Doplněk - integrál imaginární exponenciály jako delta distribuce

(Otakar Svítek, ÚTF MFF UK)

Motivace

- v Kvantové mechanice se často setkáte s odvozeními typu:

$$\langle x|x'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x|p\rangle\langle p|x'\rangle \,\mathrm{d}p = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x-x')p}\,\mathrm{d}p = \delta(x-x')$$

  přičemž $\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\frac{i}{\hbar}xp}$ je vlastní funkce operátoru hybnosti vyjádřená v x-reprezentaci

- Ekvivalentně pomocí vlnového čísla ($p = \hbar k$)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-x')k}\,\mathrm{d}k = \delta(x-x')$$

Fourierova transformace - naznačení

- **Fourierovy řady** jako zobrazení $L^2(-P,P) \longleftrightarrow \ell^2$

$$c_n = \frac{1}{2P}\int_{-P}^{P} f(x)e^{-i\frac{\pi n x}{P}}\mathrm{d}x \qquad F(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi n x}{P}}$$

- zavedeme $k[n] = n\pi/P$, $\Delta k = \pi/P$, $c_n = C(k[n])$ a můžeme provést limitu $P \to \infty (\Delta k \to 0)$

$$\frac{1}{2P}F(f) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik[n]x}\Delta k \quad \xrightarrow{P\to\infty} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(k)e^{ikx}\mathrm{d}k$$

- **Fourierova transformace** jako zobrazení $\mathcal{S} \longleftrightarrow \mathcal{S}$ (rych. kles. C^∞)

$$\mathcal{F}[f](k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \qquad \mathcal{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{ikx}\mathrm{d}k$$

- **Fourierova transformace distribucí** $\mathcal{S}' \longleftrightarrow \mathcal{S}'$ (temperované dist.)
  $\forall\ T \in \mathcal{S}',\ \phi \in \mathcal{S}$

$$\langle \mathcal{F}[T], \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\phi] \rangle$$

- POZOR: na levé straně působí distribuce na testovací funkci v proměnné k, ale na pravé v x — korektní, protože výsledkem působení je číslo
-

$$\langle \mathcal{F}[\delta], \phi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}[\phi] \rangle = \left\langle \delta, \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-ikx} \mathrm{d}x \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \mathrm{d}x = \langle 1, \phi \rangle$$

$$\mathcal{F}[\delta] \overset{\mathcal{S}'}{=} 1$$

$$\mathcal{F}^{-1}[1] \overset{\mathcal{S}'}{=} \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \mathrm{d}k \overset{\mathcal{S}'}{=} \delta(x)$$

Explicitnější výpočet

Jak ukázat $\mathcal{I} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\mathrm{d}k \overset{\mathcal{S}'}{=} \delta(x)$? Integrál nekonverguje. Definujme

$$\mathcal{I}_P = \frac{1}{2\pi}\int_{-P}^{P} e^{ikx}\mathrm{d}k = \frac{\sin Px}{\pi x}$$

Pak je

$$\mathcal{I} = \lim_{P\to\infty} \mathcal{I}_P$$

$$\langle \mathcal{I}, \phi\rangle = \lim_{P\to\infty}\left\langle \frac{\sin Px}{\pi x}, \phi\right\rangle = \lim_{P\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Px}{\pi x}\phi(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{P\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y}{\pi y}\phi(y/P)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y}{\pi y}\phi(0)\mathrm{d}y = \phi(0) = \langle \delta, \phi\rangle$$

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\mathrm{d}k \overset{\mathcal{S}'}{=} \delta(x)$$