příčin pohybu, to však nevyhovovalo duchu vědy v 17. století. „Teleologická” formulace, kterou dal Fermat svému principu, tedy něco se děje *proto, aby* se dosáhlo určitého cíle, byla vzápětí napadena vůdčím kartesiánem Claudem Clerselierem (1614-1684) : *A (Fermatův) princip nemůže být příčinou, tím bychom totiž přírodě přisuzovali určitou vědomost a zde přírodou rozumíme pouze řád a zákonitost, který působí bez předvídavosti, bez možnosti volby, jen pod vlivem nutné determinovanosti.*

Variační principy jsou skutečně formulovány teleologicky. Nicméně podívejme se na matematickou strukturu problému. Nutnou podmínkou pro extrém funkcionálů, které se ve fyzikálních variačních principech vyskytují, je rovnice či soustava n diferenciálních rovnic druhého řádu, jejichž řešení obecně závisí na $2n$ konstantách. „Deterministický” výběr určitého řešení se uskuteční zadáním počátečních hodnot neznámých funkcí a jejich derivací. „Teleologická” formulace variačních principů předpokládá řešitelnost *okrajové úlohy* pro danou soustavu rovnic – najít řešení, které prochází ve dvou různých časech dvěma různými body.

Tato úloha obecně nemá řešení i pro rovnice, které vyhovují podmínkám existence a jednoznačnosti pro počáteční problém. Jednoduchým příkladem je rovnice pro lineární harmonický oscilátor

$$y'' + y = 0, \tag{11}$$

která má periodické řešení

$$y = A\ \cos(t + \phi) \tag{12}$$

s periodou 2π. Okrajová úloha $y = 1$ pro $t = 0$ a $y = 2$ pro $t = 2\pi$ tedy nemá řešení; liší-li se hodnota nezávislé proměnné o periodu, nabývá y téže hodnoty pro libovolné hodnoty konstant A a ϕ.

Řečeno jazykem pro filosofy, ne každý cíl je dosažitelný. Pokud ale úloha řešení má, pak toto řešení je právě jedno z množiny řešení počáteční úlohy. Tedy: osud vedoucí k *dosažitelnému* cíli je určen teď a tady. Osud hledá cestu pomocí diferenciální rovnice, tedy kauzálně. Teleologie ve variačních problémech je jen zdánlivá.

Jak si osud hledá cestu je instruktivní rozebrat na příkladě řešení problému brachistochrony Johanna Bernoulliho, zmíněném v prvním paragrafu. Bernoulli předpokládal, že se paprsek pohybuje ve zvrstveném prostředí, kde rychlost světla v k-té vrstvě je

$$v_k = \sqrt{2g(y_0 - y_k)}, \tag{13}$$

a na každém rozhraní se v souladu s Fermatovým principem paprsek lomí pod úhlem daným zákonem lomu. Směr paprsku v další vrstvě je tedy postupně určován na každém rozhraní. Nakonec Bernoulli přešel limitním postupem k nekonečnému počtu infinetisimálních vrstev. Při tomto postupu ovšem neumíme předem určit, ve kterém bodě paprsek skončí, máme však zaručeno, že dráha představuje extremálu. Bernoulli zde vlastně řešil úlohu analogií numerického řešení okrajové úlohy *metodou výstřelů* – rovnice se řeší krok po kroku a počáteční náměr se koriguje tak dlouho, až se paprsek strefí do požadovaného bodu.

V souhrnu vidíme, že v deterministickém světě není mezi teleologickou a kauzální formulací zdaleka takový rozdíl, jak se na první pohled zdá.

6. Viribus unitis

Variační principy hrají důležitou roli i v případě, když se na pohyb částic podíváme z hlediska „základnější" teorie. Máme na mysli kvantovou mechaniku.

V kvantové mechanice nemá smysl hovořit o trajektorii částice. Vše, co můžeme říci, je to, s jakou pravděpodobností se částice vyskytne v určitém čase v určitém místě. Tato pravděpodobnost, přesněji její hustota, je určena kvadrátem absolutní hodnoty (komplexní) vlnové funkce, která je řešením (parciální diferenciální) Schrödingerovy rovnice.

Richard Feynman však v r. 1948 předložil jinou formulaci kvantové mechaniky. Podle ní částice nemá trajektorii proto, že z bodu x_0, kde byla v čase t_0, se do bodu x, v němž je v čase t, (pro jednoduchost se omezujeme na jednorozměrný pohyb) přesunula *zároveň* po *všech možných* drahách, nejen těch, které by dovolovala klasická mechanika. (Jednozávitovci jako já mají potíže s vědomým konáním i dvou činností současně. Nadanější jedinci zvládnou i několik činností zároveň. Podle Feynmana však stále děláme najednou nekonečně mnoho věcí.)

Částice tedy vůbec nevyhledává určitou cestu – pustí se po všech současně. Na každé z nich má v každém okamžiku určitou kinetickou energii T a potenciální energii V, proto lze určit celkovou klasickou akci podle této dráhy (8), $S = \int_{t_0}^{t}(T - V)\,\mathrm{d}t$. Každá z cest pak přispěje k výsledné hodnotě vlnové funkce v koncovém bodě (komplexní) hodnotou úměrnou $\exp(iS/\hbar)$, kde $\hbar$ je redukovaná Planckova konstanta.

Symbolicky zapsáno

$$\psi(x,t;x_0,t_0) = N \int \exp(iS/\hbar)\,\mathrm{d}(\textit{všechny cesty}), \tag{14}$$

N je jakýsi normovací faktor. Zápis chápejme skutečně jen jako symbol toho, že se sečtou příspěvky přes všechny dráhy. Aby měla integrace jasný smysl, je třeba definovat integraci a míru na funkcionálním prostoru. V současné době je přesná matematická formulace do značné míry zvládnutá, odkažme však jen na klasickou knížku [7]. Ukazuje se, že takto určená funkce ψ splňuje Schrödingerovu rovnici, takže Feynmanova formulace je ekvivalentní standardnímu přístupu. (Užití Feynmanova dráhového integrálu je ovšem v současné kvantové teorii základní metoda kvantování, a to nejen v kvantové mechanice, nýbrž po příslušných zobecněních především v kvantové teorii pole, takže možná právě tento přístup si zasluhuje označení „standardní".)

Nás bude jen zajímat, jak se pro klasické částice odsud opět vynoří pojem trajektorie a k intuitivnímu argumentu si potřebujeme všimnout jediné věci, totiž jak se chová funkce $\exp(iS/\hbar)$. Její reálná i imaginární část jsou periodické, takže při změně S oscilují mezi kladnými a zápornými hodnotami. Vezměme akci S podle jedné z možných drah. Pokud je její hodnota velká proti $\hbar$, pak bude obecně velká i její změna při přechodu k dráze v blízkém okolí. V důsledku toho se příspěvky od drah v okolí uvažované dráhy vyruší – dochází k *destruktivní* interferenci.

Výjimkou jsou klasické trajektorie, podél kterých je akce S stacionární, tedy se při přechodu k blízké dráze skoro nemění. V tomto případě působí jednotlivé dráhy v malém okolí klasické trajektorie *viribus unitis*, spojenými silami, a interference je *konstruktivní*. (Zdůrazněme, že důležitá je zde stacionárnost, ne minimálnost, akce.)

Podmínkou úplného vyrušení „neklasických" příspěvků je ovšem to, aby akce částice byla veliká ve srovnání s redukovanou Planckovou konstantou $\hbar$. Hodnota této konstanty je natolik malá, že pro makroskopická tělesa je tento požadavek mnohonásobně splněn. V mikrosystémech se ovšem projevují "vlnové" vlastnosti částic. (Situace je skutečně velmi obdobná vztahu mezi vlnovou a geometrickou optikou.)

Vidíme, že mikročástice se zcela zbavily nutnosti hledat další cestu, princip superpozice se už postará. Platí za to maximální nehospodárností svých akcí – musí proběhnout po úplně všech možných drahách, na každém příspěvku záleží. Protože jsou ale lehké a umějí proběhnout všechny cesty zároveň, možná jim to ani moc nevadí.

Cílevědomost těžkých nemotorných makroskopických objektů je jen klam, vznikající spojením sil příspěvků z okolí klasické trajektorie, jež zapříčinila stacionárnost akce. Mohou proto šidit a po oklikách ve skutečnosti nechodit – příspěvky k jejich vlnové funkci od ostatních drah by byly stejně zanedbatelné.

7. Quum enim mundi universi fabrica sit perfectissima ...

Argumentovali jsme, že hledat ve variačních principech nějaké „metafyzické vysvětlení" zákonů pohybu má stěží dobrý smysl. I když ... všimněme si ještě často citovaného výroku Eulerova [5]:

Protože uspořádání celého světa je to nejdokonalejší a protože pochází od nejmoudřejšího stvořitele, nesetkáme se na světě s ničím, z čeho by nevyzařovala nějaká vlastnost, představující maximum nebo minimum. Nemůže být proto sebemenší pochybnost, že všechna působení ve světě mohou být odvozena jak metodou maxim a minim, tak z působení příčin.

Tezi, že náš svět je nejlepší z možných světů hájil G. W. Leibniz v díle *Theodicea* [6]. Leibniz uznává, že na světě jsou věci nedobré, ale bere je jako nutnost, aby vynikly věci dobré. Tvrdí pak, že dobro je v souhrnu optimalizováno.

Úvahy, zda by šlo stvořit svět bez Stalina, bin Ládina či výnosů ministerstva školství, nechme jiným. Z čistě matematického hlediska však musíme uznat, že v řadě aspektů náš svět nejdokonaleším z možných světů je. Vesmír představuje z hlediska velkých struktur prostor s konstantní křivostí, tedy s nejvyšší možnou prostorovou symetrií. Lokálně má nejvyšší možnou symetrii čtyřrozměrný prostoročas, což vede k invarianci přírodních zákonů vzhledem k desetiparametrické Poincarého grupě.

Všimněme si, že Euler v citovaném výroku nespecifikuje nějakou určitou veličinu, která má být optimalizována, nýbrž pouze poukazuje na to, že zákony přírody mohou být formulovány jak „z působení příčin", tak i variačně. A to je netriviální skutečnost. Není totiž pravda, že by každou soustavu diferenciálních rovnic vyhovujících větě o jednoznačnosti šlo chápat jako Lagrange-Eulerovy rovnice pro nějaký variační problém. Protipříkladem jsou v mechanice rovnice popisující pohyb se třením, ty však nepokládáme za fundamentální zákony, v hlubší teorii se tření umí odvodit z rovnic, které z variačního principu plynou.

To, že „fundamentální" zákony lze odvodit z vhodného variačního principu, má spolu se zmíněnými symetriemi světa značnou technickou i heuristickou cenu. Hamiltonův princip (8) lze zobecnit na teorii pole, tedy vývojové rovnice různých polí mohou být formulovány jako (parciální diferenciální) Lagrangeovy-Eulerovy rovnice pro vhodnou Lagrangeovu funkci. Věta Emmy Noetherové (1882-1935) pak říká, že s každou grupou symetrie Lagrangeovy funkce je spojen zákon zachování, tedy první integrál příslušných vývojových rovnic. Nejde o existenční větu, nýbrž o algoritmus, jak tyto zákony zkonstruovat.

Samozřejmě, tyto zákony či první integrály jsou důsledkem příslušných rovnic pole, lze je tedy odvodit bez odkazu na variační princip. Návod Emmy Noetherové je však pohodlnější, můžeme říci, že hospodárnější.

Požadavek na symetrii, kterou má Lagrangeova funkce mít, například že má být invariantní vzhledem k Lorentzově grupě, vede pak k tomu, že volnost ve volbě možných Lagrangeových funkcí je značně omezená. V tom spočívá veliká heuristická cena variačních principů.

Skutečnost, že příroda se řídí variačními principy, tak podporuje lehce metafyzickou víru Alberta Einsteina, že vesmír je pochopitelný, tj. lze jej popsat poměrně jednoduchou matematikou [8].

Shrnuto, na otázku, zda se svět řídí metaprincipem úspornosti, který inspiroval Fermata, Maupertuise a Eulera, lze odpovědět kladně jen za cenu účelového žonglování se slovy. Hospodin tedy možná hospodárný není, určitě si však rád hraje s variačními principy a tím naznačuje matematickým fyzikům úsporné cesty k porozumění světu.

Dodatek – souvislost Maupertuisova a Hamiltonova principu

V případě jediného hmotného bodu bez vazeb, popsaného potenciálem, tedy funkcí, určující složky síly $\vec{F}$ jako $F_i = \partial V/\partial x_i$ je jasná souvislost Hamiltonova principu (8) newtonovskou formulací. Kinetická energie T je

(15) $$T = \frac{m}{2}\sum_i \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

takže dosazením $L = T - V$ do Lagrangeových-Eulerových rovnic (3) dostaneme newtonovské rovnice

(16) $$m\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = F_i.$$

Připomeňme ještě, že pokud funkce L v (3) nezávisí explicite na nezávislé proměnné u, pak veličina

(17) $$\sum_i \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}u}\right)}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}u} - L = konst,$$

jak se snadno dokáže zderivováním a užitím (3). V našem případě, kdy nezávislou proměnnou je čas t a $L = T - V$, kde V na čase explicite nezávisí, to znamená, že platí (5), tedy celková mechanická energie se zachovává.

Maupertiusův princip ve tvaru (4) je formulován s libovolným parametrem jako nezávislou proměnnou. Za parametr můžeme zvolit čas t a pak se $\mathrm{d}s$ v (4) vyjádří jako $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$, takže (4) po vynásobení konstantou m (to samozřejmě řešení neovlivní) získá tvar

(18) $$\bar{A} = \int_{t_1}^{t_2} mv^2\,\mathrm{d}t.$$

K nalezení extrému ovšem nemůžeme dosadit integrand přímo do Lagrangeových-Eulerových rovnic, extrém je třeba hledat při vedlejší podmínce, že celková energie se zachovává. Můžeme dále postupovat metodou Lagrangeových multiplikátorů, tj. podmínku zachování energie ve tvaru

(19) $$T + V - E = 0$$

integrujeme, vynásobíme konstantním multiplikátorem μ a přičteme k (18). S výsledným funkcionálem

(20) $$\tilde{A} = \int_{t_1}^{t_2} mv^2 + \mu(T + V - E)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} mv^2 + \mu(\frac{1}{2}mv^2 + V - E)\,\mathrm{d}t$$

pak už pracujeme jako s funkcionálem bez vazeb a multiplikátor μ nakonec zvolíme tak, aby byla splněna vedlejší podmínka. Integrand v (20) opět na čase explicite nezávisí. Aplikujeme-li tedy (17), zjistíme, že má-li být splněno (19), musí být $\mu = -1$. Protože variace konstanty E vymizí, můžeme ji vypustit a (20) přejde na funkcionál v Hamiltonově principu.

Pro případ soustavy vázaných hmotných bodů je důkaz zcela obdobný.

Reference

[1] *Oeuvres de Fermat, livre I – Maxima et Minima*, Tannery,P. a Henry, C. ed., Gauthier-Villars et fils, Paris, 1866, http://fr.wikisource.org/wiki/

[2] Maupertuis, P. *Les lois de mouvement et du répos déduites d'un principle métaphysique* Mem. Acad. R. Sci. et Belles Lettres, 267, Berlin (1746)

[3] Brdička, M., Hladík, A.: *Teoretická mechanika*, Academia, Praha, 1987

[4] Mach, E.: *Die Mechanik in Ihrer Entwicklung*, Brockhaus, Leipzig, 1883

[5] Euler, L: *Methodus iveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudente*, Lausane, 1741

[6] Leibniz, G. W: *Theodicea*, OYKOMENH, Praha, 2004

[7] Feynman, R. P., and Hibbs, A. R., Quantum Physics and Path Integrals, McGraw-Hill, New York, 1965

[8] Einstein, A.: *Jak vidím svět*, Nakladatelství Lidových novin, Praha, 1993