Speciální teorie relativity a žížalí farma

Mgr. Pavel Krtouš, Ph.D.

Ústav teoretické fyziky MFF UK v Praze

Tato prezentace obsahuje materiál k přednášce, kterou jsem přednesl při několika příležitostech – např. v rámci semináře Filosofické problémy fyziky či cyklu Přednášky z moderní fyziky.

Jedná se o přednášku objasňující na populární úrovni vztah newtonovského a relativistického chápání prostoru a času. Vztah těchto dvou přístupů je vykládán na smyšleném příkladu *žížalího světa* – modelu, který využívá pouze středoškolské znalosti euklidovské geometrie a přitom do velké míry vystihuje myšlenkový skok mezi klasickou a relativistickou fyzikou.

V prezentaci naleznete kopie blán z přednášky včetně několika nových obrázků nahrazující látku vykládanou na tabuli. Blány jsou doprovázeny stručným textem.

Speciální teorie relativity nelze beze zbytku vyložit na pár stránkách a nelze ji pochopit za pár hodin. Od této prezentace tak nelze čekat, že o teorii relativity poskytne úplnou a dostatečnou informaci. Jejím smyslem je umožnit posluchačům vrátit se k přednášce a rozmyslet si vykládaný materiál v klidu a do větší hloubky. Pro čtenáře, který samotnou přednášku neabsolvoval, může být tato prezentace příliš stručná a možná obtížně pochopitelná. V takovém případě mu doporučuji sledovat aktivity ÚTF MFF UK – přednáška o speciální teorii relativity a žížalí farmě se bude jistě čas od času opakovat.

Lokální instalace

Prezentaci si můžete stáhnout a instalovat lokálně. Jediné co je potřeba je stáhnout zip soubor `zizaly.zip` (800kB) a ten rozbalit do k tomu vytvořeného adresáře (mělo by se vytvořit několik souborů a adresář `imgs`). Pak již stačí otevřít soubor `zizaly.html`.

- `http://utf.mff.cuni.cz/popularizace/zizaly/zizaly.zip` na ÚTF MFF UK
- `zizaly.zip` lokálně

Verze pro tisk

Z povahy věci není tato prezentace primárně určená k tisku. Na modernějších prohlížečích by se nicméně při tisku měla automaticky použít verze dokumentu bez tmavého pozadí. Celá prezentace je též k dipozici jako pdf dokument (12MB).

- `http://utf.mff.cuni.cz/popularizace/zizaly/zizaly.pdf` na ÚTF MFF UK

Copyright:

STR a žížalí farma

Obsah

Synchronizace hodin

- Synchronizace hodin modrých pozorovatelů ...
- ... modrá synchronizace pokračuje ...
- ... stále ještě synchronizujeme ...
- ... dosynchronizováno
- Modrá soustava souřadnic
- Zelený systém pozorovatelů
- Synchronizace hodin zelených pozorovatelů ...
- ... synchronizace hodin zelených pozorovatelů
- Zelená soustava souřadnic
- Relativita současnosti
- Ekvivalence prostoročasových diagramů

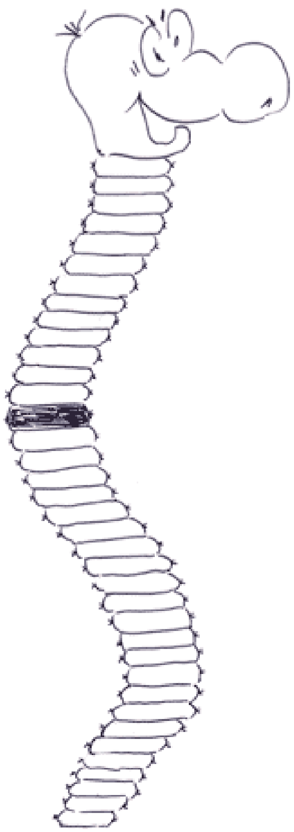
Relativistický popis

- Referenční signál v různých soustavách
- Invariant
- Minkowského geometrie
- Lorentzovy transformace
- Časové intervaly
- Měření délek
- Skládání rychlostí
- Relativistické vzorce

Závěr

- Pár slov ...
- ... závěrem

Seznámení s žížalím světem



Žížalák Albert

Seznamte se s žížalákem Albertem.

Žížalák Albert je význačný představitel vědy žížalího světa. V následujícím si povíme o jeho objevech, které znamenaly skutečnou revoluci v chápání žížalího světa.

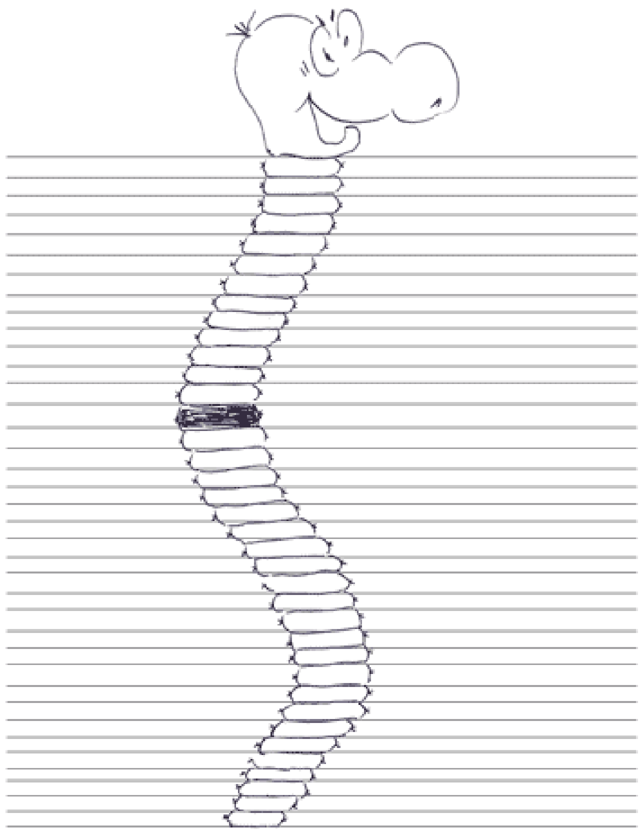
Nejdříve se však musíme s žížalím světem seznámit a to v podobě před objevy žížaláka Alberta.

Žížalí svět si budeme zobrazovat na obrázcích, které nám již sami o sobě budou podbízet jistou dvoudimenzionální intuici. Pro pochopení tradičního vidění žížalího světa je však potřeba tuto intuici rozbít.

Specifickým rysem žížalího světa totiž je jeho neisotropie. Existují dva zásadně odlišné směry: směr *vertikální* a směr *horizontální*. Žížalu s klasickým vzděláním by ani ve snu nenapadlo tyto směry spolu nějak směšovat – jedná se o dvě zcela různé kvality.

Pro pochopení myšlenkové revoluce provedené žížalákem Albertem je potřeba tuto neisotropii klasického žížalího světa akceptovat. Teprve po té s žížalákem Albertem pochopíme, že všechno je ještě trochu jinak.

Seznámení s žížalím světem



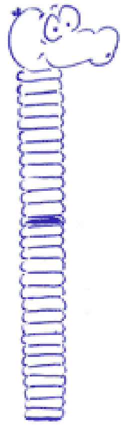
Klasický žížalí svět

Jak bylo řečeno, žížaly žijí ve světě se dvěmi zásadně odlišnými směry – se směrem vertikálním (od ocásku k hlavičce), a směrem horizontálním (napříč žížalou). Celý žížalí svět si můžeme představovat jako sekvenci horizontálních rovin naskládaných nad sebe ve vertikálním směru.

Žížaly se skládají z článků, které jsou na sebe naskládané ve vertikálním směru. Každý článek leží vždy v jedné horizontální rovině.

Žížaly mohou být zvlněné. Zvlnění se však týká pouze relativní horizontální polohy článků – sousední články mohou být vůči sobě horizontálně posunuté. Každý jednotlivý článek zvlněné žížaly však leží i nadále pouze v jedné horizontální rovině.

Seznámení s žížalím světem



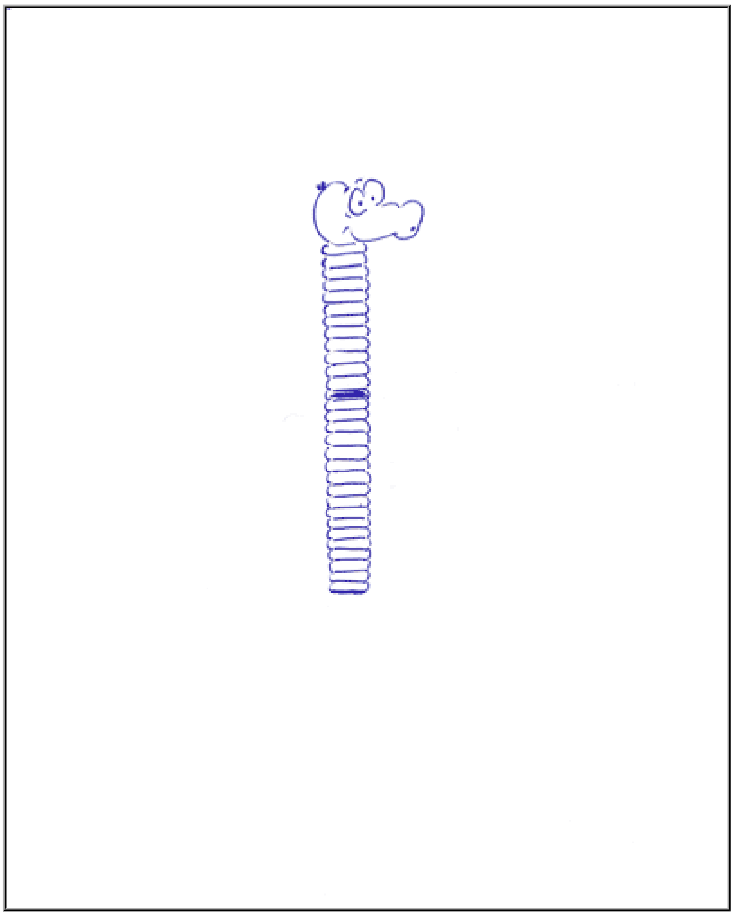
Přímé žížaly

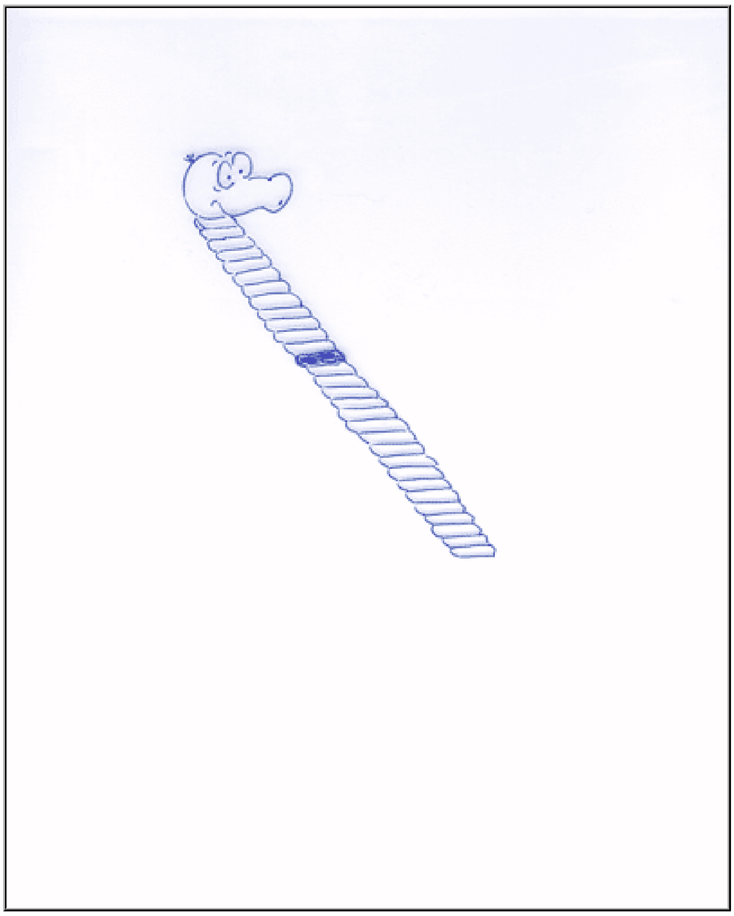
Mezi obecně zavlněnými žížalami hrají výjimečnou roli žížaly přímé. Žížaly totiž přirozeně vycítí, že jsou natažené, že nemají zprohýbanou páteř.

Žížalám s rovnou páteří se nejlépe přemýšlí a tak zejména tyto žížaly dělají v žížalím světě vědu. Proto se dále budeme zabývat pouze žížalami přímými.

Technicky přímost žížaly znamená, že všechny její vertikálně sousední články jsou vůči sobě posunuty vždy o stejný kus.

Seznámení s žížalím světem





Rovnoprávnost přímých žížal

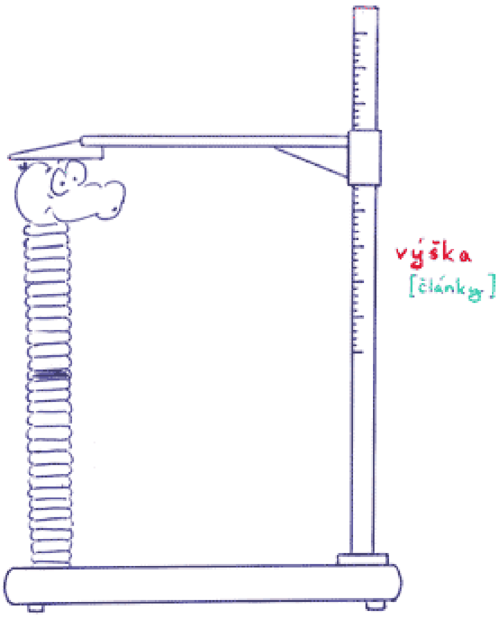
Jak bylo řečeno, žížala přirozeně rozezná, zda je přímá či zvlněná. Sama však nerozezná, zda je celkově v nakloněná či ne. Obě znázorněné žížaly mají zcela stejné pocity a rozdílný náklon by byly schopny rozeznat pouze ve vztahu k nějakému dalšímu objektu.

Můžeme tak zformulovat žížalí princip relativity: *všechny přímé žížaly si jsou ekvivalentní*. Libovolnou situaci popisovanou vzhledem k jedné přímé žížale lze vytvořit i vzhledem k druhé, nakloněné žížale. V obou případech budou mít všechny zúčastněné žížaly stejné pocity.

Jinými slovy, rovnoměrný posun horizontálních rovin nemění nic na vlastnostech žížalího světa.

Oba znázorněné obrázky lze též alternativně chápat jako vyobrazení jedné žížaly ve dvou *ekvivalentních* pohledech.

Seznámení s žížalím světem

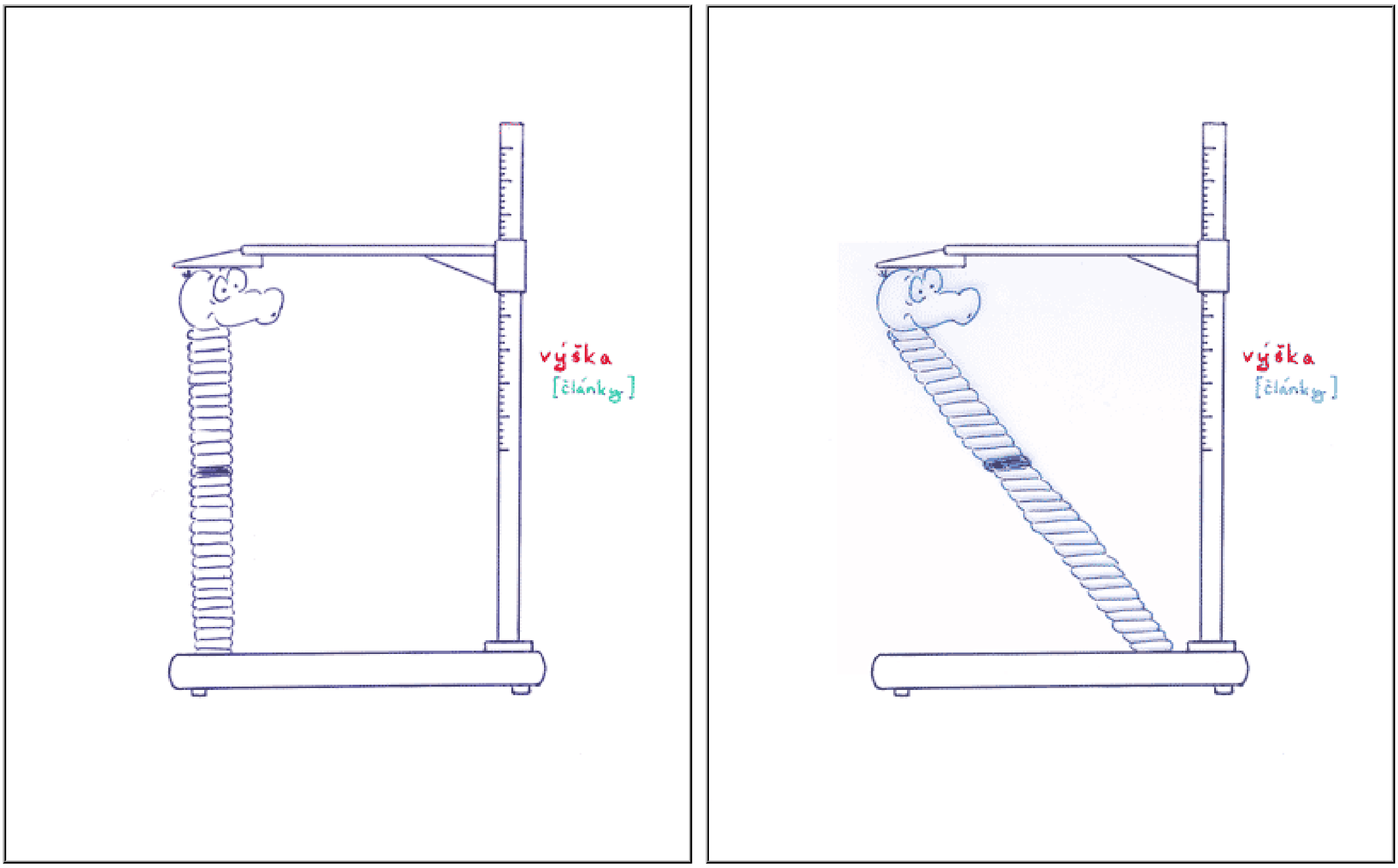


Měření výšky

Výška žížaly (její vertikální rozměr) se vždy měří mezi dvěmi horizontálními rovinami.

Všechny články (dospělé) žížaly jsou stejně vysoké, vertikální směr tak lze přirozeně měřit počtem článků.

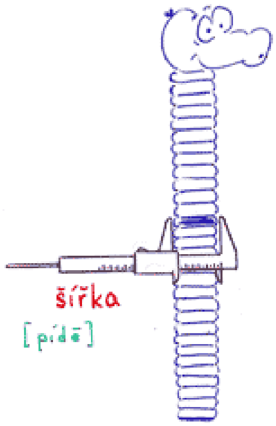
Seznámení s žížalím světem



Výška žížaly

Vzhledem ke způsobu měření, výška žížaly nezávisí na jejím sklonu. To dokumentuje žížalí princip relativity.

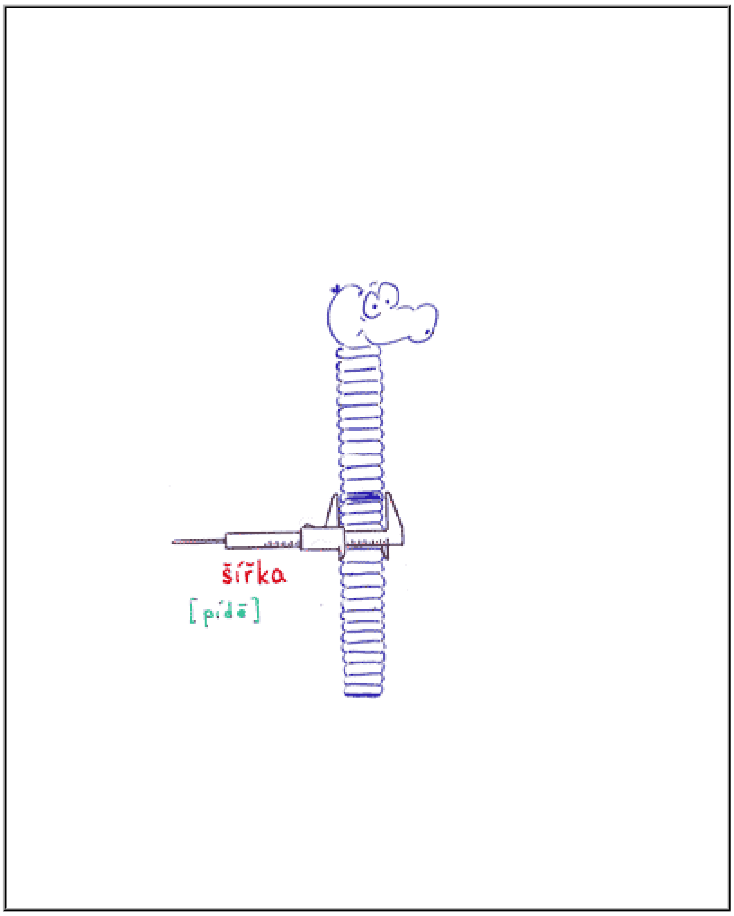
Seznámení s žížalím světem

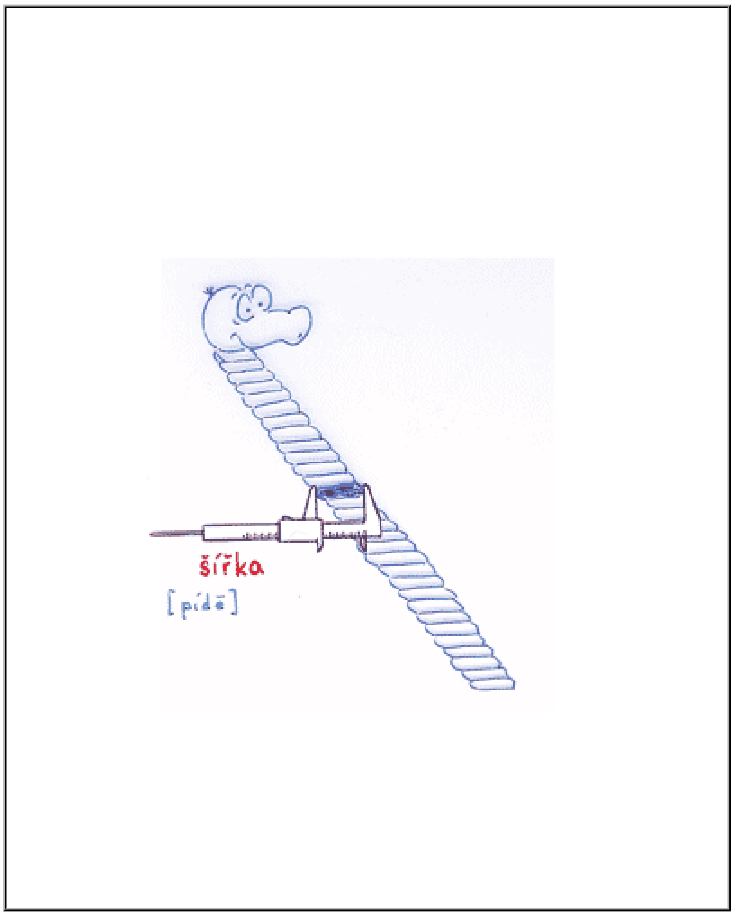


Měření šířky

Šířka žížaly (její horizontální rozměr) se měří vždy v jedné horizontální rovině a udává se v pídích.

Seznámení s žížalím světem

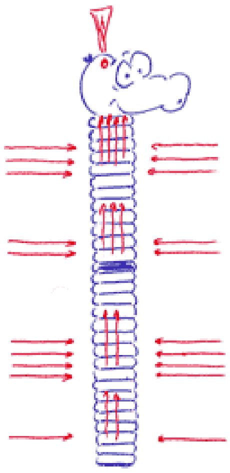




Šířka žížaly

Opět, takto měřená šířka nezávisí na sklonu proměřované žížaly.

Seznámení s žížalím světem

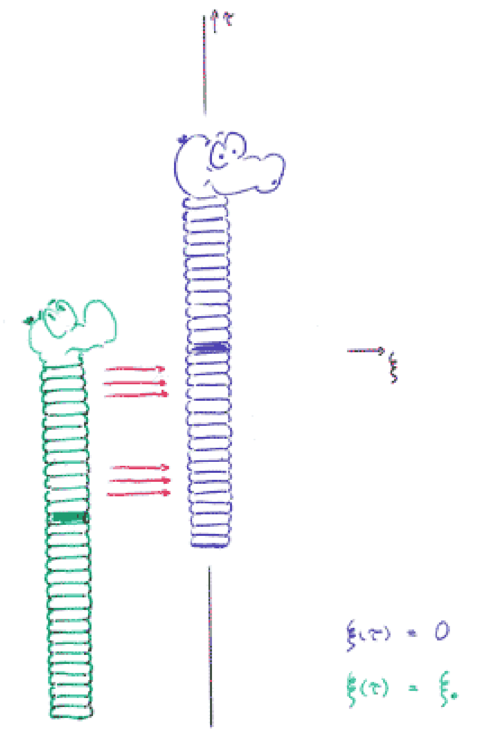


Jak žížala vnímá okolí

Diametrální rozlišnost vertikálního a horizontálního rozměru souvisí i se způsobem vnímání žížal. Žížala registruje své okolí pomocí senzorů umístěných na každém jejím článku. Tyto senzory ji dávají informaci o vzdálenosti objektů v *horizontálním* směru. Údaje z jednotlivých článků pak žížala zpracovává a vytváří si z nich svůj obraz světa.

Je proto přirozené, že pro popis svého okolí používá dvou parametrů – horizontální vzdálenost od svého tělíčka ξ (v pídích), a vertikální polohu τ počítanou v článcích.

Klasický popis žížalího světa



Mezižížalí vztahy - posunutí

Co vlastně může žížala kolem sebe pozorovat? V první řadě jiné žížaly.

V její blízkosti se může např. vyskytovat jiná rovnoběžná přímá žížala.

Technicky popisuje žížala umístění jiné žížaly zadáním horizontální polohy ξ jednotlivých jejích článků číslovaných parametrem τ, tj. zadáním závislosti $\xi(\tau)$. Sama sebe tak žížala popíše rovnicí

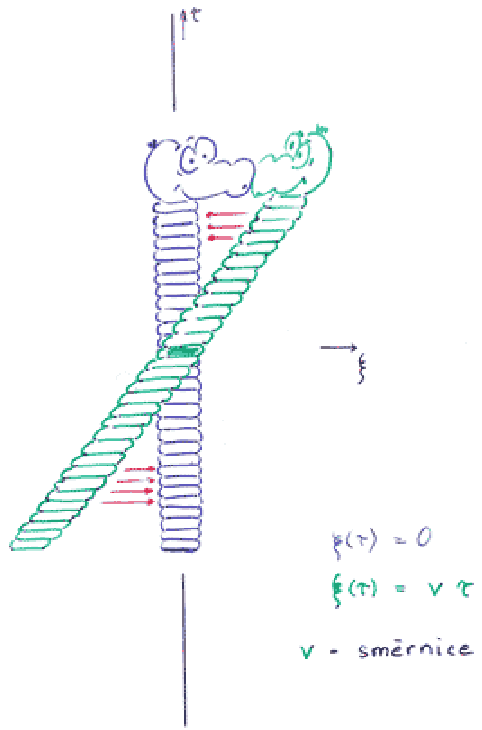
$$\xi(\tau) = 0 \ ,$$

jinou, rovnoběžnou žížalu, popíše rovnicí

$$\xi(\tau) = \xi* \ ,$$

kde $\xi*$ je konstanta.

Klasický popis žížalího světa



Mezižížalí vztahy - sklon

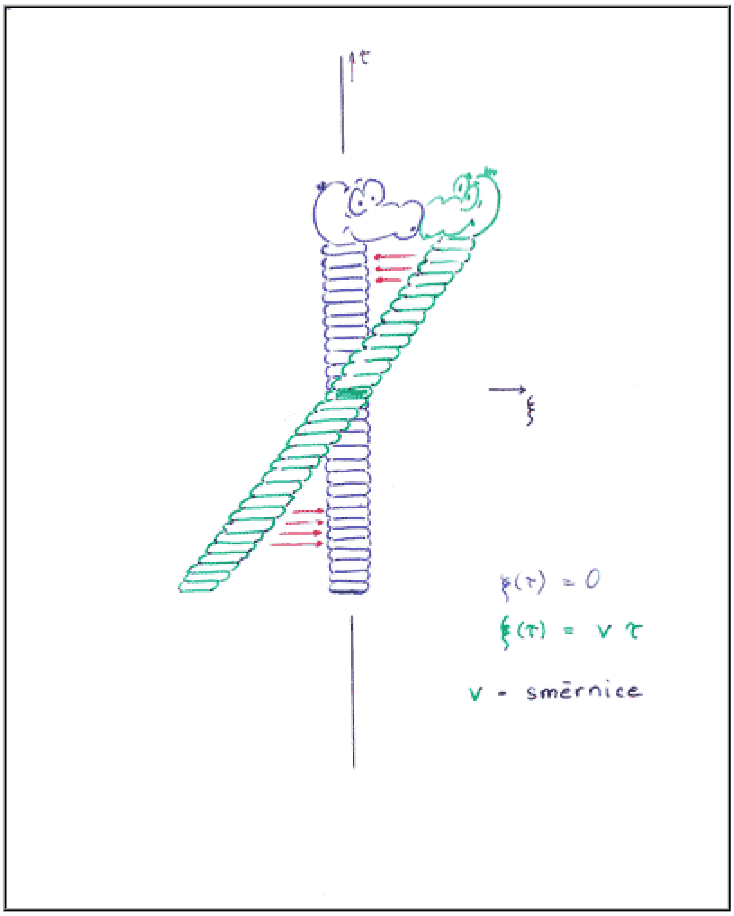
Zajímavější situace nastává, pokud žížala potká žížalu vůči ní skloněnou. Pokud se bude opět jednat o přímou nezavlněnou žížalu, popíše ji rovnicí

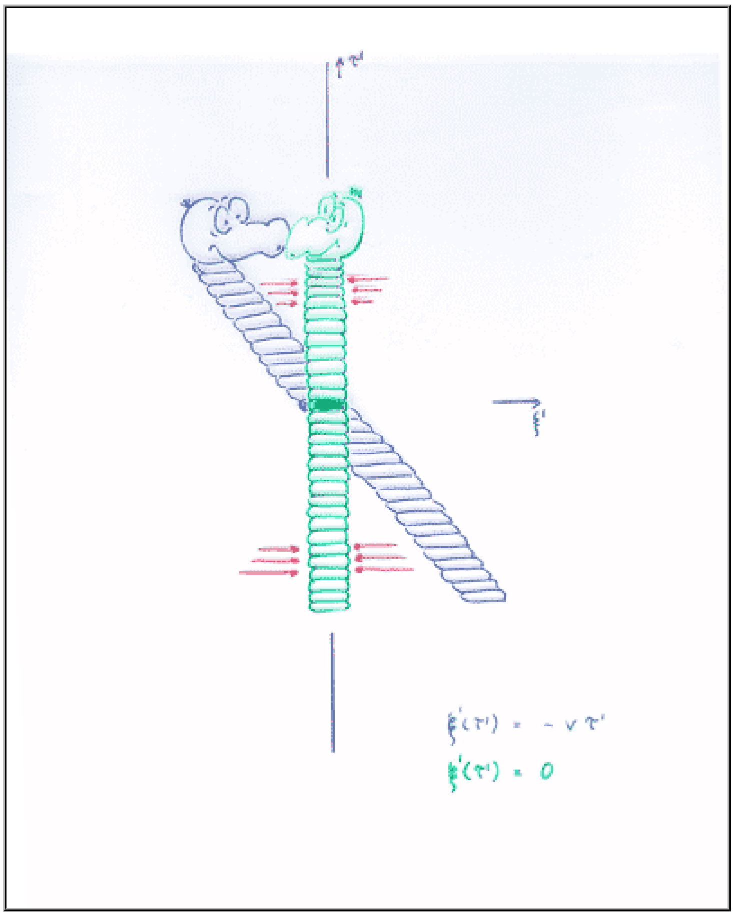
$\xi(\tau) = v\,\tau$.

Konstanta v se nazývá sklonem či směrnicí žížaly.

(Zde jsme předpokládali speciální polohu "středového článku" obou žížal.)

Klasický popis žížalího světa





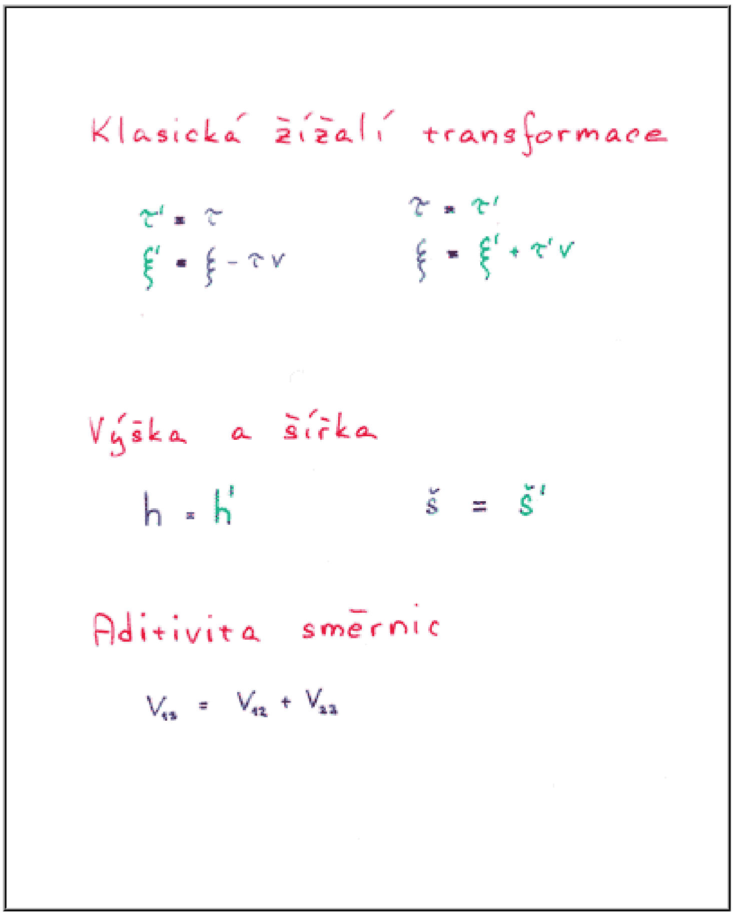
Rovnoprávnost žížal

Zelená žížala bude popisovat své okolí obdobným způsobem jako žížala modrá. Podle žížalího principu relativity jsou popisy obou přímých žížal ekvivalentní.

Lehce nahlédneme, že z pohledu zelené žížaly je modrá žížala popsaná vztahem

$$\xi'(\tau') = -v\,\tau' \ .$$

Klasický popis žížalího světa



Klasické žížalí vzorce

Při vzájemné komunikaci si musí být různě skloněné žížaly schopny překládat své popisy světa. Tj. musí umět převádět parametry ξ' a τ' cizí žížaly na své vlastní parametry ξ a τ. K tomu si žížaly vytvořily tzv. *klasické žížalí vzorce*.

Tyto vzorce říkají, že vertikální souřadnice jsou pro všechny žížaly shodné

$$\tau = \tau' \ ,$$

a že horizontální souřadnici je potřeba přepočítat podle lineárního vztahu závisejícího na sklonu žížal

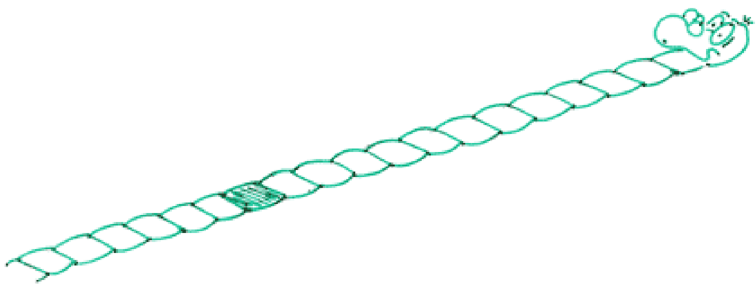
$$\xi' = \xi - v\,\tau \ .$$

Z těchto vzorců též přímočaře vyplývá pravidlo pro skládání směrnic tří vůči sobě skloněných žížal

$$v_{13} = v_{12} + v_{23} \ .$$

Připomeňme ještě, že výška h a šířka $š$ nezávisí na tom, která žížala je měřila.

Ležící žížaly – nová experimentální data

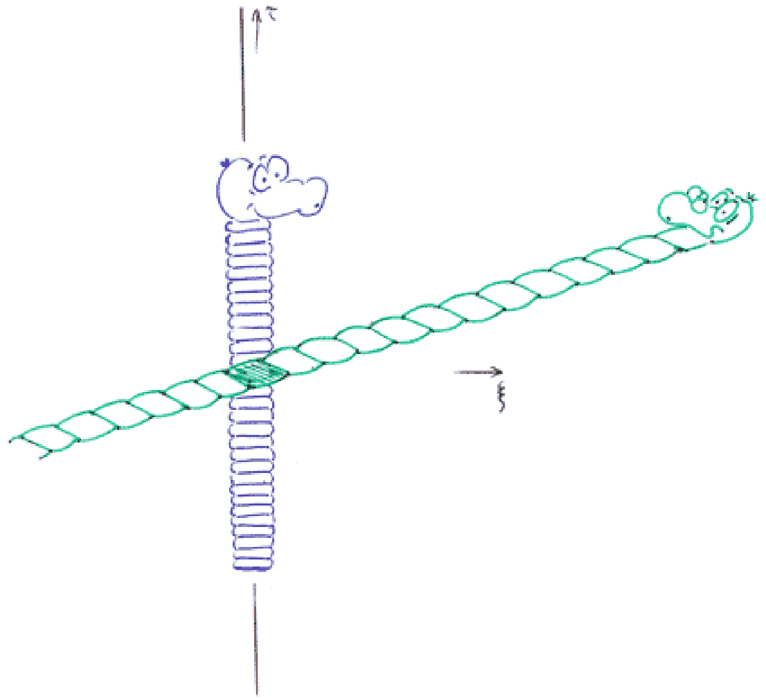


Ležící žížaly

Klasické žížalí vzorce byly velice úspěšné a bezpečně ověřené všemi experimentálními daty. Pouze však do doby než se do blízkosti našich žížal doplazila velice zvláštní žížala.

Podivné již bylo, že nová žížala byla velmi, velmi skloněná. Byla tak skloněná, že se jí začalo říkat *ležící žížala*.

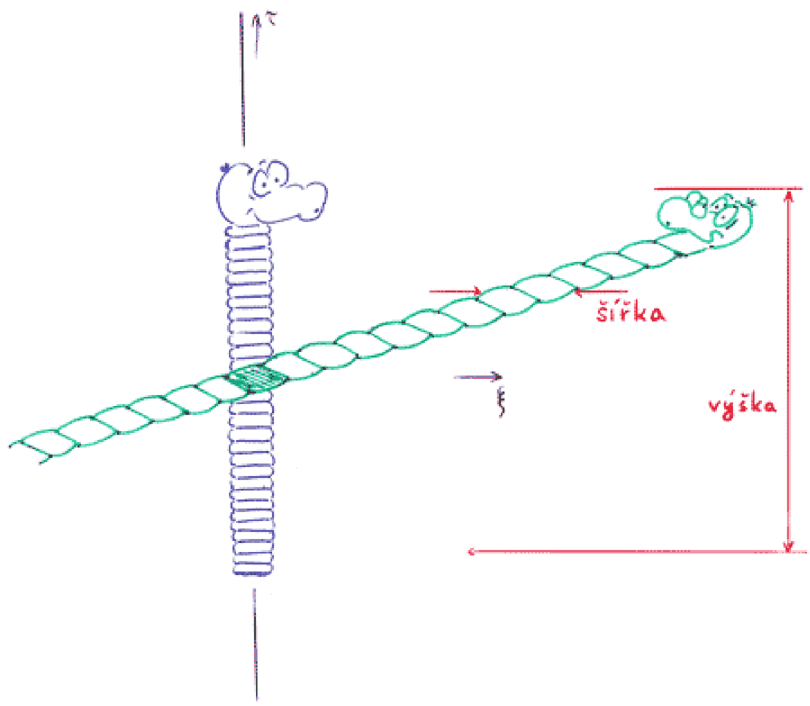
Ležící žížaly – nová experimentální data



Vztah k ležícím žížalám

Běžně skloněné žížaly jí samozřejmě začaly zkoumat. Za prvé zjistily, že vnitřní stavbou se ležící žížala nijak neodlišuje – jedná se o obyčejnou žížalu v neobyčejné poloze. Podle údajů, které ležící žížala poskytla, šlo o žížalu běžné výšky a šířky.

Ležící žížaly – nová experimentální data

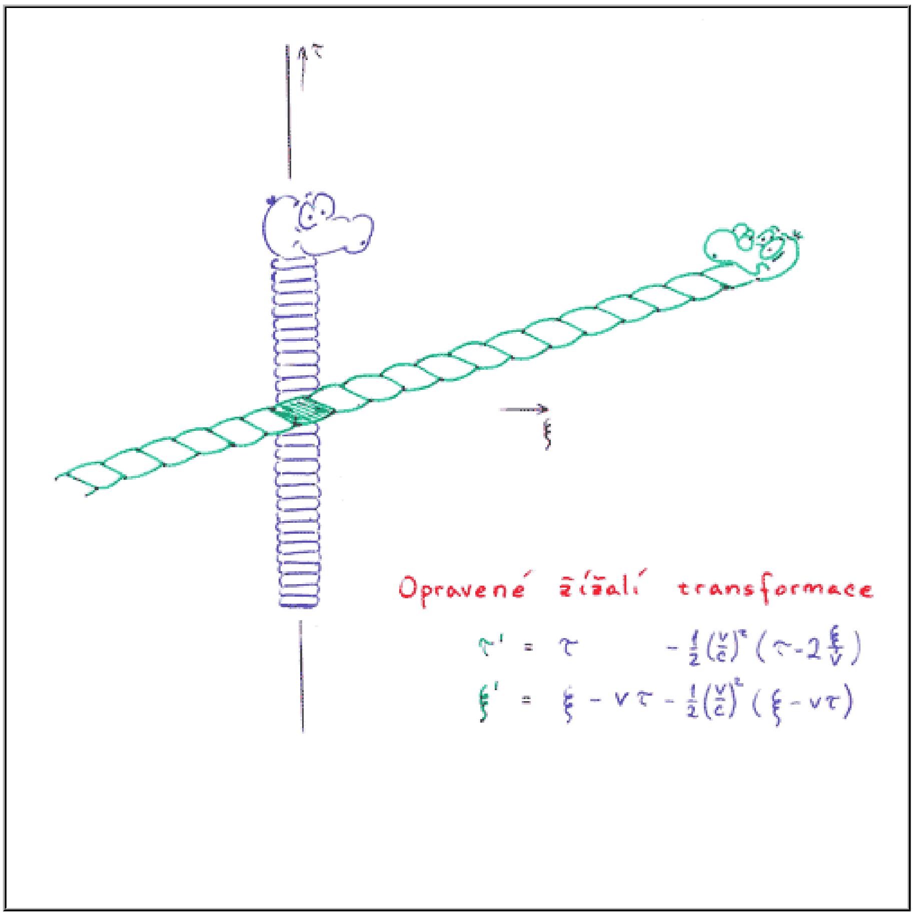


Rozměry ležících žížal

Ukázala se však velice zvláštní skutečnost. Podle měření *neskloněných žížal* měla ležící žížala *menší výšku* a *byla širší* než ona sama udala. Dokonce se ukázalo, že její články neleží v horizontálním směru.

Najednou se žížaly dostaly do situace, kdy se s ležící žížalou nemohly domluvit pomocí klasických žížalích vzorců. Vertikální souřadnice τ' či výška a šířka udávaná ležící žížalou se neshodovaly s vertikální souřadnicí τ, případně výškou a šířkou běžných žížal. A pro horizontální souřadnici ξ' nefungoval lineární přepočet.

Ležící žížaly – nová experimentální data



Přibližné transformační vztahy

Porovnáváním vzájemných měření žížaly zjistily, že transformační vzorce k údajům ležící žížaly potřebují jisté opravy. Opravy se týkaly jak horizontální, tak vertikální souřadnice a již nebyly lineární. Opravené vzorce nebyly zrovna intuitivní, srozumitelné, a navíc se ukazovalo, že stále nejsou zcela přesné.

Nový popis žížalího světa

Invariant

$$d^2 = (c\Delta\tau)^2 + \Delta\xi^2 = (c\Delta\tau')^2 + \Delta\xi'^2$$

Žížalí invariant

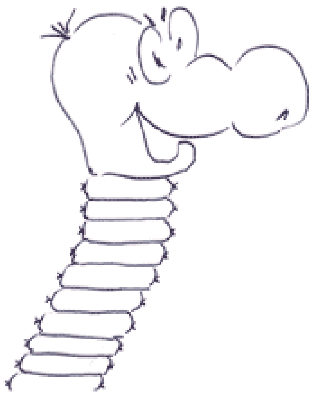
Průlom nastal, když si žížaly všimly, že ač se jejich souřadnice transformují podle podivných (a ne zcela přesných) vzorců, jistá algebraická kombinace souřadnic vychází stejně, nezávisle na tom, která žížala ji spočítala. Této kombinaci se začalo říkat *žížalí invariant*.

Invariant přiřazuje číslo dvěma bodům v žížalím světě, závisí na rozdílu souřadnic těchto bodů a míchá dohromady jak vertikální, tak horizontální souřadnici. Zavádí též novou konstantu *c* udávanou v jednotkách *pídě na článek*, mající velmi vysokou numerickou hodnotu.

Spočítá-li např. ležící žížala invariant přiřazený bodům na svém ocásku a hlavičce, dostane násobek kvadrátu své výšky, $c^2\, h'^{\,2} = (c\ \Delta\tau')^2 + (0)^2$. Stejný údaj spočte i neskloněná žížala ze svých údajů, $c^2\, h'^{\,2} = (c\ \Delta\tau)^2 + (\Delta\xi)^2$. Invariant tak umožňuje neskloněným žížalám dopočítat rozměry ležící žížaly na základě jejich vlastních měření.

Pro mnohé žížaly byla existence a hlavně struktura žížalího invariantu záhadou. Vždyť jak se můžou dohromady míchat údaje týkající se dvou zcela odlišných směrů?

Nový popis žížalího světa



Albert přichází na scénu ...

V této chvíli se do výzkumu ležících žížal zapojuje žížalák Albert.

Dochází k závěru, že existence žížalího invariantu není nahodilá, že za ní existuje hlubší příčina.

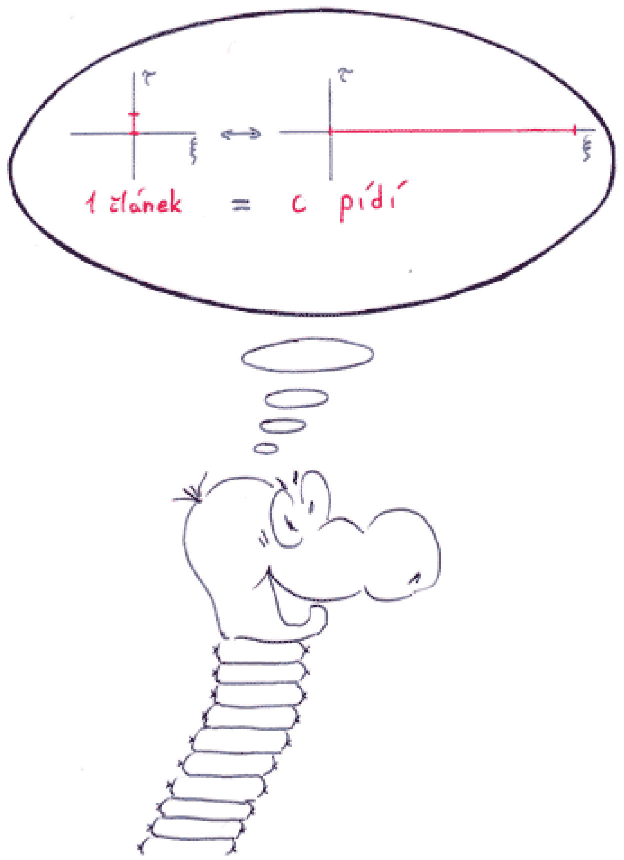
Nový popis žížalího světa

... s převratným nápadem

A na vysvětlení povahy žížalího invariantu vskutku přichází. Nachází ho v pro žížaly velice esoterické nauce – tzv. *dvoudimenzionální euklidovské geometrii*.

Albert si totiž všímá podobnosti žížalího invariantu a vzorečku pro euklidovskou vzdálenost počítanou v kartézských souřadnicích. Jediná odlišnost spočívá v přítomnosti konstanty *c*.

Nový popis žížalího světa



Ekvivalence článků a pídí

Pro tu však Albert nalézá jednoduché vysvětlení. Jedná se o faktor sloužící k přepočtu pídí na články.

Albert tak překonává hluboce zakořeněný názor o fundamentální odlišnosti horizontálního a vertikálního směru. Postuluje, že oba směry jsou vlastně stejné povahy, pouze je žížaly z praktických důvodů měří v odlišných jednotkách.

Nový popis žížalího světa

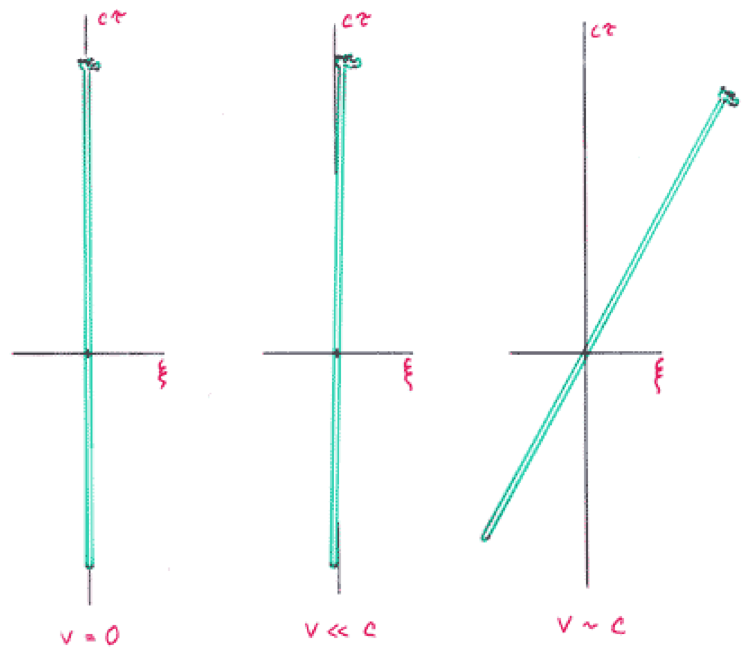
Geometrizace

Zrovnoprávnění horizontálního a vertikálního směru umožnilo další myšlenkový skok: pochopení transformačních vzorců k souřadnicím ležících žížal.

Podle Alberta se žížalí svět řídí euklidovskou geometrií a různě skloněné žížaly jsou ve skutečnosti vůči sobě pootočené. Běžně skloněné žížaly jsou pootočené pouze velmi málo, ležící žížaly jsou otočené znatelně.

Tato geometrická interpretace je v běžných žížalích situacích zkreslená a zakrytá tím, že se jedná o pootočení zanedbatelně malá a že se používá neisotropní způsob měření vzdáleností (vertikální směr měřený v článcích a horizontální v pídích).

Nový popis žížalího světa



Diagramy v pídích

Situace je jasnější, pokud se obrázek žížalího světa vykreslí ve stejných jednotkách v obou směrech. Vyneseme-li vedle horizontální i vertikální souřadnici v pídích (přepočtenou z článků faktorem *c*), budou žížaly velmi vysoké a běžně skloněné žížaly budou vůči sobě pootočené zcela zanedbatelně. To způsobí, že jejich výška (a stejně tak šířka měřená v horizontrálním směru) budou efektivně stejné.

Ležící žížala však bude pootočena o konečný úhel a její natočení se již se projeví i při měření výšky prováděném běžnou žížalou, tj. při měření ležící žížaly ve vertikálním směru ve smyslu běžné žížaly.

Nový popis žížalího světa

Rotační žížalí transformace

$$c\tau' = c\tau \cos\alpha + \xi \sin\alpha$$

$$\xi' = -c\tau \sin\alpha + \xi \cos\alpha$$

směrnice

$$\frac{v}{c} = \operatorname{tg}\alpha \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \sin\alpha = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}$$

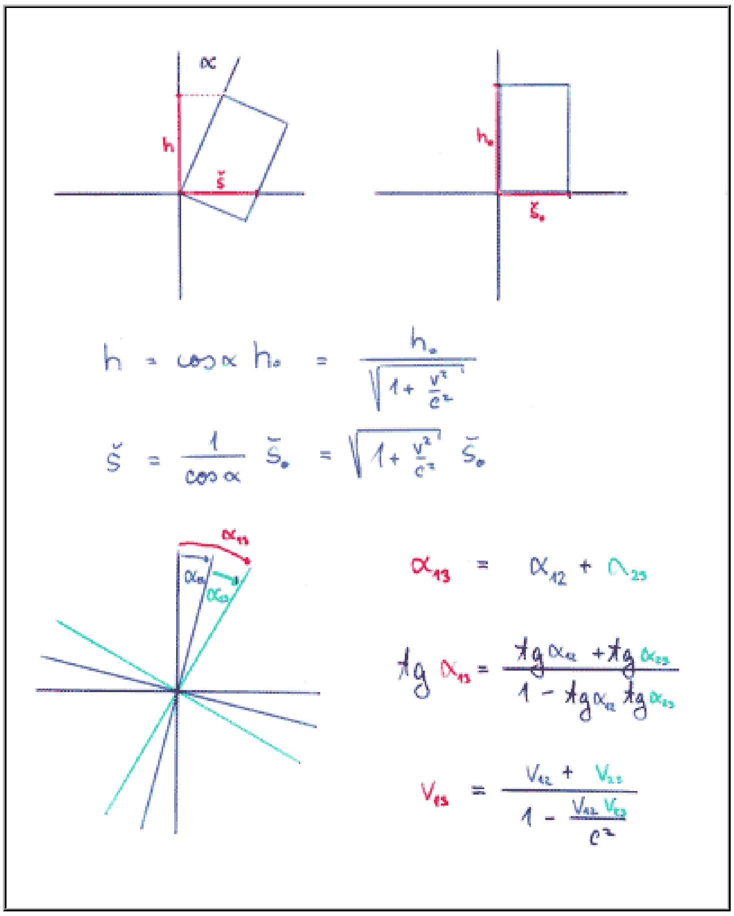
$$\boxed{\tau' = \frac{\tau + \frac{\xi v}{c^2}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \xi' = \frac{\xi - v\tau}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Rotační transformace

Transformační vztahy mezi soustavami různých žížal jsou nyní již nasnadě. Jedná se o rotační transformace v euklidovské rovině.

Typicky se otočení parametrizuje úhlem α. Z historických důvodů je však pro žížaly přirozenější parametrizace pomocí směrnice v. Nahrazením úhlu pomocí směrnice se dostanou tzv. *rotační žížalí transformace*.

Nový popis žížalího světa



Výška, šířka a sklon

Nyní je již i jasné, jak se tranformuje výška a šířka měřená vzhledem k různým žížalám. Je potřeba si pouze uvědomit, jakým způsobem je výška a šířka definována.

Výška žížaly odpovídá rozdílu vertikální souřadnice hlavičky a ocásku. Je jasné, že pro natočenou žížalu tak dostaneme zkrácení takto měřené výšky faktorem cos α.

Obdobně šířka se měří v horizontálním směru a pro natočenou žížalu dojde k jejímu zvětšení.

Konečně, v případě tří vůči sobě natočených žížal se zřejmě skládají úhly, které spolu svírají. Užitím vzorce pro tangent součtu dostaneme vztah pro skládání směrnic.

Nový popis žížalího světa

Rotační žížalí transformace

$$\tau' = \frac{\tau + \frac{\xi v}{c^2}}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\xi' = \frac{\xi - v\tau}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$$

Výška a šířka

$$h = \frac{h_0}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \check{s} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}\ \check{s}_0$$

Skládání směrnic

$$V_{13} = \frac{V_{12} + V_{23}}{1 - \frac{V_{12} V_{23}}{c^2}}$$

Klasická žížalí transformace

$$\tau' = \tau \qquad \tau = \tau'$$

$$\xi' = \xi - \tau v \qquad \xi = \xi' + \tau' v$$

Výška a šířka

$$h = h' \qquad \check{s} = \check{s}'$$

Aditivita směrnic

$$V_{13} = V_{12} + V_{23}$$

Nové žížalí vzorce

Objevení ležících žížal tak vedlo k vytvoření nového popisu žížalího světa. Díky žížaláku Albertovi žížaly nyní již vědí, že nejsou navzájem skloněné, ale pootočené, a že transformační vztahy mezi různými souřadnicemi odpovídají transformaci otočených kartézských souřadnic.

Je jim též jasné, že závislost výšky a šířky na pozorovateli souvisí více s procesem měření než se skutečnou výškou a šířkou žížal. Žížala naměří proměnnou výšku jiné žížaly v závislosti na jejím otočení proto, protože ji měří vždy ve *svém* vertikálním směru. Obdobně se mění i horizontálně měřená šířka. *Skutečnou* výšku a šířku závisející pouze na vzrůstu měřené žížaly zjistíme, pokud ji proměříme v její soustavě, tj. pokud ona proměří sama sebe.

Srovnáním *klasických žížalích transformací* s *rotačními žížalími transformacemi* zjistíme, proč byly klasické transformace tak dlouho úspěšné. Jsou totiž aproximací rotačních transformací v limitě velkého c. Klasický žížalí popis světa se tak ani po Albertových objevech nestává chybným. Může se i nadále používat v situacích, kdy chyby vzniklé zanedbáním členů úměrných c^{-2} jsou zanedbatelné.

Budování prostoročasu

Galileovy transformace

$t' = t \qquad t = t$

$x' = x - vt \qquad x = x' + vt$

Časové intervaly a délka

$T = T' \qquad L = L'$

Aditivita rychlostí

$V_{13} = V_{12} + V_{23}$

Klasická žížalí transformace

$\tau' = \tau \qquad \tau = \tau'$

$\xi' = \xi - \tau v \qquad \xi = \xi' + \tau' v$

Výška a šířka

$h = h' \qquad š = š'$

Aditivita směrnic

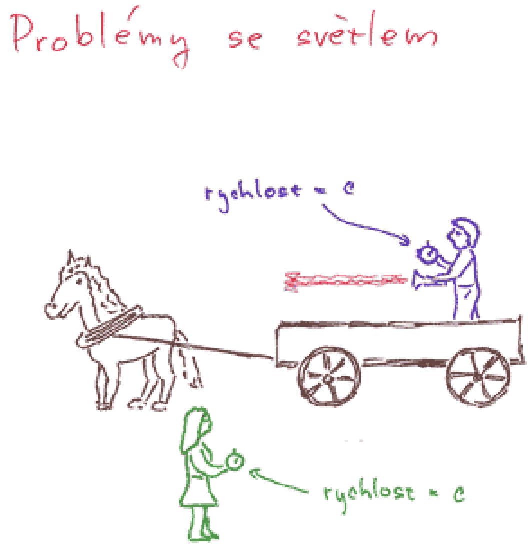
$V_{13} = V_{12} + V_{23}$

Vztahy nerelativistické fyziky

Vědeckou revolucí v žížalím světě jsem se zabývali proto, abychom lépe pochopili podobnou revoluci, která proběhla ve fyzice na začátku dvacátého století. Jedná se o revoluci završenou Albertem Einsteinem zformulováním speciální teorie relativity. Ukážeme si, že vztah relativistické fyziky k nerelativistické je analogický vztahu rotačního a klasického popisu žížalího světa.

Začneme přehledem vzorečků klasické fyziky, které by měly být známe ze střední školy, či které se nám zdají zcela triviální. Jedná se o Galileovy transformace mezi dvěmi inerciálními soustavami, o pravidlo pro sčítání rychlostí, a o triviální konstatování, že čas a délka se měří ve všech inerciálních soustavách stejně.

Porovnáním s klasickými žížalími vzorci zjistíme, že tyto vztahy mají stejný tvar – nerelativistická fyzika v našem podobenství odpovídá klasickému popisu žížalího světa.



Potřeba nové teorie

Na začátku minulého století se však ukázalo, že tyto vzorce nejsou v souladu s některými experimentálními fakty. Asi nejznámější je tzv. Michelsonův experiment, který (velmi zhruba řečeno) ukázal, že světlo se šíří vůči různým inerciálním soustavám stejnou rychlostí, tj. že pro něj neplatí pravidlo pro skládání rychlostí.

Podobné experimenty naznačovaly, že by Galileův princip relativity (ekvivalence inerciálních soustav) měl platit i pro teorii světla: rovnice určující rychlost světla by měly být stejné vůči všem inerciálním soustavám.

Rovnice popisující světlo (Maxwellovy rovnice) se však při přechodu od jedné inerciální soustavy ke druhé pomocí Galileových transformací nezachovávají! Proti sobě tak stály správnost Galileových transformací a platnost Maxwellových rovnic. Vedle pokusů modifikovat teorii světla se fyzici pokusili upravit i Galileovy transformace. Vskutku nalezli transformace, dnes známé jako Lorentzovy, které zachovávají tvar Maxwellových rovnic. Většina fyziků však správnost Galileových transformací vůbec nezpochybňovala a pokud Lorentzovy transformace brali vůbec vážně, tak je považovali za podivný důsledek chování hmoty způsobený pohybem. Výjimkou byl Albert Einstein.

Albert Einstein aplikoval princip ekvivalence inerciálních soustav i na rychlosti šíření světla a odmítl Galielovy transformace. A jak to provedl se nyní budeme snažit pochopit.

Budování prostoročasu

Prostoročas

Teorie relativity je nová teorie prostoru a času. Einsteinova teorie jde tak hluboko do našeho chápání světa, že mění popis i těch nejzákladnější pojmů – prostoru a času.

Svět teorie relativity není vystavěn na separátním porozumění prostoru a času, ale na jejich skloubení do jednoho pojmu – do pojmu *prostoročas*.

Základním elementem prostoročasu je *událost*, zahrnující informaci jak o prostorovém umístění ("kde"), ale i časovém určení ("kdy"). Všechny události pak formují čtyřdimenzionální prostoročas (tři dimenze pro prostor a jedna dimenze pro čas).

Prostoročas si můžeme představit jako časovou sekvenci běžných třídimenzionálních prostorů. Jejich poslepování do jednoho prostoročasu nám ale umožní nalézt hlubší souvislosti mezi jednotlivými událostmi.

Pro pochopení struktury prostoročasu se musíme oprostit od mnoha předsudků, které jsme si vybudovaly na základě své běžné zkušenosti (do které nepatří například měření rychlosti světla, kvůli kterému teorii relativity potřebujeme). Pokusíme se tedy o prostoročase předpokládat co nejméně a postupně si jeho nejzákladnější vlastnosti explicitně zformulujeme.

Budování prostoročasu

Ideální hodiny a pravítka

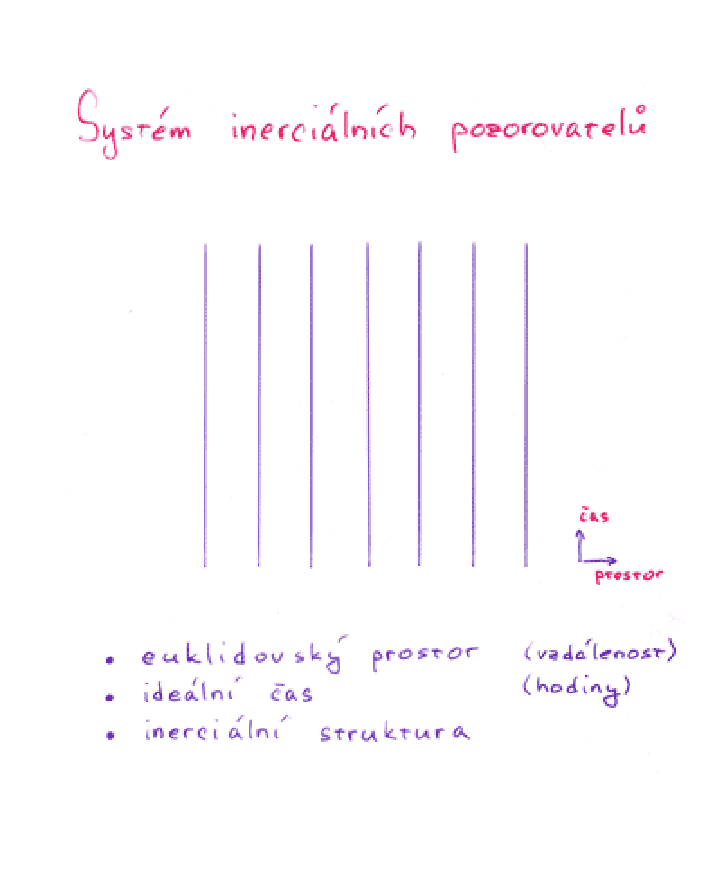
Za prvé budeme předpokládat, že umíme dobře měřit prostorové vzdálenosti a časové úseky. Jinými slovy, že máme k dispozici tzv. *idální pravítka* a *idální hodiny*.

Existence takových pravítek a hodin není samozřejmá. Dokumentujme si to na příkladě ideálních hodin. Za hodiny můžeme považovat libovolný periodický systém: každé ráno vycházející Slunce, mlýnek točící se na potoku, tlučící srdce, závažíčko kývající se na provázku, kmitající krystal v hodinkách či oscilující atom. Netriviálním experimentálním faktem je zjištění, že jednoduché periodické systémy, na které nepůsobí příliš rušivých vlivů, se opakují synchronně, že se navzájem nerozchází. Jinými slovy, měří stejný pojem *pravidelnosti*, tok stejného času.

Samozřejmě, že všechny hodiny neběží zcela synchronně – dříve či později se navzájem rozejdou. Tuto asynchronnost jsme ale vždy schopni odůvodnit nějakým rušivým vlivem (vlnky na potoku, změna tepu při větší námaze, vítr foukající na kyvadlo). Postupné odstiňování těchto rušivých vlivů nás utvrzuje v tom, že zákonitosti popisující jednoduché jevy využívají jednoho a téhož pojmu času. Že ideální kyvadlo kývá pravidelně podle stejného "pravého" času jako kmitá ideální pružinka.

Pod ideálními hodinami pak chápeme přístroj měřící právě tento "pravý" čas, ideální periodický systém, odizolovaný od všech rušivých vlivů. V praxi ideální hodiny samozřejmě aproximujeme dostatečně přesnými reálnými hodinami.

Budování prostoročasu



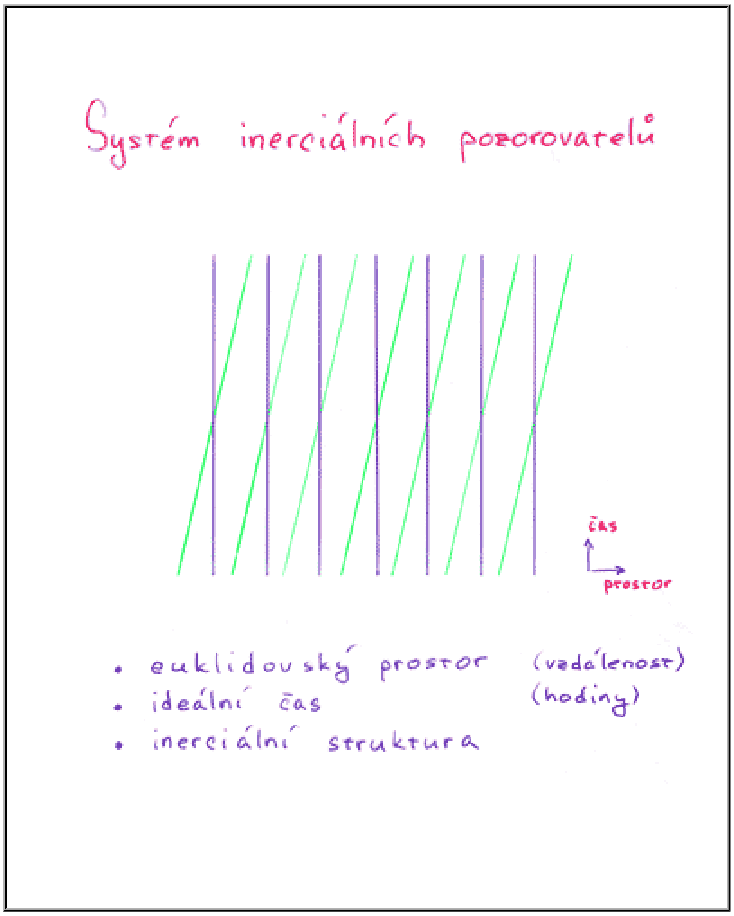
Tuhý systém inerciálních pozorovatelů

Dalším netriviálním experimentálním faktem týkajícím se vlastností prostoročasu je existence *tuhého systému inerciálních pozorovatelů*.

Tuhý systém pozorovatelů je systém pozorovatelů, jejichž vzájemné vzdálenosti se nemění. Pozorovatelé se tak např. mohou držet za ruce (či být spojeni nějakou tuhou konstrukcí) a během časového vývoje na jejich ruce (na onu konstrukci) nepůsobí žádná síla.

Pozorovatelé tvoří *inerciální* systém, pokud se jedná o volné pozorovatele, o pozorovatele, na které nepůsobí vnější síla.

Prostoročas si budeme znázorňovat *prostoročasovými diagramy*, ve kterých vertikálně vynášíme čas a horizontálně prostor. Pozorovatel je v takovém diagramu znázorněn křivkou reprezentující jeho historii (souhrn všech událostí jeho života) nazývanou *světočára pozorovatele*. Tuhý systém inerciálních pozorovatelů pak bude v prostoročasovém diagramu reprezentován navzájem rovnoběžnými přímkami.



Vztah mezi inerciálními pozorovately

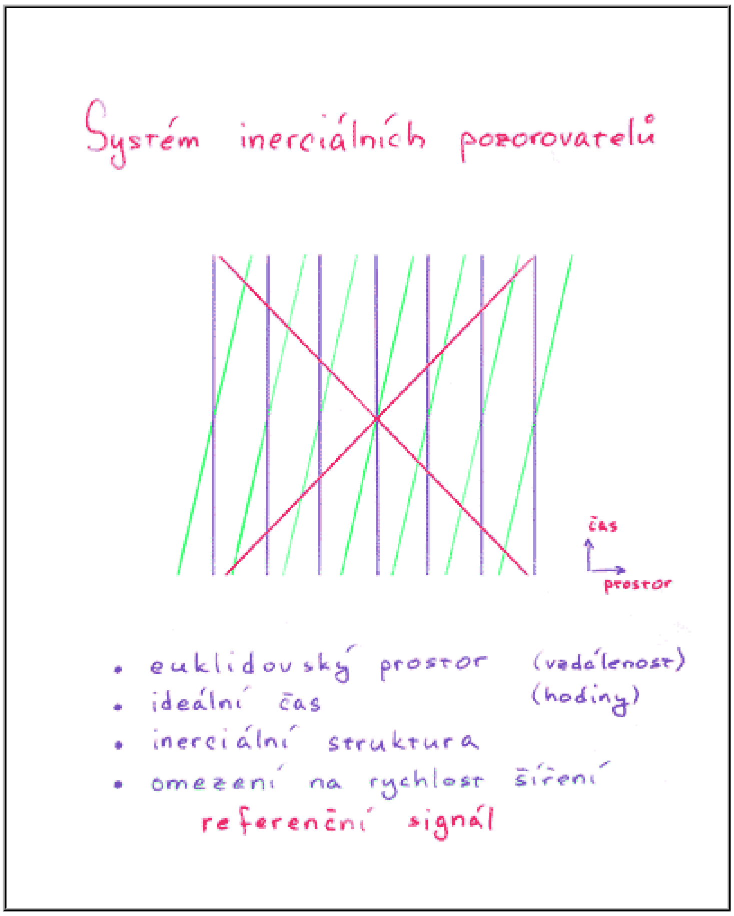
Systémů inerciálních pozorovatelů existuje v prostoročase více. Po zavedení inerciálních souřadnic uvidíme, že tyto systémy se vůči sobě pohybují rovnoměrně přímočaře.

Veškerá naše experimentální zkušenost ukazuje, že platí *princip ekvivalence inerciálních systémů*: všechny inerciální systémy si jsou rovnocené, nelze mezi nimi vybrat nějaký význačný, významnější než všechny ostatní. Každý experiment připravený v jednom inerciálním sytému lze obdobně připravit a provést i v libovolném jiném inerciálním systému.

V prostoročasovém diagramu jsou dva inerciální sytémy reprezentované systémem rovnoběžných přímek. Přímky různých systémů (v našem diagramu modré a zelené) jsou vůči sobě skloněné.

Inerciální systémy pozorovatelů dávají prostoročasu tzv. *inerciální strukturu* – specifickým způsobem provazují různé oblasti prostoročasu. Nahrazují jistým způsobem pojem *absolutního klidu*. V prostoročasu nemá smysl říci, že nějaký pozorovatel je v klidu. Jediné, co můžeme říci, že pozorovatel je v klidu vůči nějakému inerciálnímu systému.

Budování prostoročasu



Referenční signál

Dalším důležitou skutečností stojící v základech teorie relativity je fakt, že existuje maximální rychlost *c*, kterou se mohou šířit fyzikální signály. Tato maximální rychlost je stejná vůči všem inerciálním systémům (princip ekvivalence).

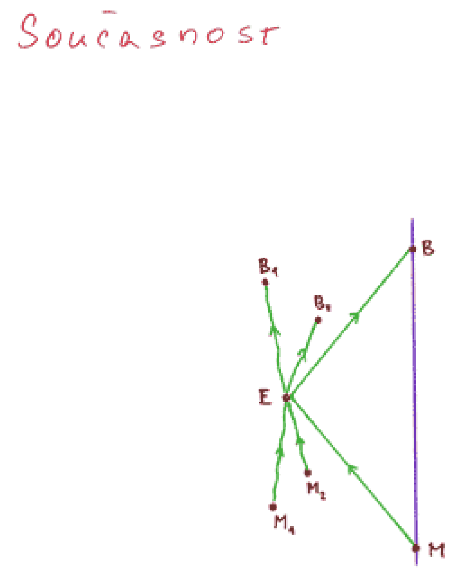
Tato skutečnost není zdaleka podpořena naší každodenní zkušeností – ona maximální rychlost fyzikálního signálu je výrazně větší než rychlosti všech těles se kterými se normálně setkáváme a proto si horního omezení pro rychlosti nejsme v běžném životě vědomi. Dnes však má fyzika k dispozici nepřeberné množství experimentů a indícií přesvědčivě ukazujících, že fyzikální signál se opravdu nemůže šířit libovolně rychle.

Signál šířící se maximální možnou rychlostí budeme nazývat *referenční signál*. Nejznámější fyzikální realizací referenčního signálu je světlo – světlo se tedy šíří ve všech inerciálních soustavách stejně rychle a nic ho nemůže předběhnout.

Referenční signál nám mimo jiné též umožňuje převádět časové jednotky na délkové a naopak. Vzdálenost můžeme např. měřit ve světelných sekundách.

Prostoročasové diagramy budeme vykreslovat právě v takto sjednocených jednotkách. Světočára (prostoročasová trajektorie) světelného paprsku (v obrázku červeně) je pak v prostoročasových diagramech skloněna pod úhlem 45° (světlo urazí vzdálenost jedné světelné sekundy za čas jedna sekunda).

Budování prostoročasu



Rychlost šíření signálu a definice současnosti

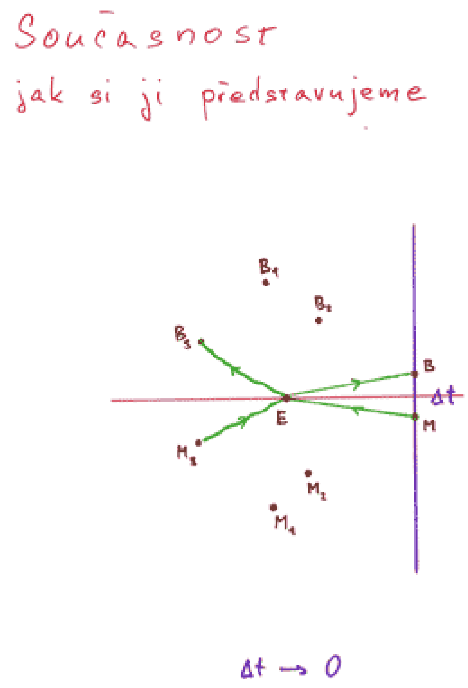
Omezení na rychlost šíření signálů úzce souvisí s definicí současnosti. Ukazuje se, že není vůbec jednoduché říci, co to současnost je.

Běžná intuice říká, že současnost je předěl mezi tím, co bylo – minulostí – a tím, co bude – budoucností. Zkusme se na takto definovanou současnost podívat podrobněji.

Nejdříve si zpřesníme pojmy minulost a budoucnost. Mějme v prostoročase nějakou událost E. Pod její *absolutní minulostí* budeme rozumět všechny události, o kterých jsme se v události E mohli dozvědět, tj., ze kterých mohl do události E dorazit nějaký fyzikální signál – v obrázku např. události M, M_1 a M_2. Obdobně definujeme *absolutní budoucnost* události E jako všechny události, do kterých lze z E zaslat signál – v obrázku např. B, B_1 a B_2.

Nyní se můžeme zeptat, zda absolutní minulost a budoucnost události E již vyčerpává (skoro) všechny události v prostoročasu nebo zda ještě zbývá netriviální část prostoročasu nepatřící ani do minulosti ani do budoucnosti události E.

Budování prostoročasu



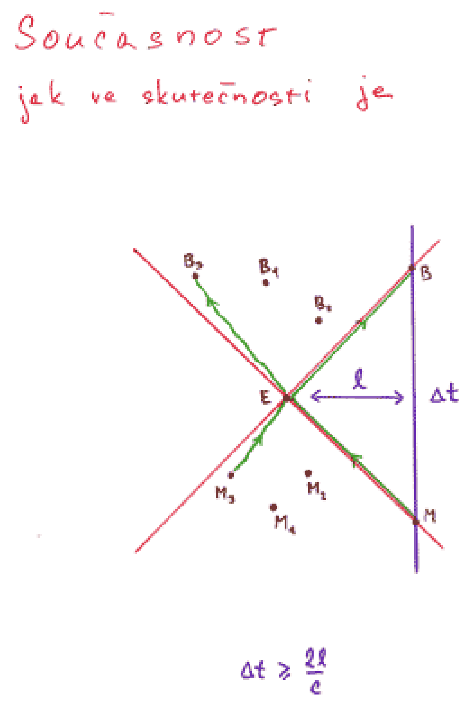
Současnost podle newtonovské fyziky

Odpověď na tuto otázku závisí samozřejmě na tom, jaké signály máme k dispozici. Pokud bychom měli k dispozici alespoň v principu libovolně rychlý signál – tak jak to běžně v newtonovské fyzice předpokládáme – absolutní minulost a budoucnost události *E* pokryjí v podstatě celý prostoročas. Jediné události nepatřící ani do minulosti ani do budoucnosti by byly ty, k jejichž dosažení z události *E* potřebujeme nekonečně rychlý signál. To znamená, právě události *současné* s *E*.

V takovémto případě je událostí současných s událostí *E* (tvořící tzv. nadplochu současnosti – v obrázku červeně) výrazně méně než všech událostí v prostoročase: dimenze nadplochy současnosti je nižší než dimenze celého prostoročasu.

Omezenost newtonovské současnosti můžeme charakterizovat i jinak. Představme si pozorovatele jehož světočára nezahrnuje událost *E* (v obrázku modře). Ten může svůj život rozdělit na události *před E*, *po E* (události v absolutní minulosti či budoucnosti *E*) a ty zbývající. Otázkou je, jaká je minimální doba Δt kterou naměří na svých ideálních hodinách mezi nějakou událostí *M* minulou vzhledem k *E* a nějakou událostí *B* budoucí vzhledem k *E*.

Pokud máme k dispozici neomezeně rychlé signály, tak čas Δt lze libovolně zkrátit. Neboli současnost trvá `nekonečně krátko'.



Současnost reálného světa

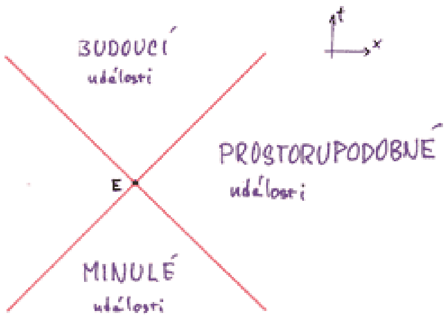
Ve světě, ve kterém žijeme, však libovolně rychlé signály k dispozici nemáme. V reálném prostoročase absolutní minulost a budoucnost události *E* nepokryjí celý prostoročas a událostí ležící mimo tuto minulost a budoucnost je netriviálně mnoho.

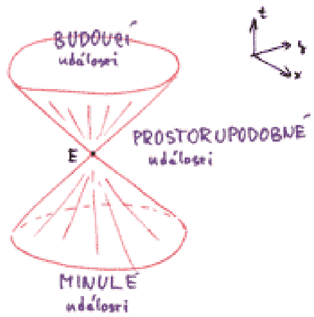
Uvažujme opět pozorovatele, který se pohybuje mimo událost *E* (v obrázku modře). Období jeho života, které se odehrálo před událostí *E* (v absolutní minulosti *E*) bude uzavřeno událostí *M*, ze které doletí do *E* už pouze ten nejrychlejší signál, který máme k dispozici. Obdobně, období života pozorovatele po *E* bude začínat událostí *B*, do které lze z *E* doletět pouze maximální možnou rychlostí. Zásadním rozdílem oproti představám newtonovské fyziky je fakt, že mezi *M* a *B* pozorovatel naměří netriviální časový úsek Δt. Mezi *M* a *B* leží mnoho po sobě jdoucích událostí které se nestaly ani před, ani po události *E*.

To, co bychom chtěli nazvat současností události *E* tedy netrvá `nekonečně krátko', jedná se o časově rozlehlou oblast. Jelikož to se neslučuje s naším chápáním pojmu *současnost*, zavedeme pro oblast mezi absolutní minulostí a budoucností jiný termín: mluvíme o *událostech prostorupodbně umístěných vůči E*.

Doby Δt můžeme použít k definici *prostorové vzdálenosti* l události *E* od volného pozorovatele vztahem $l = 2c\,\Delta t/2$, kde c je rychlost světla. Toto bude vzdálenost měřená v klidové inerciální soustavě pozorovatele.

Budování prostoročasu





Kauzální struktura

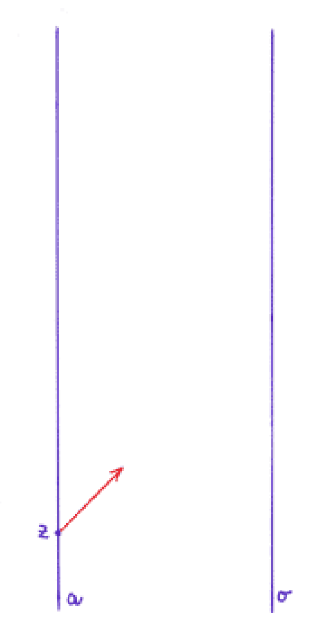
Shrňme nyní naše poznatky o kauzálních vztazích mezi událostmi. Vzhledem k libovolné události E rozdělujeme prostoročas na události budoucí, události minulé a události prostorupodbně položené vůči E.

Hranice absolutní minulosti a budoucnosti se nazývá *světelný kužel* s vrcholem v E (v obrázku červeně). Světelný kužel je tvořen událostmi, které jsou spojeny s událostí E referenčním signálem. Události minulé a budoucí nazýváme též *časupodobně položené* vůči E.

Obecně říkáme, že dvě události jsou *časupodobně položené*, pokud mezi nimi lze poslat signál podsvětelnou rychlostí, *světelně spojené* pokud je spojuje právě referenční signál (jedna leží na světelném kuželu druhé) a konečně *prostorupodobně položené* pokud je nelze spojit fyzikálním signálem. Prostorupodobně položené události se tak nemohou kauzálně ovlivnit.

Jméno světelný *kužel* je motivováno zobrazením kauzální struktury v třídimenziálním diagramu – světelný kužel se v něm geometricky skládá z dvou vrcholem spojených kuželů. Ve skutečném čtyřdimenzionálním prostoročase je světelný kužel třídimenzionální a lze si jej představit jako dvoudimenzionální kulovou plochu (třetí rozměr je v časovém směru) smršťující se rychlostí světla do bodu a pak opět rychlostí světla expandující.

Synchronizace hodin



Synchronizace hodin modrých pozorovatelů ...

V předchozím výkladu jsme se seznámili s kauzální strukturou relativistického prostoročasu: události mohou být navzájem prostorupodobně, časupodobně či světelně položené. Prozatím se nám však ztratil pojem *současnost*. Co znamená, že jsou dvě události současné? Jak definovat současnost, když nemáme k dispozici libovolně rychlý signál, pomocí kterého bychom mohli synchronizovat hodiny v různých místech prostoročasu?

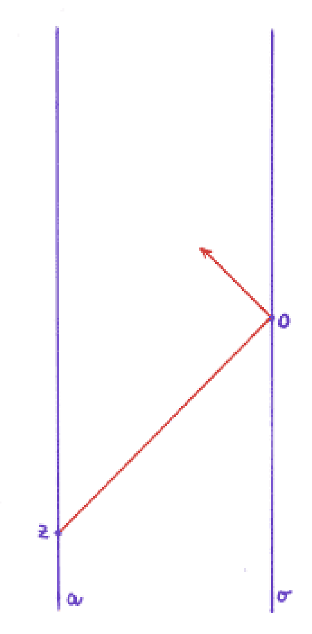
Hodiny si však můžeme synchronizovat i bez "nekonečně" rychlého signálu – pokud použijeme signál šířící se konečnou rychlostí. Musíme pouze provést korekci na dobu šíření.

Naše situace je navíc zjednodušena tím, že máme k dispozici výjimečný signál, na kterém se shodnou všichni pozorovatelé – referenční signál šířící se maximální možnou rychlostí.

Pro synchronizaci hodin v tuhém systému inerciálních pozorovatelů – v obrázku vyznačených modře – pak můžeme použít následující postup:

1. Uvažujme dva pozorovatele *a* a *o* patřící do jednoho systému inerciálních pozorovatelů. Pozorovatel *a* vyšle v okamžik *Z* směrem k pozorovateli *o* referenční signál, tj. signál šířící se maximální možnou rychlostí. Zároveň začne měřit na svých ideálních hodinách čas.

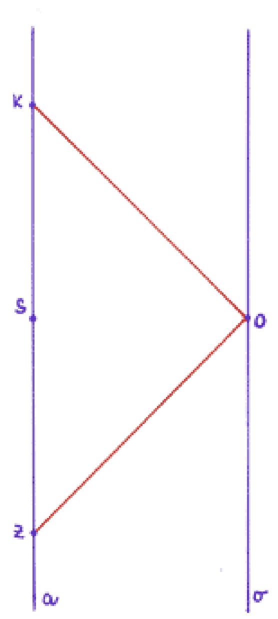
Synchronizace hodin



... modrá synchronizace pokračuje ...

2. Pozorovatel *o* zachytí referenční signál v okamžiku *O* a okamžitě ho pošle zpět pozorovateli *a*.

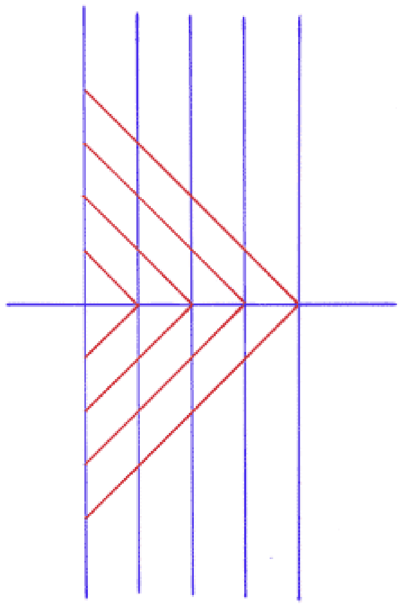
Synchronizace hodin



... stále ještě synchronizujeme ...

3. Refenční signál dorazí zpět k pozorovateli *a* v okamžik *K*. Pozorovatel *a* odečte na svých ideálních hodinách čas Δt mezi událostmi *Z* a *K* a určí událost *S* přesně v polovině mezi *Z* a *K*. (Událost *S* se odehrála na světočáře pozorovatele *a* čas $\Delta t/2$ po události *Z*.)
4. Oba pozorovatelé prohlásí události *S* a *O* za současné a přiřadí těmto událostem stejný čas – synchronizují si hodiny.

Synchronizace hodin



... dosynchronizováno

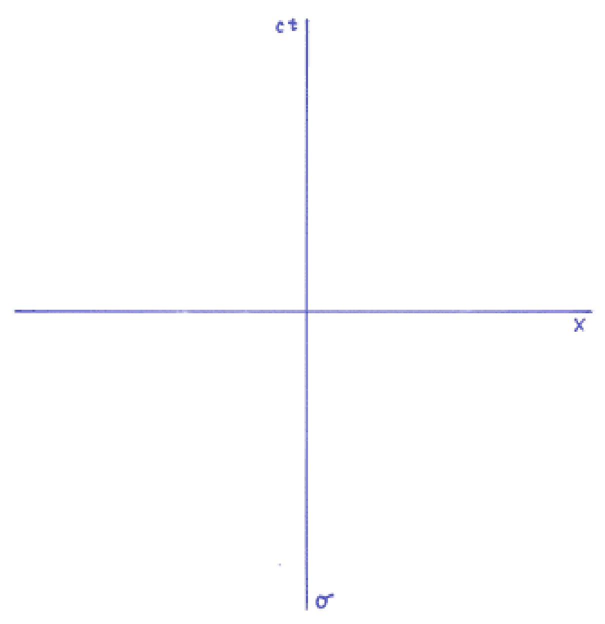
5. Stejný postup synchronizování hodin provedou všichni pozorovatelé daného tuhého systému inerciáních pozorovatelů.

Netriviální experimentální zjištění je, že takováto synchronizace hodin je konzistentní. Konkrétně:

- Synchronizace je reflexivní – je-li událost A současná s B, pak i B je současná s A.
- Synchronizace je tranzitivní – máme-li současné události A a O a současné události B a O, pak i A a B jsou současné.
- Nezávisí na tom, kdy se synchronizace provádí. Zjistí-li dva pozorovatelé a a b daného tuhého systému inerciálních pozorovatelů, že události A_1 a B_1 ležící na jejich světočárách jsou současné, a o něco později, že události A_2 a B_2 jsou současné, pak pozorovatel a naměří mezi událostmi A_1 a A_2 stejný časový interval jako pozorovatel b mezi událostmi B_1 a B_2.

Tyto vlastnosti synchronizace hodin nejsou samozřejmé, nejsou nijak logicky vynucené. Jejich platnost je nutno experimentálně ověřit. Tyto vlastností úzce souvisí s *homogenitou* prostoročasu; v podstatě tvrdí, že čas běží všude a stále `stejně rychle'. Ukazuje se, že uvedené vlastnosti jsou velmi dobře splněny v oblastech, kde nehraje velkou roli gravitační pole (silná gravitační pole totiž deformují prostor a čas – to však již vybočuje za rámec speciální teorie relativity).

Synchronizace hodin



Modrá soustava souřadnic

Pozorovatelé ze zvoleného tuhého systému inerciálních pozorovatelů mohou rozdělit prostoročas na množiny navzájem současných událostí. Těmto množinám se říká *nadplochy současnosti*. Čtyřdimenzionální prostoročas se tak rozpadá do sekvence třídimenzionálních nadploch současnosti. V prostoročasových diagramech jsou nadplochy současnosti znázorněny jako horizontální přímky.

Synchronizace hodin umožňuje pozorovatelům zavést globální, pro všechny společný čas t, číslující jednotlivé nadplochy současnosti.

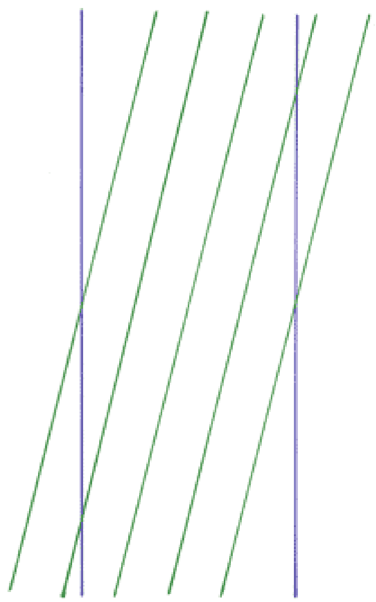
Pozorovatelé mohou též zavést pojem *prostorové vzdálenosti*. Tato vzdálenost, určující jak jsou dva (vůči sobě se nepohybující) inerciální pozorovatelé daleko, je dána vztahem $l = c\,\Delta t$, kde Δt je doba, kterou potřebuje referenční signál k cestě od jednou pozorovatele k druhému a c je rychlost světla.

Experimentální zkušenost ukazuje, že takto definovaná vzdálenost splňuje zákonitosti euklidovské geometrie (opět, nehrajou-li roli silná gravitační pole). Můžeme tedy zavést soustavu pravoúhlých kartézských souřadnic x, y, z.

Prostorové pravoúhlé souřadnice x, y, z spolu s globálním časem t tvoří *inerciální soustavu souřadnic* asociovanou s daným tuhým systémem inerciálních pozorovatelů.

V dalším budeme zkoumat vztah různých inerciálních soustav.

Synchronizace hodin

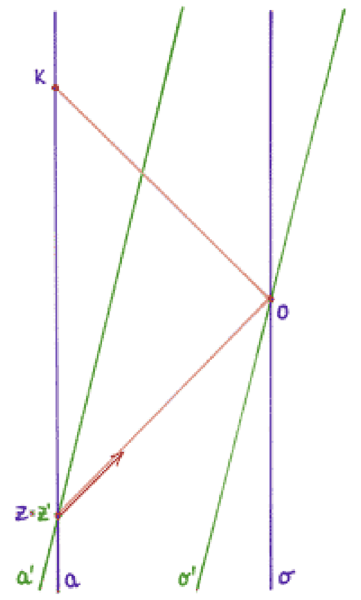


Zelený systém pozorovatelů

Jak jsme již diskutovali, existuje více tuhých systémů inerciálních pozorovatelů, které se navzájem se vůči sobě pohybují. Uvažujme vedle našeho "modrého" systému ještě další "zelený" systém.

Netriviální vlastností našeho prostoročasu je, že světočáry inerciálních pozorovatelů zeleného systému budou v modré inerciální soustavě posané jako rovnoběžné přímky (popsané lineární rovnicemi v souřadnicích t, x, y, z lišící se pouze absolutním členem). To opět odráží homogenitu prostoročasu okolo nás.

Synchronizace hodin



Synchronizace hodin zelených pozorovatelů ...

Z principu ekvivalence víme, že oba systémy – modrý i zelený – by měly být rovnocené. Můžeme tedy provést v zeleném systému synchronizaci hodin podle přesně stejného návodu, jako jsme ji provedli v modrém systému. Pouze vše musíme vztahovat k zeleným pozorovatelům. Začneme prvním bodem:

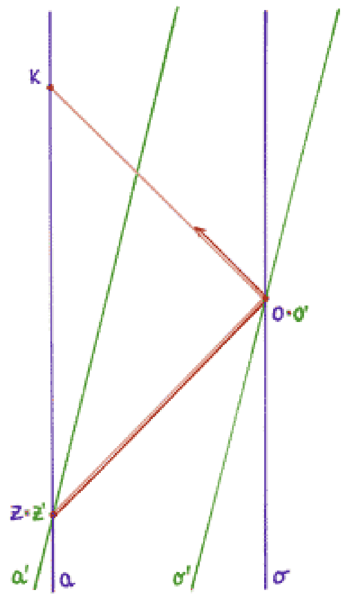
1. Uvažujme dva pozorovatele a' a o' patřící do zeleného systému inerciálních pozorovatelů. Pozorovatel a' vyšle v okamžik Z' směrem k pozorovateli o' referenční signál, tj. signál šířící se maximální možnou rychlostí. Zároveň začne měřit na svých ideálních hodinách čas.

Pro názornost obrázku zvolíme zeleného pozorovatele a' tak, aby okamžik Z' vyslání referenčního signálu byl shodný s okamžikem Z, kdy vyšle referenční signál i modrý pozorovatel a.

Uvědomme si, že oba referenční signály vyslané modrým a zeleným pozorovatelem se budou pohybovat prostoročasem stejně rychle. Oba se totiž pohybují nejrychlejším možným způsobem a tak ani jeden z nich nemůže předběhnout ten druhý. Šíření referenčního signálu nezávisí na pohybu zdroje!

Pohyb zdroje může mít ale vliv na jiné vlastnosti referenčního signálu. Budeme-li jako referenční signál používat světlo (bliknutí baterky), díky Doplerově posunu bude mít paprsek od modrého a zeleného pozorovatele různou barvu.

Synchronizace hodin

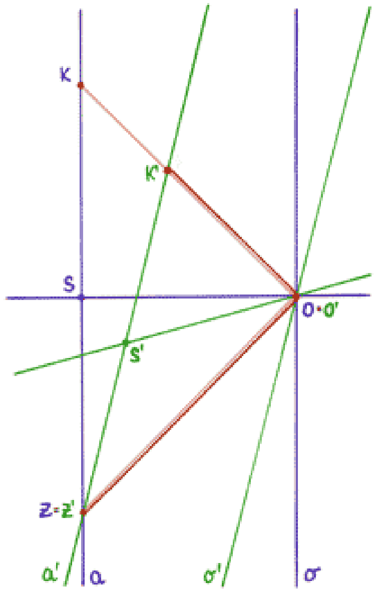


... synchronizace hodin zelených pozorovatelů

2. Zelený pozorovatel o' zachytí referenční signál vyslaný pozorovatelem a' v okamžiku O' a okamžitě ho pozorovateli a' pošle zpět.

Pro názornost obrázku zvolíme pozorovatele o' tak, aby se událost O' shodovala s událostí O, kdy zachytí modrý pozorovatel o referenční signál od pozorovatele a.

Synchronizace hodin

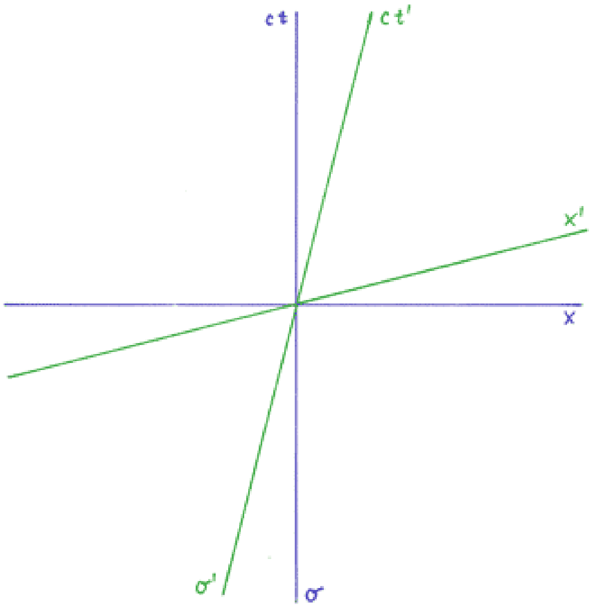


Zelená soustava souřadnic

3. Referenční signály od pozorovatelů o a o' (letící zpátky k pozorovatelům a a a') se opět pohybují prostoročasem společně. Zelený pozorovatel a' se však oproti modrému pozorovateli a pohybuje svému referenčnímu signálu naproti a zachytí ho již v okamžiku K'. Pozorovatel a' odečte na svých ideálních hodinách čas $\Delta t'$ mezi událostmi Z' a K' a určí událost S' přesně v polovině mezi Z' a K'. (Událost S' se odehrála na světočáře pozorovatele a' čas $\Delta t'/2$ po události Z'.)
4. Události S' a O' prohlásí zelení pozorovatelé za současné a přiřadí těmto událostem na svých hodinách stejný čas.
5. Stejný postup synchronizování hodin provedou všichni zelení pozorovatelé a zkonstruují tak svoji nadplochu současnosti (v obrázku zelená, mírně skloněná horizontální přímka).

Okamžitě vidíme, že současnost zkonstruovaná zelenými pozorovateli je odlišná od té, zavedené modrými pozorovateli. Zdánlivě přirozený postup vede pro různé systémy inerciálních pozorovatelů k jiným výsledkům.

Synchronizace hodin



Relativita současnosti

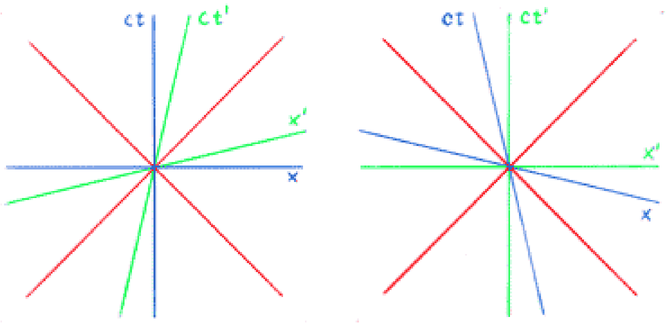
Různost modré a zelené současnosti by mohla znamenat, že náš postup pro synchronizaci hodin je chybný. Že je příliš vázaný na ten či onen systém inerciálních pozorovatelů.

Tento závěr je oprávněný, bohužel však nelze vymyslet postup synchronizace hodin, který by byl lepší.

Pojem současnosti není ve světě s omezenou rychlostí šíření signálů jednoznačný. Pojem prostorupodobnosti je to nejlepší, co můžeme zavést nezávisle na volbě inerciálního pozorovatele. Chceme-li zavést pojem současnosti blízký naší newtonovské, nerelativistické intuici, musíme ho zavádět vzhledem k zvolenému tuhému systému inerciálních pozorovatelů a výsledek bude na této volbě záviset.

Globální čas t' zavedený zelenými pozorovateli se bude lišit od globálního času t modrých pozorovatelů. Vztahy mezi modrými inerciálními souřadnicemi t, x, y, z a zelenými inerciálními souřadnicemi t', x', y', z' budou složitější než Galielovy transformace newtonovské fyziky.

Synchronizace hodin



Ekvivalence prostoročasových diagramů

Poznamenejme ještě pár slov o věrnosti našich prostoročasových diagramů.

Zdálo by se, že diagramy, které jsme používali, preferují modré pozorovatele. Ti jsou v nich znázorněni svislicemi a jejich současnost vodorovnými čárami. Zelení pozorovatelé jsou oproti tomu znázorněni skloněnými čárami a zdá se nám, že úhel mezi jejich časovou a prostorovou osou není pravý.

To je však jen zdání. Můžeme se postavit do pozice zelených pozorovatelů a nakreslit diagram, ve kterém jsou zelení znázorněni svislicemi a jejich současnost vodorovnými čárami. Naopak světočáry modrých pozorovatelů budou skloněné.

Oba tyto diagramy jsou rovnocenné. Vystihují však prostoročas z `různých úhlů pohledu'. Skutečný prostoročas není euklidovský prostor (jak uvidíme dále, je popsán Minkowského geometrií) a proto ho nelze nakreslit na papír řídící se euklidovskou geometrií zcela věrně.

Jsme v podobné situaci, jako když chceme znázornit kulatou zeměkouli na plochý papír – musíme používat různé mapy, které vystihují některé oblasti zeměkoule poměrně přesně, jinde jsou však deformované a zavádějící. A vždy si vybereme takovou mapu, která se nám nejvíce hodí.

Podobně při znázorňování prostoročasu si můžeme vybrat mezi různými mapami-diagramami přispůsobenými různým situací. Jeden diagram vystihuje lépe modré pozorovatele a deformuje zelené, jiný naopak.

Relativistický popis

Referenční signál

$$-(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 = 0$$

$$-(c\Delta t')^2 + \Delta x'^2 = 0$$

globální vlastnosti + ekvivalence

$\Rightarrow$ linearita

ref. signál + linearita + ekvivalence

$\Downarrow$

Referenční signál v různých soustavách

Naším cílem nyní bude nalézt transformační vztahy mezi dvěmi inerciálními soustavami souřadnic. Pro jednoduchost zvolíme soustavy tak, aby měly společný počátek a aby se vůči sobě pohybovaly ve směru osy x a x'.

Již jsme se zmínili, že vzhledem k jedné zvolené inerciální soustavě jsou světočáry všech ostatních inerciálních pozorovatelů posány lineárními vztahy. Z konstrukce nadplochy současnosti a homogenity prostoročasu již pak vyplývá, že i tato nadplocha je dána lineárními vztahy.

Očekáváme tedy, že transformace mezi dvěmi sadami inerciálních souřadnic budou *lineární*.

Princip ekvivalence nám dále říká, že referenční signál se šíří ve všech soustavách stejnou rychlostí c. Uletí-li vzhledem k modré inerciální soustavě vzdálenost Δx za čas Δt, můžeme psát

$$-(c\,\Delta t)^2 + \Delta x^2 = 0\,.$$

Obdobně v souřadnicích zelené soustavy

$$-(c\,\Delta t')^2 + \Delta x'^2 = 0\,.$$

Oba tyto vztahy jsou navzájem ekvivalentní – vztah v modré soustavě je splněn právě tehdy když je splněn vztah v zelené soustavě. Složitě řečeno, jsou-li nulové, jsou si levé strany těchto podmínek rovny.

Relativistický popis

Referenční signál

$$-(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 = 0$$

$$-(c\Delta t')^2 + \Delta x'^2 = 0$$

globální vlastnosti + ekvivalence

$\Rightarrow$ linearita

ref. signál + linearita + ekvivalence

$\Downarrow$

Invariant

$$s^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 = -(c\Delta t')^2 + \Delta x'^2$$

Invariant

Ukazuje se však, že platí mnohem silnější tvrzení. Výrazy na levé straně podmínek pro referenční signál *si jsou rovny vždy*, i když nejsou nulové, tj. i když se neodkazují na události spojené referenčním signálem.

Veličina, která je pomocí výrazů na levé straně definována se nazývá *prostoročasový interval s*

$$s^2 = -(c\,\Delta t)^2 + \Delta x^2 = -(c\,\Delta t')^2 + \Delta x'^2 .$$

Všimněme si, že vyjádření intervalu v modré i zelené soustavě jsou formálně stejné – pouze modré souřadnice jsou nahrazeny zelenými souřadnicemi. Prostoročasový interval je tak *invariant* – jeho hodnota nezávisí na soustavě, ve které se spočítá.

Rovnost modrého a zeleného výrazu nahlédneme následovně: Dosadíme-li do zeleného výrazu lineární transformační vztahy nahrazující zelené souřadnice modrými, dostaneme kvadratický výraz v modrých souřadnicích. Výsledný výraz má stejné kořeny jako původní, též kvadratický modrý výraz (modrý výraz je nulový právě tehdy když je nulový výraz zelený – viz předchozí strana). Jelikož oba kvadratické výrazy mají stejné kořeny, musí si být úměrné. Z principu ekvivalence obou soustav a isotropie prostoročasu (prostoročas vypadá ve všech směrech stejně) vyplývá, že koeficient úměrnosti musí být 1 – oba výrazy si musí být rovny!

Invariant

$$s^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 = -(c\Delta t')^2 + \Delta x'^2$$

Invariant

$$d^2 = (c\Delta\tau)^2 + \Delta\xi^2 = (c\Delta\tau')^2 + \Delta\xi'^2$$

Minkowského geometrie

Prostoročasový interval (dále též invariant) mezi dvěmi událostmi prostoročasu velmi připomíná vzorec pro kvadrát vzdálenosti mezi dvěma body euklidovského prostoru počítanou v pravoúhlých souřadnicích – prostoročasový interval má navíc pouze znaménko minus před časovým členem. S výrazem pro euklidovskou vzdálenost jsme se již setkali v žížalím světě a nazývali jsme ho *žížalí invariant*. (Konstanta *c* v žížalím invariantu převáděla články na pídě obdobně jako rychlost světla *c* převádí sekundy na metry.)

Invariant vskutku hraje roli kvadrátu jakési vzdálenosti (či spíše pseudovzdálenosti, protože s^2 může být i záporné). Geometrie určená touto pseudovzdáleností se nazývá *Minkowského geometrie*.

Fyzikální význam invariantu mezi dvěmi událostmi je následující: Pokud $s^2<0$, události jsou položeny časupodobně, pokud $s^2>0$, události jsou položeny prostorupodobně, a pokud $s^2=0$ obě události jsou spojeny světelně. Význam číselné hodnoty s^2 uvidíme později.

Relativistický popis

Lorentzovy transformace

$$ct' = ct\,\mathrm{ch}\,\beta - x\,\mathrm{sh}\,\beta$$
$$x' = -ct\,\mathrm{sh}\,\beta + x\,\mathrm{ch}\,\beta$$

rychlost

$$\frac{v}{c} = \mathrm{th}\,\beta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ch}\,\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \mathrm{sh}\,\beta = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Rotační žížalí transformace

$$c\tau' = c\tau\cos\alpha + \xi\sin\alpha$$
$$\xi' = -c\tau\sin\alpha + \xi\cos\alpha$$

směrnice

$$\frac{v}{c} = \mathrm{tg}\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \sin\alpha = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{\tau' = \frac{\tau + \frac{\xi v}{c^2}}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \xi' = \frac{\xi - v\tau}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}}$$

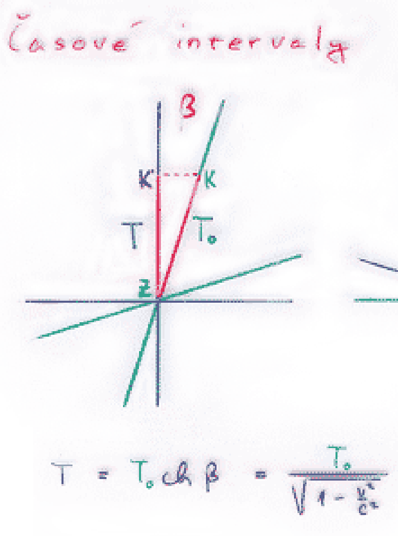
Lorentzovy transformace

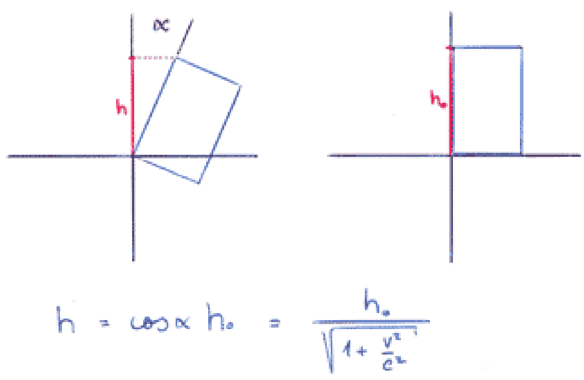
Vztahy mezi dvěmi inerciálními soustavami souřadnic jsou *lineární vztahy*, které zachovávají tvar *invariantu* s^2 – jejich nalezení se tak stává jednoduchou algebraickou úlohou.

My zde však využijeme analogie s prací žížaláka Alberta. Ten odvodil, že lineární transformace zachovávající vzdálenost nejsou nic jiného než rotační transformace s koeficienty danými goniometrickými funkcemi úhlu otočení. Obdobné transformační vztahy zachovávající relativistický invariant jsou tzv. *Lorentzovy transformace*, či též *boost* nebo *pseudorotace*. Tato tansformace má velice podobný tvar jako rotace, pouze s koeficienty danými místo goniometrcikými funkcemi cos α a sin α úhlu α hypergoniometrickými funkcemi ch β a sh β *rapidity* (též *pseudoúhlu*) β.

Nakonec ještě parametrizujeme tyto vztahy rychlostí v (počátku) jedné soustavy vůči soustavě druhé. Ta je s rapiditou svázána vztahem $v/c=\mathrm{th}\beta$ (jelikož pro $x'=0$ je $v=x/t$). Užitím vztahů mezi hypegoniometrickými funkcemi analogickými se vztahy pro goniometrické funkce dostaneme známý tvar *Lorentzových transformací* mezi dvěmi sadami inerciálních souřadnic.

Relativistický popis





Časové intervaly

Zmínili jsme se, že prostoročas je `vybaven' Minkowského geometrií. Ta nám umožní určit časové úseky a vzdálenosti nezávisle na tom, v které soustavě situaci popisujeme. Nejdříve si však musíme ujasnit, co pod měřením časových úseků a délek rozumíme.

Zkoumejme dvě události Z a K, které se odehrály v letící raketě. Z hlediska pozorovatelky na raketě je jasné, co časový úsek mezi oběma událostmi znamená. Události se totiž z jejího hlediska staly na stejném místě a stačí jí tak pouze odečíst dobu T_o na svých ideálních hodinách – tento údaj nazýváme *vlastní (klidový) čas* mezi Z a K.

Pozorovatel na Zemi však chce časový úsek mezi Z a K změřit na *svých* hodinách. Raketa se ale vůči Zemi pohybuje a události Z a K se nestaly z hlediska pozemského pozorovatele na stejném místě. Jediné, co může pozorovatel udělat, je změřit dobu T mezi Z a okamžikem K', který se stal na stejném místě jako Z a je s K současný. *Současný* samozřejmě z hlediska pozorovatele na Zemi.

Pozorovatel na Zemi tak měří jakýsi průmět časového úseku ZK do své časové osy. Není tedy divu, že oba pozorovatelé naměří různé hodnoty – měří jiné veličiny!

Vztah mezi T_o a T je dán Minkowského trigonometrií obdobnou té obyčejné, rovinné. Jen místo funkce cos je nutno použít hypergoniometrickou funkci ch. Po vyjádření rapidity β pomocí rychlosti dostaneme známý vzorec pro prodlužování času.

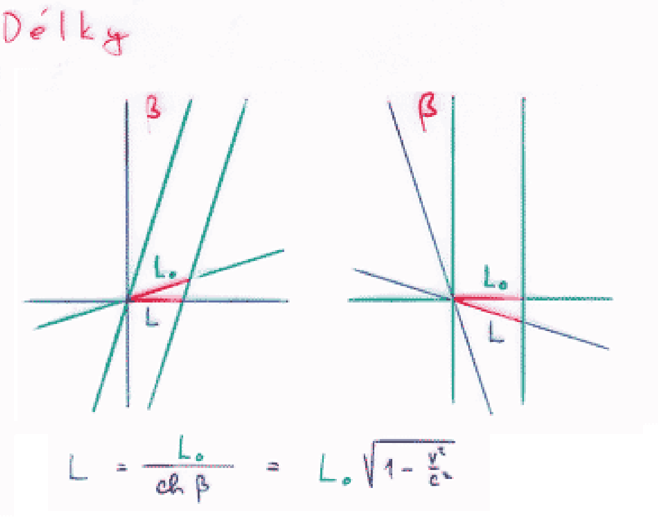
Relativistické měření časových intervalů je tak přímá paralela s žížalím měření výšek. Různě skloněné žížaly měří různé průměty žížaly do své vertikální osy a naměří tak různé hodnoty. Pokud jsou žížaly od sebe odkloněny jen nepatrně, rozdíly ve výšce jsou zanedbatelné. Stejně tak při běžných rychlostech rozdíly v časových údajích měřenými různými pozorovateli nepozorujeme.

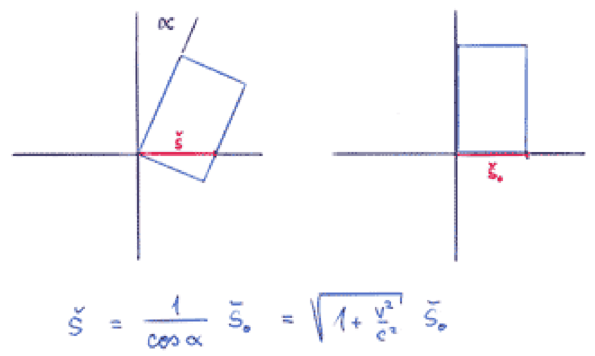
Povšimněmě si, že prostoročasový interval s^2 mezi oběma událostmi je dán výrazem $s^2 = -c^2 T_o^2$. Interval však můžeme spočíst v libovolné jiné soustavě, což nám dává další obecný vzorec pro vlastní čas mezi časupodobně položenými událostmi Z a K

$$c\,T_o = (c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2)^{1/2} .$$

Zde Δt a Δx jsou rozdíly souřadnic obou událostí. Dosazením $\Delta t = T$ a $\Delta x = v\,T$ opět dostaneme známý vztah mezi T_o a T uvedený na obrázku.

Relativistický popis





Měření délek

Nyní se podívejme na měření vzdáleností. Pod délkou rakety rozumí pozorovatelka na raketě vzdálenost začátku a konce rakety měřeno ve stejný okamžik ve smyslu současnosti rakety. Této délce se říká *vlastní (klidová) délka*. V diagramech jsou světočáry začátku a konce rakety vyznačeny zelenými vertikálními čárami, současnost rakety odpovídá zelené horizontální linii. Pozorovatelka na raketě tak naměří délku L_O.

Pozorovatel na Zemi pod délkou rakety chápe také vzdálenost začátku a konce rakety, měřeno však ve stejný okamžik ve smyslu Země. V diagramech je současnost Země vyznačena modrou horizontální čarou, pozorovatel na Zemi naměří délku L.

Vidíme, že pozorovatel na Zemi měří jakýsi horizontální průřez historií rakety; měří jinou veličinu než pozorovatelka na raketě. Opět se tedy nemůžeme divit, že oba pozorovatelé naměří různé hodnoty.

Vztah mezi L_O a L je dán Minkowského trigonometrií. Po vyjádření rapidity β pomocí rychlosti dostaneme známý vzorec pro zkracování délek.

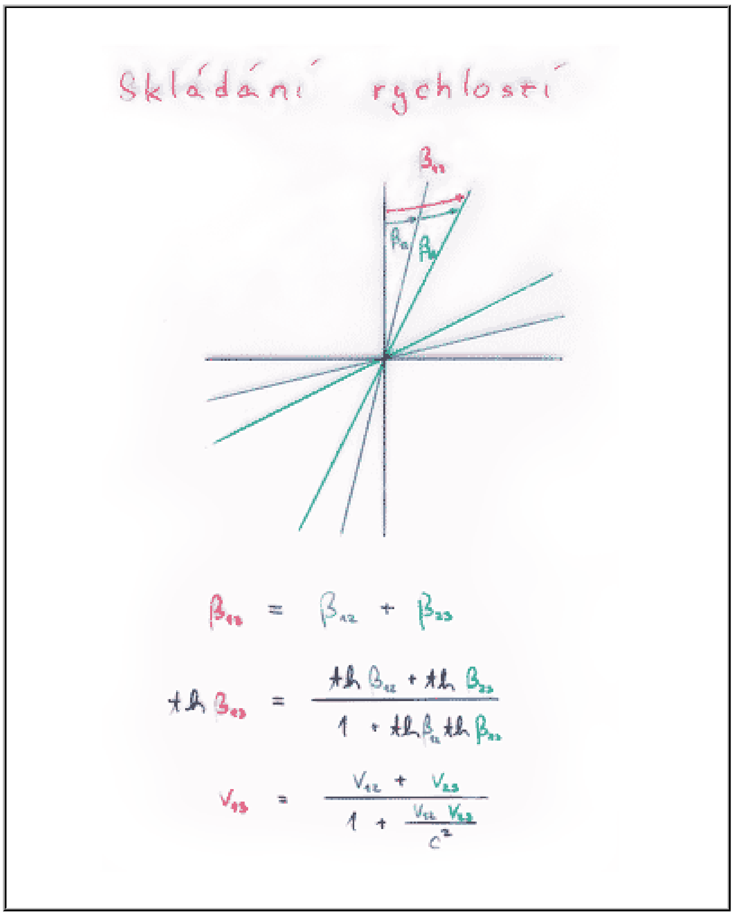
Relativistické měření délek je obdobou žížalího měření šířek. Různě skloněné žížaly měří různé horizontální průřezy a naměří tak různé hodnoty. Pokud jsou žížaly od sebe odkloněny jen nepatrně, rozdíly v šířce jsou zanedbatelné. Stejně tak při běžných rychlostech jsou rozdíly v délkách naměřených různými pozorovateli nepostřehnutelné.

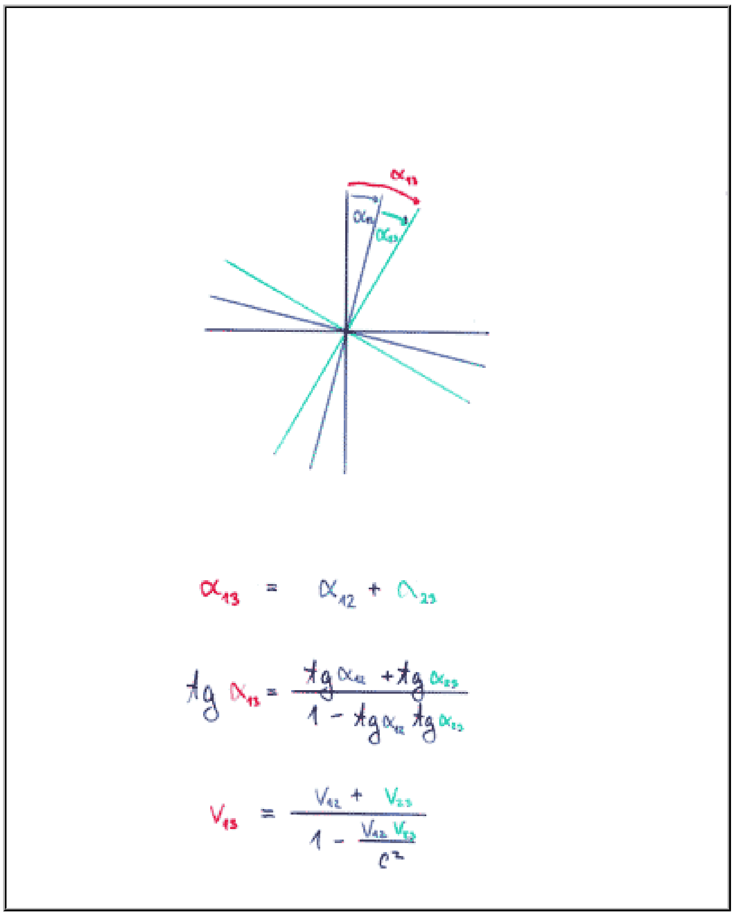
Prostoročasový interval s^2 mezi událostmi na začátku a konci rakety současnými vzhledem k raketě je dán výrazem $s^2 = L_O{}^2$. Interval však můžeme vyjádřit v libovolné jiné soustavě, což nám dává obecný vzorec pro vlastní vzdálenost mezi prostorupodobně položenými událostmi

$$L_O = (-c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2)^{1/2}.$$

Zde Δt a Δx jsou rozdíly souřadnic obou událostí.

Relativistický popis





Skládání rychlostí

Obdobně jako se při postupném otáčení kartézských soustav v euklidovské rovině sčítají úhly pootočení

$\alpha_{13} = \alpha_{12} + \alpha_{23}$,

sčítají se při postupném boostování inerciálních soustav v Minkowském prostoročase rapidity

$\beta_{13} = \beta_{12} + \beta_{23}$

(tuto skutečnost lze přímo ověřit postupným dosazením dvou Lorentzových transformací parametrizovaných rapiditou β_{12} a β_{23} do sebe a použitím součtových vzorců).

Uvědomíme-li si, že rychlost je dána hyperbolickým tangentem rapidity, použitím součtového vzorce pro th obdržíme relativistický vzoreček pro skládání rychlostí.

Relativistický popis

Lorentzovy transformace

$$t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Časové intervaly a délky

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Skládání rychlostí

$$V_{13} = \frac{V_{12} + V_{23}}{1 + \frac{V_{12} V_{23}}{c^2}}$$

Rotační žížalí transformace

$$\tau' = \frac{\tau + \frac{\xi v}{c^2}}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\xi' = \frac{\xi - v\tau}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$$

Výška a šířka

$$h = \frac{h_0}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}} \qquad š = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}\, š_0$$

Skládání směrnic

$$V_{13} = \frac{V_{12} + V_{23}}{1 - \frac{V_{12} V_{23}}{c^2}}$$

Relativistické vzorce

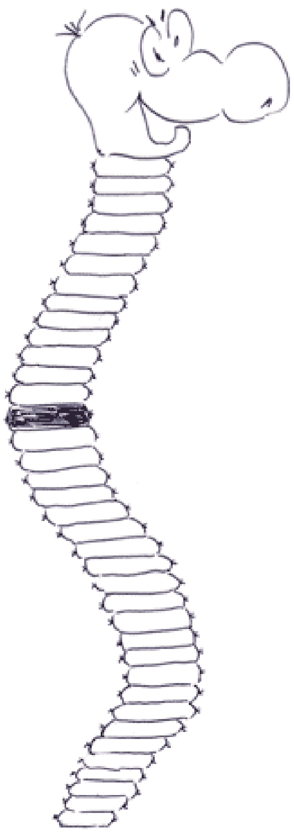
Shrňme si naše znalosti o prostoročase.

Prostoročas speciální relativity je obdařen Minkowského geometrií podobně jako žížalí svět geometrií euklidovskou. Inerciální soustavy hrají v Minkowského geometrii roli pravoúhlých soustav euklidovské roviny. Transformace od jedné inerciální soustavy k druhé (se společným počátkem) se nazývá boost či obecněji Lorentzova transformce. Tyto transformace jsou obdobou žížalích rotačních transformací.

Rozdílný způsob měření délek a časů vzhledem k různým inerciálním soustavám vede k relativitě těchto veličin. Jedná se o analogii měření šířky a výšky v žížalím světě – tyto veličiny jsou vždy jistým průmětem či průřezem definovaným vůči zvolené soustavě. Při změně soustavy se mění.

Při složením dvou po sobě jdoucích boostů se sčítají jejich rapidity, což vede k složitějšímu vzorci pro skládání rychlostí. Obdobně, v žížalím světě se při postupném otáčení soustav sčítají úhly, což dává složitější vzorec pro skládání směrnic.

Závěr



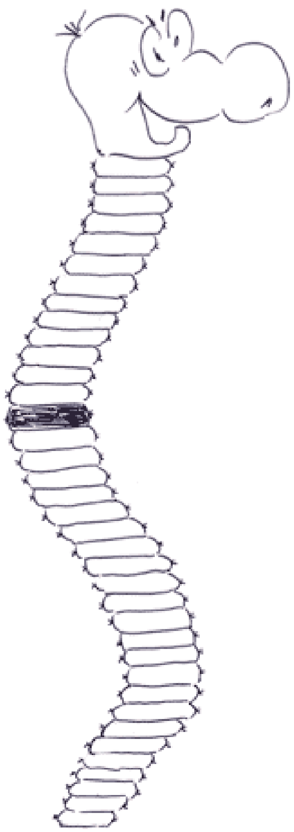
Pár slov ...

Speciální teorie relativity je teorie prostoru a času. Spojuje tyto pojmu do jednotného prostoročasu, kterému dává speciální geometrickou strukturu. Chceme-li porozumět teorii relativity, není ani tak důležité znát všechny možné vzorečky pro zkracování délek a prodlužování času. Je důležité rozumět, co tyto veličiny znamenají. Proč jsou závislé na volbě vztažné soustavy. Je potřeba pochopit, že správný náhled je skrze čtyřdimenzionální prostoročas s jeho Minkowského geometrií.

Při troše úsilí je možné si vybudovat intuici respektující pravidla relativistického prostoročasu. To že ji nemáme už od základní školy souvisí s tím, že žijeme ve speciální situaci, kdy se všechna běžná tělesa kolem nás pohybují velmi nízkými rychlostmi. Setkáváme se tak pouze s inerciálními soustavami, které jsou od sebe `boostlé' o velmi malý `(pseudo)úhel' a relativistické efekty se viditelně neprojeví.

Jsme v situaci žížal, které jsou vůči sobě jen velmi málo skloněné. Při nepatrných sklonech rotační vztahy mezi pootočenými soustavami degenerují a vnucují zjednodušený pohled na žížalí svět. Žížaly tak na základní škole též nezískají euklidovskou intuici pro svůj dvourozměrný svět.

Závěr



... závěrem

Speciální teorie relativity se tak dotýká nejhlubších principů v našem poznání světa. Zásadně mění naše pochopení prostoru, času a kauzálních vztahů. Reflektuje skutečnost, že fyzikální signály se mohou pohybovat nanejvýše jistou konečnou rychlostí *c*. Odvrhává pojem absolutní současnosti a nahrazuje ho pojmy prostorupodobnosti a časupodobnosti. A ač to zní divoce a nezvykle, je to velmi úspěšná teorie skutečného světa okolo nás.

Algebraické odvození Lorentzových transformací

Hledáme lineární transformace mezi souřadnicemi t, x a t', x' nějaké zvolené události E

$$c\,t' = A\,c\,t + B\,x\,,$$
$$x' = C\,c\,t + D\,x$$

zachovávající prostoročasový interval

$$-(c\,t)^2 + x^2 = -(c\,t')^2 + x'^2\,.$$

(Zde jsme užili interval mezi událostí E a společným počátkem obou inerciálních soustav, tj. $\Delta t = t$, $\Delta x = x$ atd.)

Po dosazení dostáváme

$$-c^2\,t^2 + x^2 =$$
$$= (-A^2+C^2)\,c^2t^2 + (-B^2+D^2)\,x^2 + 2\,(-AB+CD)\,c\,t\,x\,.$$

Porovnáním koeficientů dostáváme podmínky

$$-A\,B + C\,D = 0\,,$$
$$-A^2 + C^2 = -1\,,$$
$$-B^2 + D^2 = 1\,.$$

Vyjádřením C z první rovnice, dosazením do druhé a použitím třetí dostáváme (za předpokladu shodné orientace os)

$$A = D\,, \quad B = C\,.$$

Rovnice se tak redukují na jednu podmínku

$$A^2 - B^2 = 1\,,$$

která lze splnit volbou

$A = D = \mathrm{ch}\,\beta$, $B = C =$ &ndah; $\mathrm{sh}\,\beta$,

kde β je libovolný reálný parametr nazývaný *rapidita*.

Hledané transformace mají tedy tvar

$$c\,t' = \mathrm{ch}\,\beta\;\, c\,t - \mathrm{sh}\,\beta\;\, x\,,$$
$$x' = -\,\mathrm{sh}\,\beta\;\, c\,t + \mathrm{ch}\,\beta\;\, x\,.$$

Hypergoniometrické funkce

Hypergoniometrické funkce ch, sh a th jsou funkce blízké goniometrickým funkcí cos, sin a tan. Lze je definovat pomocí exponenciální fukce $\exp(x) = e^x$ následovně:

$\mathrm{ch}\, x = (\exp(x) + \exp(-x)) / 2$,
$\mathrm{sh}\, x = (\exp(x) - \exp(-x)) / 2$,
$\mathrm{th}\, x = (\exp(x) - \exp(-x)) / (\exp(x) + \exp(-x))$.

Jedná se vlastně o goniometrickými funkce imaginárního argumentu

$\mathrm{ch}\, x = \cos(\mathrm{i}\, x)$,
$\mathrm{i}\, \mathrm{sh}\, x = \sin(\mathrm{i}\, x)$,
$\mathrm{i}\, \mathrm{th}\, x = \tan(\mathrm{i}\, x)$.

Platí pro ně obdobné vztahy jako ty známé z goniometrie

$\mathrm{th}\, x = \mathrm{sh}\, x / \mathrm{ch}\, x$,
$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$,
$\mathrm{ch}^2 x = 1 / (1 - \mathrm{th}^2\, x)$,
$\mathrm{sh}^2 x = \mathrm{th}^2 x / (1 - \mathrm{th}^2 x)$.

Součtové vzorce mají tvar

$\mathrm{ch}(x + y) = \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, y + \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{sh}\, y$,
$\mathrm{sh}(x + y) = \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, y + \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{sh}\, y$,
$\mathrm{th}(x + y) = (\mathrm{th}\, x + \mathrm{th}\, y) / (1 + \mathrm{th}\, x\, \mathrm{th}\, y)$.

Konečně, pro jejich derivace dostáváme

$\mathrm{ch}'\, x = \mathrm{sh}\, x$,
$\mathrm{sh}'\, x = \mathrm{ch}\, x$,
$\mathrm{th}'\, x = \mathrm{ch}^{-2} x$.

STR a žížalí farma

Index