Elektromagnetické pole

$\boxed{c = 1}$

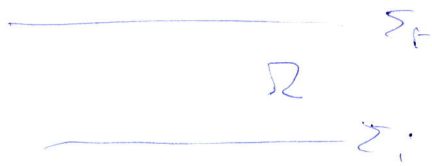
Kinematika a akce

Minkowského pr. M

$$g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

kovar. der. ∇

oblast $\Omega = \langle \Sigma_f, \Sigma_i \rangle$



vektorový 4-potenciál

$A_a(x)$ 1-forma na M

Maxwellův tenzor

$$F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a$$

akce

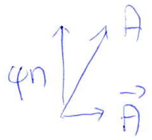
$$S_{EM}[A] = -\frac{\varepsilon_0}{4} \int F_{ab} F^{ab} \, d\Omega$$

Pozn: prostoročasové indexy latinka místo řeckých

Časové rozštěpení (3+1 rozštěpení)

sk. a vekt. potenciál

$$A_a = -\varphi\, n_a + \vec{A}_a$$



$\vec{t} = \frac{\partial}{\partial t}$ $n = dt$ $\vec{t}\cdot n = 1$

$n = -g\cdot\vec{t}$ $\nabla n = 0$

el. intenzita a mag. indukce

$$F_{ab} = \vec{E}_a n_b - n_a \vec{E}_b + \vec{B}^n \varepsilon_{nab} \qquad \varepsilon \text{ 3D Levi-Civita}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \dot{\vec{A}}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

důkaz

$$F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a \underset{\uparrow}{=} (n_a \dot{A}_b + \vec{\nabla}_a A_b) - (n_b \dot{A}_a + \vec{\nabla}_b A_a)$$

$\nabla = n\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}$

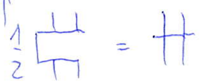
$A = -\varphi n + \vec{A}$

$$\overset{\downarrow}{=} n_a(-n_b\dot{\varphi} + \dot{\vec{A}}_b) + \vec{\nabla}_a(-n_b\varphi + \vec{A}_b) \quad - \quad (a\leftrightarrow b)$$

$$= n_a(\dot{\vec{A}}_b + \vec{\nabla}_b\varphi) - (\dot{\vec{A}}_a + \vec{\nabla}_a\varphi)\, n_b + \underbrace{\vec{\nabla}_a\vec{A}_b - \vec{\nabla}_b\vec{A}_a}_{\overleftrightarrow{B}_{ab}}$$

$$= -n_a\vec{E}_b + \vec{E}_a n_b + \overleftrightarrow{B}_{ab}$$

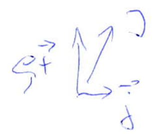
$$\overleftrightarrow{B}_{ab} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\varepsilon_{kab}\,\varepsilon^{kmn}\,\overleftrightarrow{B}_{mn} = \vec{B}^k \varepsilon_{kab} \qquad \vec{B}^k = \frac{1}{2}\varepsilon^{kmn} B_{mn}$$



$$\vec{B}^k = \frac{1}{2}\varepsilon^{kmn}(\vec{\nabla}_m\vec{A}_n - \vec{\nabla}_n\vec{A}_m) = \varepsilon^{kmn}\vec{\nabla}_m\vec{A}_n = (\vec{\nabla}\times\vec{A})^k$$

el. tok

$$J = \varrho\vec{t} + \vec{j}$$



Lagr. hustota

$$-\frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} = -\frac{1}{2}(\vec{E}_m n_n - n_m\vec{E}_n + \vec{B}^k\varepsilon_{kmn})(\vec{E}^m n^n + \vec{\nabla}^m\vec{A}^n)$$

$$= \frac{1}{2}(E^2 - B^2)$$

Princip extremální akce

variace ve směru δA_a

$$\delta S[A] = (S[A+\delta A] - S[A]) =$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_\Omega (\nabla_m \delta A_n - \nabla_n \delta A_m) F^{mn}\, d\Omega + \delta S_{ostatní}$$

$$= -\varepsilon_0 \int_\Omega (\nabla_m \delta A_n) F^{mn}\, d\Omega + \delta S_{ostatní}$$

$$= -\varepsilon_0 \int_\Omega \nabla_m (\underbrace{\delta A_n}_{\partial\Omega\, =0} F^{mn})\, d\Omega + \varepsilon_0 \int_\Omega \left[(\nabla_m F^{mn}) + \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\delta S_{ostatní}}{\delta A_n}\right] \delta A_n\, d\Omega$$

$$= \varepsilon_0 \int_\Omega \left[-\nabla_m F^{am} + \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\delta S_{ost}}{\delta A_a}\right] \delta A_a\, d\Omega$$

$$\frac{\delta S}{\delta A_a} = -\varepsilon_0 \nabla_m F^{am} + \frac{\delta S_{ost}}{\delta A_a}$$

$$\frac{\delta S}{\delta A_a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_m F^{am} = \frac{1}{\varepsilon_0} J^a$$

$$J^a = \frac{\delta S_{ostatní}}{\delta A_a}$$

$$F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a \Rightarrow \quad \nabla_{[a} F_{bc]} = 0$$

Lagrangeovský formalismus

$$S_{EM} = -\int_\Omega \frac{\varepsilon_0}{4} F_{ab} F^{ab} \, d\Omega =$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \int_{\Sigma_t} \frac{\varepsilon_0}{2} (E^2 - B^2) \, dV \, dt = \int_{t_i}^{t_f} L(\varphi, \vec{A}, \dot{\varphi}, \dot{\vec{A}}) \, dt$$

$$L_{EM}(\varphi, \vec{A}, \dot{\varphi}, \dot{\vec{A}}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_\Sigma (E^2 - B^2) \, dV$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$L_{EM}(\varphi, \vec{A}, \dot{\varphi}, \dot{\vec{A}})$$

↑ nezávisí na $\dot{\varphi}$!!!

hybnost:

$$\pi = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}} = 0 \qquad \text{vazba!}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{A}}} = -\varepsilon_0 \vec{E}$$

$\vec{E}$ je hybnost k $\vec{A}$ (až na konst. fakt.)

pohybové rovnice

$$\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{A}}}\right)^{\cdot} - \frac{\delta L}{\delta \vec{A}} = 0$$

$$\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}}\right)^{\cdot} - \frac{\delta L}{\partial \varphi} = 0$$

Lagr. zdrojů

$$L_{ostatní} = L_{ostatní}(\varphi, \vec{A})$$

⇓

$$\left(\frac{\delta L_{EM}}{\delta \dot{\vec{A}}}\right)^{\cdot} - \frac{\delta L_{EM}}{\delta \vec{A}} = \vec{j} \qquad \vec{j} = \frac{\delta L_{ostatní}}{\delta \vec{A}}$$

$$\left(\frac{\partial L_{EM}}{\delta \dot{\varphi}}\right)^{\cdot} - \frac{\delta L_{EM}}{\delta \varphi} = -\rho \qquad -\rho = \frac{\delta L_{ostatní}}{\delta \varphi}$$

Př: vnější zdroj

$$\delta S_{ext} = \int J_E^a \, \delta A_a \, d\Omega =$$

$$= \iint (\rho_E \vec{t} + \vec{j}_E) \cdot (-\delta\varphi\, n + \delta\vec{A}) \, dV \, dt$$

$$= \iint (-\rho_E \delta\varphi + \vec{j}_E \cdot \delta\vec{A}) \, dV \, dt$$

$$= \iint \left(\frac{\delta L_{ext}}{\delta \varphi} \delta\varphi + \frac{\delta L_{ext}}{\delta \vec{A}} \cdot \delta\vec{A}\right) dV \, dt$$

$$\Rightarrow -\rho_E = \frac{\delta L_{ext}}{\delta \varphi} \qquad \vec{j}_E = \frac{\delta L_{ext}}{\delta \vec{A}}$$

variace Lagrangiánu

$\delta\dot{\vec{A}}$ $\quad \delta L_{EM} = \varepsilon_0 \int \vec{E}\cdot(-\delta\dot{\vec{A}})\, dV \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta L}{\delta\dot{\vec{A}}} = -\varepsilon_0 \vec{E}$

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}}$

$\delta\vec{A}$ $\quad \delta L_{EM} = -\varepsilon_0 \int \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\delta\vec{A})\, dV =$

$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$= \varepsilon_0 \int \vec{\nabla}\cdot(\vec{B}\times\delta\vec{A})\, dV - \varepsilon_0 \int (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\delta\vec{A}\, dV$$

$\rightarrow \partial\Omega \quad \delta\vec{A} \overset{\partial\Omega}{=} 0$

$$\Rightarrow \frac{\delta L}{\delta\vec{A}} = -\varepsilon_0 \vec{\nabla}\times\vec{B}$$

$$\left(\frac{\delta L_{EM}}{\delta\dot{\vec{A}}}\right)^{\cdot} - \frac{\delta L_{EM}}{\delta\vec{A}} = \vec{j}$$

$\Downarrow$

$$-\dot{\vec{E}} + \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{j}$$

$\delta\dot{\varphi}$ $\quad$ triviální $\quad \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}} = 0$

$\delta\varphi$ $\quad \delta L_{EM} = -\varepsilon_0 \int \vec{E}\cdot\vec{\nabla}\delta\varphi\, dV = -\varepsilon_0 \int \vec{\nabla}\cdot(\delta\varphi\vec{E})\, dV + \varepsilon_0 \int (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\delta\varphi\, dV$

$$\Rightarrow \frac{\delta L}{\delta\varphi} = \varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

$$-\left(\frac{\delta L_{EM}}{\delta\dot{\varphi}}\right)^{\cdot} + \frac{\delta L}{\delta\varphi} = \rho$$

$\Downarrow$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \text{nazdar!}$$

potenciálové rovnice

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

Hamiltonovský formalismus pro EM pole

již jsme odvodili:

Lagrangián

$$L(\varphi, \vec{A}, \dot{\varphi}, \dot{\vec{A}}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_\Sigma (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)\, dV + \int_\Sigma (-\varrho_E \varphi + \vec{j}_E \cdot \vec{A})\, dV$$

kde $\vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla}\varphi \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \dot{\varrho}_E + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_E = 0$

zde uvažujeme jako příklad L_{ext} zadaný vnější zdroj $J_E^\alpha = \begin{bmatrix} \varrho_E \\ \vec{j}_E \end{bmatrix}$

hybnosti

$$\vec{\Pi} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{A}}} = -\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla}\varphi)$$

$$K = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}} = 0 \qquad \text{vazba!}$$

vazba má polní charakter: $\varphi(x)$ je pole $\Rightarrow$ $K(x)$ je pole

$$K(x) = 0 \qquad \forall x \in \Sigma$$

zhlazená vazba – pro libovolnou testovací fci $\nu(x)$ na Σ máme

$$K_\nu = 0 \qquad \text{kde } K_\nu = \int_\Sigma \nu K\, dV \qquad \nu(x) \text{ fce na } \Sigma$$

fázový prostor

$\varphi, K, \vec{A}, \vec{\Pi}$ (vše polní veličiny na Σ)

$$\{F, G\} = \int \left(\frac{\delta F}{\delta \varphi} \frac{\delta G}{\delta K} - \frac{\delta F}{\delta K} \frac{\delta G}{\delta \varphi} + \frac{\delta F}{\delta \vec{A}} \cdot \frac{\delta G}{\delta \vec{\Pi}} - \frac{\delta F}{\delta \vec{\Pi}} \cdot \frac{\delta G}{\delta \vec{A}} \right) dV$$

inverze rychlosti

$$\dot{\vec{A}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\Pi} - \vec{\nabla}\varphi$$

$\dot{\varphi} = \lambda$ nelze invertovat $K = 0$
mutno zadat $\dot{\varphi}$ explicitně jako zvolenou fci λ

degenerovaný Lagrangián (existence vazeb) $\Rightarrow$
nelze rychlosti pomocí hybnosti
neurčené rychlosti je nutno zvolit uměle

Hamiltonián

$$H_\lambda = \int_\Sigma \left(\dot\varphi K + \dot{\vec A}\cdot\vec\Pi \right) dV - L(\varphi,\dot\varphi,\vec A,\dot{\vec A})$$

kde $\dot\varphi$ a $\dot{\vec A}$ se vyjádří pomocí hybností
a v případě degenerovaného Lagrangiánu pomocí
zvolených komponent rychlosti, které nejsou dány hybností
tato volba ($f$ce λ) vstupuje do Hamilt. jako parametr

$$= \int_\Sigma \left(\lambda K + \left(\frac{1}{\varepsilon_0}\vec\Pi - \vec\nabla\varphi\right)\cdot\vec\Pi - \frac{1}{2\varepsilon_0}\vec\Pi^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}\vec B^2 + \varrho_E\varphi - \vec j_E\cdot\vec A \right) dV$$

$$= \int_\Sigma \left(\frac{1}{2\varepsilon_0}\vec\Pi^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}\vec B^2 - \vec j_E\cdot\vec A + \varphi\left(\vec\nabla\cdot\vec\Pi + \varrho_E\right) + \lambda K \right) dV$$

použito per-partes s Gaussovou větou

variace Hamiltoniánu

$$\frac{\delta H_\lambda}{\delta\varphi} = \vec\nabla\cdot\vec\Pi + \varrho_E \qquad \frac{\delta H_\lambda}{\delta\vec A} = \varepsilon_0(\vec\nabla\times\vec B) - \vec j_E$$

← viz výpočet $\frac{\delta L}{\delta\vec A}$

$$\frac{\delta H_\lambda}{\delta K} = \lambda \qquad \frac{\delta H_\lambda}{\delta\vec\Pi} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec\Pi - \vec\nabla\varphi$$

časový vývoj

F pozorovatelná – funkce na fázovém prostoru

$$F[\underbrace{\varphi, K, \vec A, \vec\Pi}_{\text{závislost na fázovém prostoru}}; t]$$

závislost na fázovém prostoru

explicitní závislost na čase
(samotný předpis pro F se mění v čase)

$$\dot F = \{F, H_\lambda\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

změna díky vývoje ve fázovém prostoru

změna díky změně předpisu pro pozorovatelnou F

Zachování vazeb

vazby $K_\nu = 0$ musejí platit ve všech časech
tj. vazby se nesmějí v čase měnit

$$\dot{K}_\nu = \{K_\nu, H_\lambda\} + \frac{\partial K_\nu}{\partial t}$$

explicitní závislost na čase

$$K_\nu = \int \nu K \, dV$$

souř. ve fázovém prostoru

zadaná funkce – může záviset explicitně na čase

$$\frac{\partial K_\nu}{\partial t} = \int \frac{\partial \nu}{\partial t} K \, dV = K_{\dot\nu}$$

opět vazba s testovací fcí $\dot\nu$

závislost na vývoji ve fáz. pr.

$$\{K_\nu, H_\lambda\} \underset{K_\nu \text{ závisí jen na } K}{=} -\int_\Sigma \frac{\delta K_\nu}{\delta K}\frac{\delta H_\lambda}{\delta \varphi} dV = -\int_\Sigma \lambda(\vec\nabla\cdot\vec\Pi + \varrho_E)\,dV \overset{\text{def}}{=} G_\lambda$$

požadavek zachování vazeb $\dot K_\nu = 0$ dává

$$G_\lambda + K_{\dot\nu} = 0$$

zde jsme definovali novou Gaussovu vazbu

$$G = -(\vec\nabla\cdot\vec\Pi + \varrho_E) \qquad G_\nu = \int_\Sigma \nu G \, dV = -\int_\Sigma \nu(\vec\nabla\cdot\vec\Pi + \varrho_E)\,dV = \int_\Sigma (\vec\Pi\cdot\vec\nabla\nu - \varrho_E)\,dV$$

tato vazba se musí též zachovávat

$$\dot G_\nu = \{G_\nu, H_\lambda\} + \frac{\partial G_\nu}{\partial t} = \underbrace{-\int_\Sigma \frac{\delta G_\nu}{\delta \vec\Pi}\cdot\frac{\delta H_\lambda}{\delta \vec A} dV}_{\{G_\nu, H_\lambda\}} \underbrace{- \int_\Sigma \nu \dot\varrho_E \, dV - \int_\Sigma \dot\nu(\vec\nabla\cdot\vec\Pi + \varrho_E)\,dV}_{\frac{\partial G_\nu}{\partial t}}$$

$$= -\int \left[\vec\nabla\nu\cdot(\varepsilon_0 \vec\nabla\times\vec B - \vec j_E) + \nu\dot\varrho_E\right] dV + G_{\dot\nu}$$

$$= \int \nu\Big(\varepsilon_0 \underbrace{\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec B)}_{0} - \underbrace{(\dot\varrho_E + \vec\nabla\cdot\vec j_E)}_{0 \text{ – předpoklad o vnějších zdrojích}}\Big)\,dV + G_{\dot\nu}$$

$= 0$ na vazbách

nedostáváme další vazbu

Shrnutí:

Hamiltonián

$$H_\lambda(\varphi, k, \vec{A}, \vec{\Pi}) = \int_\Sigma \left(\frac{1}{2\varepsilon_0}\vec{\Pi}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{B}^2 - \vec{j}_E \cdot \vec{A} \right) dV - G_\varphi + K_\lambda$$

vazby:

$$G_\nu = -\int_\Sigma \nu \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi} + \varrho_E \right) dV = \int_\Sigma \left(\vec{\Pi}\cdot\vec{\nabla}\nu - \varrho_E \right) dV \qquad G_\nu = 0$$

$$K_\nu = \int_\Sigma \nu k \, dV \qquad K_\nu = 0$$

algebra vazeb

$$\{K_\mu, K_\nu\} = 0 \qquad \{G_\mu, G_\nu\} = 0 \qquad \{K_\mu, G_\nu\} = 0$$

Hamiltonovy kanonické rovnice

$$\dot{\varphi} = \frac{\delta H_\lambda}{\delta k} = \lambda \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{\varphi} = \lambda$$

$$\dot{k} = -\frac{\delta H_\lambda}{\delta \varphi} = G \qquad \Leftrightarrow \qquad k = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho_E$$

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\delta H_\lambda}{\delta \vec{\Pi}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\Pi} - \vec{\nabla}\varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla}\varphi$$

$$\dot{\vec{\Pi}} = -\frac{\delta H_\lambda}{\delta \vec{A}} = -\varepsilon_0(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{j}_E \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \dot{\vec{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{j}_E$$

definice $\vec{B}$: $\quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

Částečná redukce fázového prostoru

proměnné φ, κ lze jednoduše eliminovat

$\dot{\varphi} = \lambda$ → umožňuje zvolit φ libovolně

$\kappa = 0$ → fixuje hodnotu κ jednoznačně

redukovaný fázový prostor

$\vec{A}, \vec{\Pi}$ $\quad \{F, G\} = \int_\Sigma \left(\frac{\delta F}{\delta \vec{A}} \cdot \frac{\delta G}{\delta \vec{\Pi}} - \frac{\delta F}{\delta \vec{\Pi}} \cdot \frac{\delta G}{\delta \vec{A}} \right) dV$

$$H_\varphi(\vec{A}, \vec{\Pi}) = \int_\Sigma \left(\frac{1}{2\varepsilon_0} \vec{\Pi}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{B}^2 - \vec{j}_E \cdot \vec{A} \right) dV - G_\varphi$$

φ volně zvolitelný parametr

Význam vazeb

vazby generují kalibrační symetrii

Gaussova vazba G_ν generuje v jednom čase

přesně kalibrační změnu vekt. potenciálu

$$\delta \vec{A} = \{\vec{A}, G_\nu\} = \frac{\delta G_\nu}{\delta \vec{\Pi}} = \vec{\nabla} \nu$$

$\vec{A} \to \vec{A} + \delta \vec{A} = \vec{A} + \vec{\nabla} \nu$ $\quad$ kalibrační transformace

$$\delta \vec{\Pi} = \{\vec{\Pi}, G_\nu\} = -\frac{\delta G_\nu}{\delta \vec{A}} = 0$$

$\vec{\Pi} \to \vec{\Pi}$ $\quad$ $\vec{\Pi} \propto \vec{E}$ se nemění