Distribuce v $\mathbb{R}^3(\mathbb{E}^3)$

Otakar Svítek, ÚTF MFF UK

1. Zobecnění pojmu distribuce
2. Příklady distribucí v $\mathbb{R}^n$
3. Příklady distribucí v $\mathbb{E}^3$
4. Příklady manipulací s distribucemi

Podrobnější poznámky:
http://utf.mff.cuni.cz/vyuka/TMF029/distribuce/distribuce3D.pdf

Zobecnění pojmu distribuce

- V následujícím se soustředíme na distribuce v $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{E}^3$), ale zobecnění pojmu provedeme širší
- Pokud uvažujeme $\mathbb{R}^n$ nebo obecně diferencovatelnou varietu, máme k dispozici jako testovací objekty nejen funkce, ale přirozeně také např. vektory a obecně tenzory
- Máme k dispozici různé typy prostorů testovacích objektů s ohledem na asymptotické chování (pokles v nekonečnu např. Schwartzův prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ hladkých dostatečně rychle klesajících funkcí

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \left| \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\, D^{\boldsymbol{\beta}}\, \phi(\boldsymbol{x}) \right| < \infty$$

- Pro obecnou zakřivenou varietu je těžké zkoumat rychlost poklesu nebo není jasný pojem nekonečna, pak jsou použity automaticky testovací objekty s kompaktním nosičem (naše volba v následujícím)

- $\mathcal{D}^l_k(\mathbb{R}^n)$ je prostor testovacích tenzorových polí typu (l, k) (tedy l-krát kontravariantních a k-krát kovariantních) s kompaktním nosičem

$$\phi \in \mathcal{D}^l_k \quad \Rightarrow \quad \phi : \underbrace{\mathbb{V} \times \cdots}_{k} \times \underbrace{\mathbb{V}^* \times \cdots}_{l} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- $\mathcal{D}'^k_l$ je pak prostor tenzorových distribucí typu (k, l) — spojitých lineárních funkcionálů na testovacích tenzorových polích

$$\boldsymbol{T} \in \mathcal{D}'^k_l \quad \boldsymbol{T} : \phi \in \mathcal{D}^l_k \to \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{T}(\phi) = \langle \boldsymbol{T}; \phi \rangle = \langle \boldsymbol{T}^{k_1 \cdots}_{l_1 \cdots}, \phi^{l_1 \cdots}_{k_1 \cdots} \rangle \in \mathbb{R}$$

- regulární distribuce pro lokálně integrabilní tenzorové pole $\boldsymbol{f}$ typu (l, k) a uvažujeme Lebesgueův integrál

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{f}}(\phi) = \langle \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{f}}; \phi \rangle = \int \boldsymbol{f}^{k_1 \cdots}_{l_1 \cdots} \, \phi^{l_1 \cdots}_{k_1 \cdots} \, \mathrm{d}V \quad \in \mathbb{R}$$

Příklady distribucí v $\mathbb{R}^n$

- skalární distribuce δ v bodě $\boldsymbol{x}_0$: $\langle \delta_{\boldsymbol{x}_0}, \phi \rangle = \phi(\boldsymbol{x}_0)$
- charakteristická funkce oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\chi_\Omega = \begin{cases} 1 & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \\ 0 & \forall \boldsymbol{x} \notin \Omega \end{cases} \qquad \langle T_{\chi_\Omega}, \phi \rangle = \int_\Omega \phi \,\mathrm{d}V$$

- Gradient tenzorové distribuce

$$\langle \nabla_a \boldsymbol{T}^{k_1\cdots}_{l_1\cdots}, \phi^{al_1\cdots}_{k_1\cdots} \rangle = -\langle \boldsymbol{T}^{k_1\cdots}_{l_1\cdots}, \nabla_a \phi^{al_1\cdots}_{k_1\cdots} \rangle$$

motivace znovu regulárními distribucemi

$$\begin{aligned} \langle \nabla \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{f}}; \boldsymbol{\phi} \rangle &= \int \nabla_a \boldsymbol{f}^{k_1\cdots}_{l_1\cdots}\, \phi^{al_1\cdots}_{k_1\cdots} \,\mathrm{d}V = \\ &= \underbrace{\int \nabla_a \left(\boldsymbol{f}^{k_1\cdots}_{l_1\cdots}\, \phi^{al_1\cdots}_{k_1\cdots} \right) \mathrm{d}V}_{\oint_{\partial V} = 0 \text{ z kompaktnosti } \boldsymbol{\phi}} - \underbrace{\int \boldsymbol{f}^{k_1\cdots}_{l_1\cdots}\, \nabla_a \phi^{al_1\cdots}_{k_1\cdots} \,\mathrm{d}V}_{\langle \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{f}}; \nabla\cdot \boldsymbol{\phi} \rangle} \end{aligned}$$

Příklady distribucí v $\mathbb{E}^3$

- Gradient skalární distribuce $T \in \mathcal{D}'^0_0$ působící na $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}^1_0$

$$\langle \nabla T; \boldsymbol{\phi} \rangle = -\langle T, \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} \rangle$$

- Divergence vektorové distribuce $\boldsymbol{T} \in \mathcal{D}'^1_0$ působící na $\phi \in \mathcal{D}^0_0$

$$\langle \nabla \cdot \boldsymbol{T}, \phi \rangle = -\langle \boldsymbol{T}; \nabla \phi \rangle$$

analogií s $\quad \phi \nabla \cdot \boldsymbol{V} = \nabla \cdot (\boldsymbol{V} \phi) - \boldsymbol{V} \cdot \nabla \phi$

- Rotace vektorové distribuce $\boldsymbol{T} \in \mathcal{D}'^1_0$ působící na $\phi \in \mathcal{D}^1_0$

$$\langle \nabla \times \boldsymbol{T}; \boldsymbol{\phi} \rangle = \langle \boldsymbol{T}; \nabla \times \boldsymbol{\phi} \rangle$$

analogií s $\quad \nabla \cdot (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\phi}) = \phi \cdot (\nabla \times \boldsymbol{V}) - \boldsymbol{V} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\phi})$

- Plošné distribuce pro plochu Σ
  1. Skalární distribuce δ_Σ

$$\langle \delta_\Sigma, \phi \rangle = \int_\Sigma \phi \, \mathrm{d}S$$

  2. Vektorová distribuce $\boldsymbol{\delta}_\Sigma$

$$\langle \boldsymbol{\delta}_\Sigma ; \boldsymbol{\phi} \rangle = \int_\Sigma \boldsymbol{\phi} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Vztah pomocí normály $\boldsymbol{n}$: $\quad \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S$

$$\langle \boldsymbol{\delta}_\Sigma ; \boldsymbol{\phi} \rangle = \int_\Sigma \boldsymbol{\phi} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_\Sigma \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \langle \delta_\Sigma, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\phi} \rangle = \langle \boldsymbol{n}\delta_\Sigma ; \boldsymbol{\phi} \rangle$$

tedy $\quad \boldsymbol{\delta}_\Sigma \overset{\mathcal{D}'}{=} \boldsymbol{n}\delta_\Sigma \quad$ a podobně $\quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\delta}_\Sigma \overset{\mathcal{D}'}{=} \delta_\Sigma$

- Křivkové distribuce pro křivku γ
  1. Skalární distribuce δ_γ

$$\langle \delta_\gamma, \phi \rangle = \int_\gamma \phi \, \mathrm{d}\ell$$

  2. Vektorová distribuce $\boldsymbol{\delta}_\gamma$

$$\langle \boldsymbol{\delta}_\gamma ; \boldsymbol{\phi} \rangle = \int_\gamma \boldsymbol{\phi} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

Vztah pomocí tečny $\boldsymbol{t}$: $\quad \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{t} \, \mathrm{d}\ell$

$$\langle \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\delta}_\gamma, \phi \rangle = \langle \boldsymbol{\delta}_\gamma ; \boldsymbol{t}\phi \rangle = \int_\gamma \phi \boldsymbol{t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_\gamma \phi \, \mathrm{d}\ell = \langle \delta_\gamma, \phi \rangle$$

tedy $\quad \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\delta}_\gamma \overset{\mathcal{D}'}{=} \delta_\gamma \quad$ a podobně $\quad \boldsymbol{\delta}_\gamma \overset{\mathcal{D}'}{=} \boldsymbol{t}\delta_\gamma$

- Aplikace integrálních vět
  1. Gaussova ($\boldsymbol{n}$ je vnější normála)

$$-\langle \nabla\chi_\Omega;\boldsymbol{\phi}\rangle = \langle \chi_\Omega, \nabla\cdot\boldsymbol{\phi}\rangle = \int_\Omega (\nabla\cdot\boldsymbol{\phi})\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\phi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \langle \boldsymbol{\delta}_{\partial\Omega};\boldsymbol{\phi}\rangle$$

tedy $-\nabla\chi_\Omega \overset{\mathcal{D}'}{=} \boldsymbol{\delta}_{\partial\Omega}$ a podobně $-\boldsymbol{n}\cdot\nabla\chi_\Omega \overset{\mathcal{D}'}{=} \delta_{\partial\Omega}$

  2. Stokesova (tečna $\boldsymbol{t}$ orientovaná konzistentně se Σ)

$$\langle \nabla\times\boldsymbol{\delta}_\Sigma;\boldsymbol{\phi}\rangle = \langle \boldsymbol{\delta}_\Sigma;\nabla\times\boldsymbol{\phi}\rangle = \int_\Sigma (\nabla\times\boldsymbol{\phi})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{\partial\Sigma} \boldsymbol{\phi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \langle \boldsymbol{\delta}_{\partial\Sigma};\boldsymbol{\phi}\rangle$$

tedy $\nabla\times\boldsymbol{\delta}_\Sigma \overset{\mathcal{D}'}{=} \boldsymbol{\delta}_{\partial\Sigma}$ a podobně $\boldsymbol{t}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\delta}_\Sigma) \overset{\mathcal{D}'}{=} \delta_{\partial\Sigma}$

  3. Newtonův vzorec pro křivku $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^3$

$$\langle -\nabla\cdot\boldsymbol{\delta}_\gamma,\phi\rangle = \langle \boldsymbol{\delta}_\gamma;\nabla\phi\rangle = \int_\gamma \nabla\phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_\gamma \boldsymbol{t}\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}\ell = \phi(\gamma(1))-\phi(\gamma(0))$$

tedy $-\nabla\cdot\boldsymbol{\delta}_\gamma \overset{\mathcal{D}'}{=} \delta_{\gamma(1)} - \delta_{\gamma(0)}$

Hraniční operátory $-\nabla$, $\nabla\times$, $-\nabla\cdot$ $\quad(\nabla\times\nabla = 0 \Rightarrow \partial\partial = 0)$

Příklady manipulací s distribucemi

Plošná distribuce δ v souřadnicích

- máme dánu funkci $y : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- oblast Ω je vymezena implicitně pomocí $y(\boldsymbol{x}) > 0$, tedy

$$\chi_\Omega = \Theta(y)$$

- hranice $\partial\Omega$ je dána implicitní rovnicí $y(\boldsymbol{x}) = 0$

$$\boldsymbol{\delta}_{\partial\Omega} = -\nabla_{\boldsymbol{x}} \chi_\Omega = -\nabla_{\boldsymbol{x}}(y(\boldsymbol{x}))\,\delta(y)$$

- předpokládáme nenulovou normálovou derivaci na hranici $\frac{\partial y}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} \neq 0$

$$\delta_{\partial\Omega} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\partial\Omega} = -\boldsymbol{n} \cdot \nabla \chi_\Omega = -\boldsymbol{n} \cdot \nabla(y)\,\delta(y) = -\frac{\partial y}{\partial n}\,\delta(y)$$

Skládání bodových distribucí

- pro plošné distribuce

$$\delta_\Sigma = \int_{\boldsymbol{z}\in\Sigma} \delta_{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}S \qquad\qquad \boldsymbol{\delta}_\Sigma = \int_{\boldsymbol{z}\in\Sigma} \delta_{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

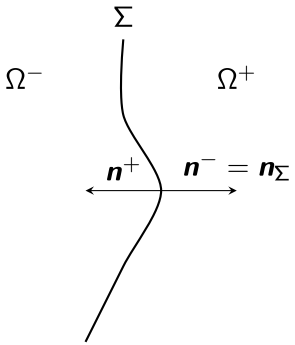
- pro křivkové distribuce

$$\delta_\gamma = \int_{\boldsymbol{z}\in\gamma} \delta_{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}\ell \qquad\qquad \boldsymbol{\delta}_\gamma = \int_{\boldsymbol{z}\in\gamma} \delta_{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

Příklad působení (použijeme $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$):

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_{\boldsymbol{z}\in\Sigma} \delta_{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}; \boldsymbol{\phi} \right\rangle &= \int_{\boldsymbol{z}\in\Sigma} \langle \boldsymbol{n}\,\delta_{\boldsymbol{z}}; \boldsymbol{\phi}\rangle\,\mathrm{d}S = \int_{\boldsymbol{z}\in\Sigma} \langle \delta_{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\phi}\rangle\,\mathrm{d}S = \\
&= \int_{\boldsymbol{z}\in\Sigma} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}S = \int_{\boldsymbol{z}\in\Sigma} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{z})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \langle \boldsymbol{\delta}_\Sigma; \boldsymbol{\phi}\rangle
\end{aligned}$$

Derivace funkce hladké všude kromě plochy Σ



- rozdělme $\mathbb{E}^3$ na dvě disjuktní oblasti $\Omega^\pm$ se společnou hranicí Σ

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^3 &= \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Sigma \\ \partial\Omega^\pm &= \mp\Sigma \end{aligned}$$

  a normálami $\quad \boldsymbol{n}_\Sigma = \mp\, \boldsymbol{n}^\pm$

- mějme funkci f a vektorové pole $\boldsymbol{F}$ hladké mimo Σ a hladké $f_\pm$ a $\boldsymbol{F}_\pm$ splňující

$$\begin{aligned} f &= \chi_+ f_+ + \chi_- f_- \\ \boldsymbol{F} &= \chi_+ \boldsymbol{F}_+ + \chi_- \boldsymbol{F}_- \end{aligned}$$

  kde $\chi_\pm = \chi_{\Omega^\pm}$

- skoky na Σ: $[f] = (f_+ - f_-)|_\Sigma$, $[\boldsymbol{F}] = (\boldsymbol{F}_+ - \boldsymbol{F}_-)|_\Sigma$
- pak lze psát

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \chi_+ \nabla f_+ + \chi_- \nabla f_- + [f]\,\boldsymbol{\delta}_\Sigma \\
\nabla \cdot \boldsymbol{F} &= \chi_+ \nabla \cdot \boldsymbol{F}_+ + \chi_- \nabla \cdot \boldsymbol{F}_- + [\boldsymbol{F}] \cdot \boldsymbol{\delta}_\Sigma \\
\nabla \times \boldsymbol{F} &= \chi_+ \nabla \times \boldsymbol{F}_+ + \chi_- \nabla \times \boldsymbol{F}_- - [\boldsymbol{F}] \times \boldsymbol{\delta}_\Sigma
\end{aligned}$$

- ukázka výpočtu pro $\boldsymbol{F} = \chi_+ \boldsymbol{F}_+ + \chi_- \boldsymbol{F}_-$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{F} &= \chi_+ \nabla \times \boldsymbol{F}_+ + \chi_- \nabla \times \boldsymbol{F}_- + \nabla \chi_+ \times \boldsymbol{F}_+ + \nabla \chi_- \times \boldsymbol{F}_- = \\
&= \chi_+ \nabla \times \boldsymbol{F}_+ + \chi_- \nabla \times \boldsymbol{F}_- - \delta_\Sigma \boldsymbol{n}^+ \times \boldsymbol{F}_+ - \delta_\Sigma \boldsymbol{n}^- \times \boldsymbol{F}_- = \\
&= \chi_+ \nabla \times \boldsymbol{F}_+ + \chi_- \nabla \times \boldsymbol{F}_- + \boldsymbol{F}_+ \times \boldsymbol{n}^+ \delta_\Sigma + \boldsymbol{F}_- \times \boldsymbol{n}^- \delta_\Sigma = \\
&= \chi_+ \nabla \times \boldsymbol{F}_+ + \chi_- \nabla \times \boldsymbol{F}_- + (\boldsymbol{F}_- - \boldsymbol{F}_+) \times \boldsymbol{n}_\Sigma \delta_\Sigma = \\
&= \chi_+ \nabla \times \boldsymbol{F}_+ + \chi_- \nabla \times \boldsymbol{F}_- - (\boldsymbol{F}_+ - \boldsymbol{F}_-)|_\Sigma \times \boldsymbol{\delta}_\Sigma
\end{aligned}$$