Diferenciální rce

- parciální — př. $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow \Delta f = 0$ např. $f = x^2 - y^2$
- obyčejné — $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, x) = 0$

- nelineární ... neplatí superposice
- lineární ... $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots a_1 y^{(1)} + a_0 y = f(x)$

obecné fce x

- řád rovnice

- homogenní .. nulová RHS
- nehomogenní

- autonomní ... neobsahuje nezávislou proměnnou
- neautonomní

lineární ODR s konst. koef.

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots a_0 y = f(x)$$

- obecné řešení: $y = y_H + y_P$

homogenní — partikulární

- homog. řeš.: ve tvaru $e^{\lambda x}$

$\Rightarrow$ charakteristický polynom $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots a_0 = 0$

$\Rightarrow$ n komplexních kořenů (různá násobnost)

$\Rightarrow$ $y_H = \underbrace{C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}_{\text{jednonás. kořeny}} + \underbrace{(C_3 + x C_4) e^{\lambda_3 x}}_{\text{dvojnásobný kořen } \lambda_3 = \lambda_4} + \dots$

atd.

- partikulární řeš.:
  - odhad
  - variace konstant

př. variace $y'' + \dots = f(x)$ $\quad y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ $\quad y_P = C_1(x) e^{\lambda_1 x} + C_2(x) e^{\lambda_2 x}$ hledám ve tvaru

$$y_P' = \underbrace{C_1' e^{\lambda_1 x} + C_2' e^{\lambda_2 x}}_{0} + \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 x}$$

... chceme zachovat tvar homog. řeš. ⊕ potřebujeme podmínky pro C_1, C_2

↳ 2. podmínka na C_1, C_2 z dosazení do pův. rce

Př. nalezněte obecné řeš. ODR

$$y'' - 6y' + 8y = e^x + e^{2x}$$

- homog. ř.

y_H : $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 = (\lambda - 2)(\lambda - 4) \Rightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad y_H = a e^{2x} + b e^{4x}$$

- partik. řeš.

konstanty

1) odhad: $y_P = A e^x + x B e^{2x}$ $\qquad y_P' = A e^x + B e^{2x} + 2Bx e^{2x}$

za rámec homog. řeš.

$$y_P'' = A e^x + 4B e^{2x} + 4Bx e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad A e^x + 4B e^{2x}(1+x) - 6A e^x - 6B e^{2x}(1+2x) + 8A e^x + 8Bx e^{2x} = e^x + e^{2x}$$

$$(3A - 1) e^x - (2B + 1) e^{2x} = 0$$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$A = \frac{1}{3} \qquad B = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y = a e^{2x} + b e^{4x} + \frac{1}{3} e^x - \frac{1}{2} x e^{2x}}}$$

2) variace konst.

$$y_P = a(x) e^{2x} + b(x) e^{4x} \Rightarrow y_P' = 2a e^{2x} + 4b e^{4x} + \underbrace{a' e^{2x} + b' e^{4x}}_{\overset{!}{=} 0 \text{ chci}}$$

$\Downarrow$

$$y_P'' = 2a' e^{2x} + 4b' e^{4x} + 4a e^{2x} + 16b e^{4x}$$

$$\left.\begin{aligned} 2a' e^{2x} + 4b' e^{4x} &= e^x + e^{2x} \\ a' e^{2x} + b' e^{4x} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad a' = -b' e^{2x} \Rightarrow b' = \frac{1}{2}\left(e^{-3x} + e^{-2x}\right)$$

$\Downarrow$

$$a = \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{2} x \Leftarrow a' = -\frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{2} \Leftarrow b = -\frac{1}{6} e^{-3x} - \frac{1}{4} e^{-2x}$$

$$y_P = \left(\frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{2} x\right) e^{2x} + \left(-\frac{1}{6} e^{-3x} - \frac{1}{4} e^{-2x}\right) e^{4x}$$

$$\Rightarrow \quad y_P = \frac{1}{3} e^x - \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

Př. nalezněte obecné řešení ODR

$$y'' - 4y' + 4y = x^2 \qquad (*)$$

• homog. řeš.

$y = y_H + y_p$ $\qquad y = e^{\lambda x} \Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 0$

$$\Downarrow \qquad \lambda_{1,2} = 2$$

$$y_H = (a + xb)e^{2x}$$

• partikulární řeš.

1) odhad: $\quad y_p = Ax^2 + Bx + C$

$$y_p' = 2Ax + B \qquad y_p'' = 2A$$

dosaď do (*):

$$2A - 4(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

$$\to \quad 4A = 1$$
$$-2A + B = 0 \qquad \Rightarrow \quad y_p = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$$
$$A - 2B + 2C = 0$$

$$\| \underline{\underline{y}} = y_H + y_p = (a + bx)e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$$

2) variace konstant

$$y_p = (a(x) + b(x)x)e^{2x} \Rightarrow y_p' = \Big[2(a + xb) + \underbrace{a' + b'x}_{=0} + b\Big]e^{2x}$$

dodatečná podmínka

dosaď do (*) => rovnice: jediné nekrácené členy obsahují derivace a', b' neboť zbytek je jako homog. řeš.

$$y_p'' = \Big[4(a + xb) + 2b + 2(\underbrace{a' + b'x}_{0} + b) + b'\Big]e^{2x}$$

$$b' e^{2x} = x^2 \qquad \oplus \text{ podm. } \quad a' + b'x = 0$$

$$\Downarrow$$

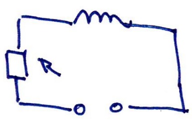
$$b = \int \underset{u'}{e^{-2x}} \underset{v}{x^2}\,dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \int \underset{u'}{e^{-2x}} \underset{v}{x} = e^{-2x}\left[-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right]$$

$u = -\frac{1}{2}e^{-2x} \quad v' = 2x \qquad u = -\frac{1}{2}e^{-2x} \quad v' = 1$

$$a = -\int x^3 e^{-2x} = \dots = \frac{1}{8}(4x^3 + 6x^2 + 6x + 3)e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad \| \underline{\underline{y_p}} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$$

Př. elektrický obvod RL (d)

L ... samoindukčnost

odpor  popsáno rcí: $U = RI + L\frac{dI}{dt}$

a) $U = U_0 = \text{konst}$

$0 = R + L\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{R}{L}$

$\Downarrow$

$I_H = C e^{-\frac{R}{L}t}$

vidíme: $I_p = \text{konst} = \frac{U_0}{R} \Rightarrow I = \frac{U_0}{R} + C e^{-\frac{R}{L}t}$

- poč. podm. v $t=0$: $I\big|_{t=0} = 0 \Rightarrow C = -\frac{U_0}{R}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{I = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}}$$

b) pro střídavé napětí: $U = U_0 \sin\omega t$

I_p hledáme ve tvaru: $A\sin\omega t + B\cos\omega t$

dosazení $\Rightarrow$
$$\begin{aligned} \omega A + R\frac{B}{L} &= 0 \\ -\omega B + R\frac{A}{L} &= \frac{U_0}{L} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{RU_0}{Z}, \quad B = -\frac{U_0 L\omega}{Z}$$

kde $Z = R^2 + \omega^2 L$

Př. přepis ODR na lin ODR s konst. koef.

a) $x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$ subs. $y = x^{-\frac{1}{2}} u(x) \Rightarrow u'' + u = 0$

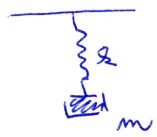
b) $(1-x^2) y'' - x y' + n y = 0$ subs. $x = \cos\varphi$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}$, $\quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{1}{-\sin\varphi}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{d\varphi^2}\underbrace{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2}_{\frac{1}{\sin^2\varphi}} + \frac{dy}{d\varphi}\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, $\quad \left(\frac{-1}{\sin\varphi}\right)_{,\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\sin^2\varphi}\cos\varphi\,\frac{-1}{\sin\varphi}$

$\Rightarrow \sin^2 x \left[y''_{\varphi\varphi} \frac{1}{\sin^2\varphi} - y' \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} \right] + \cos\varphi\, y' \frac{1}{\sin\varphi} + n y = 0 \Rightarrow y'' + n y = 0$

Př. Řešte ODR (lineární harmonický oscilátor s tlumením a budící silou)

$$\ddot{x} + \underbrace{2\gamma\dot{x}}_{\text{tlumení}} + \omega_0^2 x = \underbrace{a\sin\omega t}_{\text{budící síla}}$$



Pozn. LHO bez tlumení a vnější síly

$\Downarrow$

$m\ddot{x} = -kx$

$\Downarrow$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$, $\quad \frac{k}{m} = \omega^2$ ← úhlová freq.

- homogenní řešení

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \xRightarrow{x\sim e^{\lambda t}} \quad \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

← chci zkoumat případ $\omega_0 > \gamma$, který vede na zápornou $\sqrt{\ }$

tj. "komplexní exponenciály"

tj. "kmitání"

$$x_H = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

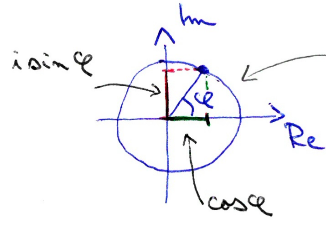
$$x_H = e^{-\gamma t}\left[C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t}\right]$$

dále označím $\Omega^2 \equiv \omega_0^2 - \gamma^2$

- Pozn.: komplexní exponenciála: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ $\iff$ φ určuje bod na jednotkové kružnici v komplexní rovině

↳ $e^{-i\varphi} = \cos\varphi \underbrace{- i\sin\varphi}_{= +i\sin(-\varphi)}$

ALE: $\cos\varphi$ ... sudá, $\sin\varphi$ ... lichá fce



inverse $\Rightarrow$ $\dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cos\varphi$ $\qquad$ $\dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \sin\varphi$

Př. Řešte ODR (LHO s tlumením a silou) - pokračování

- partikulární řešení ⇝ vhodně ⇝ $x_p = A \sin \omega t + B \cos \omega t$

konstanty

$$\Rightarrow \quad x_p' = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t$$

$$x_p'' = -A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t$$

⇝ dosazení do původní rce s netriviální pravou stranou ⊕ setřídění členů dle $\langle {\sin \atop \cos}$

$$\sin \omega t \left[-A\omega^2 + 2p(-B\omega) + \omega_0^2 A \right]$$
$$+ \cos \omega t \left[-B\omega^2 + 2pA\omega + \omega_0^2 B \right] = a \sin \omega t$$

⇒ musím určit A, B tak, aby si sinové a cosinové členy odpovídaly

- cos ⇒ $A = B(\omega^2 - \omega_0^2) \frac{1}{2p\omega}$
- sin ⇒ $-A(\omega^2 - \omega_0^2) - 2pB\omega = B \frac{-1}{2p\omega}(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - 2p\omega B = a$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{-a\,2p\omega}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4p^2\omega^2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{-a(\omega^2-\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4p^2\omega^2}$$

Nakonec: $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$