Teoretická mechanika

Princip extremální akce

prostor historií $\mathcal{H}$

funkcionál akce $S : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$

klasické řešení

$$\delta S[h] = 0 \qquad \text{při fixovaných okr. podm.}$$

časové rozštěpení

konfig. prostor M (souř. x^a)

historie = trajektorie $x(t)$ (v souř. $x^a(t)$)

Lagrangeovský formalismus

akce

$$S[x(t)] = \int L(x^a(t), \dot{x}^a(t))\, dt$$

lagrangián

$$L(x^a, v^a)$$

v^a – rychlosti (tečný vekt. k M)

x^a – polohy (bod v M)

Lagr. rov. 2. druhu $\Leftrightarrow \delta S = 0$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial v}(x, \dot{x})\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}) = 0$$

Hamiltonovský formalismus

fázový prostor $[x^a, p_a]$

p_a – hybnosti (1-forma na M)

x^a – polohy (bod v M)

pozorovatelná $F(x^a, p_a)$

kanonická struktura = Poissonovy závorky

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial x^a}\frac{\partial G}{\partial p_a} - \frac{\partial F}{\partial p_a}\frac{\partial G}{\partial x^a}$$

vývoj dán Hamiltoniánem $H(x^a, p_a)$

$$\dot{F} = \{F, H\}$$

$$\dot{x}^a = \{x^a, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_a}$$

$$\dot{p}_a = \{p_a, H\} = -\frac{\partial H}{\partial x^a}$$

Hamilt. kan. rovnice

Souvislost lagr. a hamilt. formalismů

nedegenerované systémy: 1-1 přiřazení

$$x, v \longleftrightarrow x, p \qquad \text{Legendreova transf.}$$

$$L \longleftrightarrow H$$

$$p = \mathfrak{p}(x, v) \qquad \text{kde} \quad \mathfrak{p}_a(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v^a}(x, v)$$

$$v = \mathfrak{v}(x, p) \qquad \text{kde} \quad \mathfrak{v}^a(x, p) = \frac{\partial H}{\partial p_a}(x, p)$$

$\mathfrak{p}(x, v)$ a $\mathfrak{v}(x, p)$ jsou inverzní

$$\mathfrak{p}(x, \mathfrak{v}(x, p)) = p \qquad \mathfrak{v}(x, \mathfrak{p}(x, v)) = v$$

$$H(x, p) = p_a \mathfrak{v}^a(x, p) - L(x, \mathfrak{v}(x, p))$$

$$L(x, v) = \mathfrak{p}_a(x, v) v^a - H(x, \mathfrak{p}(x, v))$$

Funkcionální prostory

Prostor fcí na M $\rightarrow$ $\mathcal{F}M$

$\varphi \in \mathcal{F}M$ $\quad \varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad x \rightarrow \varphi(x)$

tvoří vekt. prostor

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

$$(r\varphi)(x) = r\,\varphi(x)$$

$\varphi(x)$ lze chápat jako komponentu

$\varphi^x \equiv \varphi(x)$ (v δ-fci "bázi")

analogie konečné dimenzi

$\vec{a} \xrightarrow{\text{báze}} a^m$

zúžení s 1-formou

kon. dim

$\vec{a} \cdot \underset{\rightarrow}{\alpha} = \sum_m a^m \alpha_m$ $\qquad$ též $\langle \vec{a}, \underset{\rightarrow}{\alpha} \rangle$

funkc. prostor

$$\langle \varphi, \omega \rangle = \int \varphi^x \omega_x \, dx$$

- duální fce (hustoty)
- fce

} záleží na hladkosti - distribuce

báze

$$\varphi^x = \int \varphi^y \delta^x_y \, dy \qquad \delta^x_y \equiv \delta_y(x) \quad \delta\text{-fce v } y$$

Variace

konečná dim

prostor bodů/vektorů A $\qquad x, y, \dots$

směr $\vec{\Delta x}$ v prostoru A

f funkce na A

změna f ve směru $\vec{\Delta x}$

$$f(x_0 + \varepsilon \vec{\Delta x}) = f(x_0) + \varepsilon\, df(x_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$df(x_0) = \frac{d}{d\varepsilon} f(x_0 + \varepsilon \vec{\Delta x})\Big|_{\varepsilon=0} = \sum_a \frac{\partial f}{\partial x^a}(x_0)\, \Delta x^a$$

↑ parc. derivace f

∞ dimenze

prostor historií/polí/funkcí H $\qquad \varphi, \psi \dots$

směr $\delta\varphi$ v prostoru H

F funkcionál na H

změna F ve směru $\delta\varphi$

$$F(\varphi_0 + \varepsilon \delta\varphi) = F(\varphi_0) + \varepsilon\, \delta F(x_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

$$\delta F(\varphi_0) = \frac{d}{d\varepsilon} F(\varphi_0 + \varepsilon \delta\varphi)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_x \frac{\delta F}{\delta \varphi^x}\, \delta\varphi^x\, dx$$

↑ variace F

důležité: je potřeba přepis lineární v $\delta\varphi^x$ bez derivací (vyhnout se distrib. variaci)

$$\delta F = \int \frac{\delta F}{\delta \varphi^x}\, \delta\varphi^x\, dx$$

↑ tato se nederivuje podle x

Skalární pole z akce

$$S_{SP}[\varphi] = -\frac{1}{2c}\int \left(\nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi\, g^{\mu\nu} + M^2 \varphi^2\right) d^4\Omega$$

hledáme extrém akce při fixovaných poč. a konc. podmínkách

$\varphi \to \varphi + \delta\varphi$ rozvoj S do řádu $\delta\varphi$

$$\delta S[\varphi] = S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi]$$

$$= -\frac{1}{c}\int_\Omega \left(\nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \delta\varphi\, g^{\mu\nu} + M^2 \varphi\, \delta\varphi\right) d^4\Omega \quad + \delta S_{ostatní}$$

derivovaná variace per-partes pomocí Gaussovy věty

$$= -\frac{1}{c}\int_\Omega \left(\nabla_\nu ((\nabla^\nu\varphi)\delta\varphi) - (\nabla_\nu \nabla^\nu \varphi)\delta\varphi + M^2 \varphi\, \delta\varphi\right) d^4\Omega + \int_\Omega \frac{\delta S_{ostatní}}{\delta\varphi}\delta\varphi\, d^4\Omega$$

$$= -\frac{1}{c}\int_{\partial\Omega} (\nabla_\nu \varphi)\, \underbrace{\delta\varphi}_{=0 \text{ na hranici } \partial\Omega}\, n^\nu d^3V + \frac{1}{c}\int_\Omega \left(\nabla_\nu \nabla^\nu \varphi - M^2 \varphi\right)\delta\varphi\, d^4\Omega + \int_\Omega \frac{\delta S_{ost}}{\delta\varphi}\delta\varphi\, d^4\Omega$$

$$= \int_\Omega \frac{1}{c}\left(\nabla_\nu \nabla^\nu \varphi - M^2\varphi\right)\delta\varphi\, d^4\Omega + \int_\Omega \frac{\delta S_{ostatní}}{\delta\varphi}\delta\varphi\, d^4\Omega$$

$$\frac{\delta S_{SP}}{\delta\varphi} = \frac{1}{c}\left(\Box\varphi - M^2\varphi\right) \qquad \Box \equiv \nabla_\nu \nabla^\nu$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow \qquad \Box\varphi - M^2\varphi = j$$

Klein-Gordonova rovnice (s pravou stranou)

zdroj na pravé straně závisí na interakci s jinou hmotou

$$j = -c\,\frac{\delta S_{ostatní}}{\delta\varphi}$$

např. interakce s nekoherentním prachem

$$S_{SP\text{-}prach} = -\int \frac{1}{c}\epsilon_0 \varphi\, d^4\Omega \qquad \Rightarrow \qquad j = \epsilon_0$$

Lagrangeovský formalismus

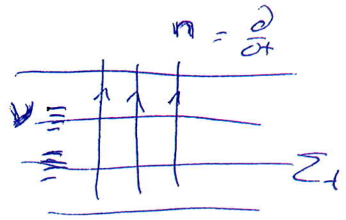
časové rozštěpení

$$\psi(x) \equiv \psi(t,x) \equiv \psi^x(t)$$

historie = trajektorie v prostoru funkcí ψ

tj. v prostoru prostorových polí $\psi \in \mathcal{F}\Sigma_t$

gradient



$$\nabla\psi = \nu\, \underset{c\,dt\,\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}}{n\cdot\nabla\psi} + \underset{dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}}{P\cdot\nabla\psi}$$

$$= \nu\,\frac{1}{c}\dot\psi + \vec\nabla\psi$$

∇ derivace na M

$\vec\nabla$ derivace na Σ_t

$n\cdot\nu = 1$

$n\cdot n = -1 \quad \nu\cdot\nu = -1$

$$(\nabla\psi)^2 = -\frac{1}{c^2}\dot\psi^2 + (\vec\nabla\psi)^2$$

akce

$$S[\psi(t)] = \iint_{I\subset\mathbb{R}\ \Sigma_t} \left(\frac{1}{2c^2}\dot\psi^2 - \frac{1}{2}(\vec\nabla\psi)^2 - \frac{1}{2}M^2\psi^2\right) dV\, dt$$

Lagrangián

$$L(\underset{\text{"poloha"}}{\psi}, \underset{\text{"rychlost"}}{\Theta}) = \int_\Sigma \Big(\underset{\text{kinetický člen}}{\frac{1}{2c^2}\Theta^2} - \underbrace{\frac{1}{2}(\vec\nabla\psi)^2 - \frac{1}{2}M^2\psi^2}_{\text{potenciál}}\Big)\, dV$$

$$S[\psi] = \int L(\psi,\dot\psi)\, dt$$

pohybové rovnice

$$\left(\frac{\delta L}{\delta \Theta}(\psi,\dot{\psi})\right)^{\cdot} - \frac{\delta L}{\delta \psi}(\psi,\dot{\psi}) = 0$$

variace Lagrange.

$\frac{\delta L}{\delta \Theta}$ první člen v rozvoji $L(\psi, \Theta + \varepsilon \delta\Theta)$

$$\delta L = \int_\Sigma \frac{1}{c^2}\Theta\, \delta\Theta \, dV \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta L}{\delta \Theta}(\psi,\Theta) = \frac{1}{c^2}\Theta$$

$\frac{\partial L}{\delta \psi}$ první člen v rozvoji $L(\psi + \varepsilon\delta\psi, \Theta)$

$$\delta L = \int_\Sigma \left(-\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\delta\psi - M^2\psi\,\delta\psi\right) dV$$

$$= -\int_\Sigma \underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\delta\psi\,\vec{\nabla}\psi)\, dV}_{=0} - \int_\Sigma \underbrace{(-\vec{\nabla}^2\psi + M^2\psi)}_{=\frac{\delta L}{\delta\psi}} dV$$

$$\frac{\delta L}{\delta \psi} = -\left[-\vec{\nabla}^2\psi + M^2\psi\right] + \frac{\delta L_{\text{ostatní}}}{\delta\psi}$$

pohyb. rovnice

$$\underbrace{-\frac{1}{c^2}\ddot{\psi} + \vec{\nabla}^2\psi}_{\Box\psi} - M^2\psi = \underbrace{-\frac{\delta L_{\text{ostatní}}}{\delta\psi}}_{j} \qquad \text{K-G rovnice}$$

$$\delta S = \int \frac{\delta S_{ost}}{\delta\psi}\delta\psi\, d\Omega = \int c\frac{\delta S_{ost}}{\delta\psi}\delta\psi\, dV dt = \int \delta L_{ost}\, dt = \iint \frac{\delta L_{ost}}{\delta\psi}\delta\psi\, dV dt$$

$$\Rightarrow j = -c\frac{\delta S_{ost}}{\delta\psi} = -\frac{\delta L_{ost}}{\delta\psi}$$

Hamiltonovský formalismus

hybnost a rychlost

$$\pi = \frac{\delta L}{\delta \dot\varphi} = \frac{1}{c^2}\dot\varphi \qquad \dot\varphi = c^2 \pi$$

Hamilt.

$$H(\varphi,\pi) = \int_\Sigma \dot\varphi(\varphi,\pi)\,\pi \, d\Omega - L(\varphi,\dot\varphi(\varphi,\pi))$$

$$= \int_\Sigma \left(c^2\pi^2 - \frac{1}{2}c^2\pi^2 + \frac{1}{2}\vec\nabla\varphi^2 + \frac{1}{2}M^2\varphi^2\right) dV$$

$$= \int \left(\frac{c^2}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\vec\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}M^2\varphi^2\right) dV$$

Hamilt. kan. rovnice

$$\dot\varphi = \frac{\delta H}{\delta \pi} = c^2\pi$$

$$\dot\pi = -\frac{\delta H}{\delta \varphi} = -(-\vec\nabla^2\varphi + M^2\varphi)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{c^2}\ddot\varphi - \vec\nabla^2\varphi + M^2\varphi = 0$$ (pouze SP, bez zdroje)

Poissonovy závorky

$$\{F, G\} = \int \left(\frac{\delta F}{\delta\varphi(z)}\frac{\delta G}{\delta\pi(z)} - \frac{\delta F}{\delta\pi(z)}\frac{\delta G}{\delta\varphi(z)}\right) dV$$

$$\dot F = \{F, H\}$$

$$\{\varphi^x, \pi_y\} = \delta^x_y \quad \Leftarrow \quad \frac{\delta\varphi^z}{\delta\varphi^x} = \delta^z_x \quad \frac{\delta\pi_z}{\delta\pi_y} = \delta^y_z$$