Aplikace distribucí a Greenových funkcí

Otakar Svítek, ÚTF MFF UK

1. Popis zdrojů v elektrostatice a magnetostatice
2. Plošné zdroje a hraniční podmínky
3. Greenovy funkce ve více dimenzích

Podrobnější poznámky:
http://utf.mff.cuni.cz/vyuka/TMF029/distribuce/distribuce3D.pdf

Popis zdrojů v elektrostatice a magnetostatice

- Objemová hustota bodového náboje q v místě $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{E}^3$ $(\mathbb{R}^n)$

$$\rho_{\mathrm{mon}} \stackrel{\mathcal{D}'}{=} q\,\delta_{\boldsymbol{x}_0}$$

- Lineární rozložení náboje na křivce γ s (proměnnou) lineární hustotou λ

$$\rho_{1\mathrm{D}} \stackrel{\mathcal{D}'}{=} \lambda\,\delta_\gamma$$

- Plošné rozložení náboje na ploše Σ s (proměnnou) plošnou hustotou σ

$$\rho_{2\mathrm{D}} \stackrel{\mathcal{D}'}{=} \sigma\,\delta_\Sigma$$

  Příklad výpočtu celkového náboje v ploše

$$Q_\Sigma = \langle \rho_{2\mathrm{D}}, 1\rangle = \langle \sigma\,\delta_\Sigma, 1\rangle = \langle \delta_\Sigma, \sigma\rangle = \int_\Sigma \sigma \mathrm{d}S$$

  Předpokládáme, že Σ je uvnitř nějaké kompaktní množiny, tedy δ_Σ má kompaktní nosič. Potom ji můžeme aplikovat i na testovací funkci 1, která je hladká, ale nemá kompaktní nosič.

- Elektrický dipól $\boldsymbol{p}$ v místě $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{E}^3$

$$\rho_{\mathrm{dip}} \overset{\mathcal{D}'}{=} -\boldsymbol{p} \cdot \nabla \delta_{\boldsymbol{x}_0}$$

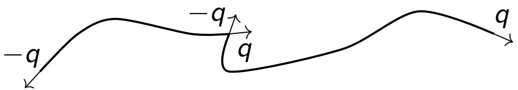
Odvození pro $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$ — model daný dvěma nek. náboji $\pm q$ nek. blízko sebe s relativní separací $\boldsymbol{d}$

$$\begin{aligned}
\langle \rho_{\mathrm{dip}}, \phi \rangle &= \langle -\boldsymbol{p} \cdot \nabla \delta_{\boldsymbol{x}_0}, \phi \rangle = -\langle \nabla \delta_{\boldsymbol{x}_0}; \phi \boldsymbol{p} \rangle = \langle \delta_{\boldsymbol{x}_0}, \nabla \cdot \phi \boldsymbol{p} \rangle = \\
&= \langle \delta_{\boldsymbol{x}_0}, \boldsymbol{p} \cdot \nabla \phi \rangle = \left\langle \delta_{\boldsymbol{x}_0}, \lim_{q \to \infty} q\boldsymbol{d} \cdot \nabla \phi \right\rangle = \\
&= \left\langle \delta_{\boldsymbol{x}_0}, \lim_{q \to \infty} q \left[\phi\left(\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{p}}{2q} \right) - \phi\left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{p}}{2q} \right) \right] \right\rangle = \\
&= \lim_{q \to \infty} q \left[\phi\left(\boldsymbol{x}_0 + \frac{\boldsymbol{p}}{2q} \right) - \phi\left(\boldsymbol{x}_0 - \frac{\boldsymbol{p}}{2q} \right) \right] = \\
&= \left\langle \lim_{q \to \infty} q \left(\delta_{\boldsymbol{x}_0 + \frac{\boldsymbol{p}}{2q}} - \delta_{\boldsymbol{x}_0 - \frac{\boldsymbol{p}}{2q}} \right), \phi \right\rangle
\end{aligned}$$

- Dipólový řetízek — spojité rozložení el. dipólů $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ podél křivky $\gamma : [0,1] \to \mathbb{E}^3$ orientovaných ve směru tečny $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = q\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$

$$\begin{aligned}\rho_{\text{řetízek}} &\overset{\mathcal{D}'}{=} -\int_{z\in\gamma} \nabla\delta_{\boldsymbol{z}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} \overset{\mathcal{D}'}{=} -q\int_{z\in\gamma} \nabla\delta_{\boldsymbol{z}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \overset{\mathcal{D}'}{=} \\ &\overset{\mathcal{D}'}{=} -q\,\nabla\cdot\int_{z\in\gamma} \delta_{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \overset{\mathcal{D}'}{=} -q\,\nabla\cdot\boldsymbol{\delta}_\gamma \overset{\mathcal{D}'}{=} q\left(\delta_{\gamma(1)} - \delta_{\gamma(0)}\right)\end{aligned}$$

Lze rozšířit i na křivky spojité a po částech regulární — součtem integrací po regulárních částech



- Lineární proud $\boldsymbol{j}_{1\mathrm{D}} = I\boldsymbol{\delta}_\gamma = I\boldsymbol{t}\delta_\gamma$ s proudem I tekoucím křivkou γ s tečným vektorovým polem $\boldsymbol{t}$

- Magnetický dipól
  objemová proudová hustota mag. dipólu $\boldsymbol{m}$ v bodě $\boldsymbol{x}_0$

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{dip}} \overset{\mathcal{D}'}{=} -\boldsymbol{m} \times \nabla\delta_{\boldsymbol{x}_0}$$

  Odvození pro model pomocí nekonečně velkého proudu I tekoucího po hranici $\partial\Sigma$ plochy Σ o nekonečně malého rozměru S a normálovém vektoru $\boldsymbol{n} \Rightarrow\ \boldsymbol{m} = IS\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\delta}_\Sigma \sim S\boldsymbol{n}\,\delta_{\boldsymbol{x}_0}$

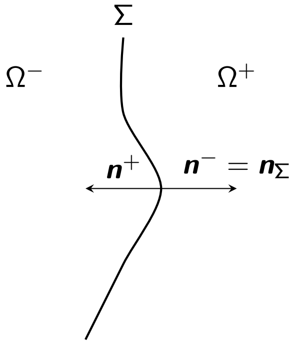
$$\begin{aligned} \boldsymbol{j}_{\mathrm{dip}} &\overset{\mathcal{D}'}{=} -\lim_{I\to\infty} IS\boldsymbol{n} \times \nabla\delta_{\boldsymbol{x}_0} \overset{\mathcal{D}'}{=} \lim_{I\to\infty} I\nabla \times (S\boldsymbol{n}\delta_{\boldsymbol{x}_0}) \overset{\mathcal{D}'}{=} \\ &\overset{\mathcal{D}'}{=} \lim_{I\to\infty} I\nabla \times \boldsymbol{\delta}_\Sigma \overset{\mathcal{D}'}{=} \lim_{I\to\infty} I\,\boldsymbol{\delta}_{\partial\Sigma} \end{aligned}$$

- Dipólová vrstva — $\mathrm{d}\boldsymbol{m} = I\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ rozložené na "velké" ploše Σ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{j}_{\mathrm{vrstva}} &\overset{\mathcal{D}'}{=} \int_{\boldsymbol{z}\in\Sigma} \nabla\delta_{\boldsymbol{z}} \times \mathrm{d}\boldsymbol{m} \overset{\mathcal{D}'}{=} \lim_{I\to\infty} I\nabla \times \int_{\boldsymbol{z}\in\Sigma} \delta_{\boldsymbol{z}}\mathrm{d}\boldsymbol{S} \overset{\mathcal{D}'}{=} \\ &\overset{\mathcal{D}'}{=} \lim_{I\to\infty} I\nabla \times \boldsymbol{\delta}_\Sigma \overset{\mathcal{D}'}{=} \lim_{I\to\infty} I\boldsymbol{\delta}_{\partial\Sigma} \end{aligned}$$

Plošné zdroje a hraniční podmínky

Připomenutí: Derivace pole hladkého všude kromě plochy Σ



- vektorové pole $\boldsymbol{F}$ hladké mimo Σ a hladké $\boldsymbol{F}_\pm$ splňující

$$\boldsymbol{F} = \chi_+ \boldsymbol{F}_+ + \chi_- \boldsymbol{F}_-$$

kde $\chi_\pm = \chi_{\Omega^\pm}$

- skok na Σ: $[\boldsymbol{F}] = (\boldsymbol{F}_+ - \boldsymbol{F}_-)|_\Sigma$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{F} &= \chi_+ \nabla \cdot \boldsymbol{F}_+ + \chi_- \nabla \cdot \boldsymbol{F}_- + [\boldsymbol{F}] \cdot \boldsymbol{\delta}_\Sigma \\ \nabla \times \boldsymbol{F} &= \chi_+ \nabla \times \boldsymbol{F}_+ + \chi_- \nabla \times \boldsymbol{F}_- - [\boldsymbol{F}] \times \boldsymbol{\delta}_\Sigma\end{aligned}$$

Aplikace v elektrostatice

Použijme pro elektrickou intenzitu $\boldsymbol{E}$ a lin. prostředí s ε_0

- $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \chi_+ \nabla \cdot \boldsymbol{E}_+ + \chi_- \nabla \cdot \boldsymbol{E}_- + [\boldsymbol{E}] \cdot \boldsymbol{\delta}_\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_{3D} + \rho_{2D})$

  $$\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{3D} = \chi_+ \nabla \cdot \boldsymbol{E}_+ + \chi_- \nabla \cdot \boldsymbol{E}_- \quad , \quad \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{2D} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\delta_\Sigma = [\boldsymbol{E}] \cdot \boldsymbol{n}\, \delta_\Sigma$$

- $\nabla \times \boldsymbol{E} = \chi_+ \nabla \times \boldsymbol{E}_+ + \chi_- \nabla \times \boldsymbol{E}_- - [\boldsymbol{E}] \times \boldsymbol{\delta}_\Sigma = 0$

  $$\chi_+ \nabla \times \boldsymbol{E}_+ + \chi_- \nabla \times \boldsymbol{E}_- = 0 \quad , \quad [\boldsymbol{E}] \times \boldsymbol{\delta}_\Sigma = [\boldsymbol{E}] \times \boldsymbol{n}\, \delta_\Sigma = 0$$

- hraniční podmínky: $\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = [\boldsymbol{E}] \cdot \boldsymbol{n} \quad , \quad [\boldsymbol{E}] \times \boldsymbol{n} = 0$

Aplikace v magnetostatice

Použijme pro magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ a lin. prostředí s μ_0

- $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \chi_+ \nabla \cdot \boldsymbol{B}_+ + \chi_- \nabla \cdot \boldsymbol{B}_- + [\boldsymbol{B}] \cdot \boldsymbol{\delta}_\Sigma = 0$

  $$\chi_+ \nabla \cdot \boldsymbol{B}_+ + \chi_- \nabla \cdot \boldsymbol{B}_- = 0 \quad , \quad [\boldsymbol{B}] \cdot \boldsymbol{n}\, \delta_\Sigma = 0$$

- $\nabla \times \boldsymbol{B} = \chi_+ \nabla \times \boldsymbol{B}_+ + \chi_- \nabla \times \boldsymbol{B}_- - [\boldsymbol{B}] \times \boldsymbol{\delta}_\Sigma = \mu_0 (\boldsymbol{j}_{3D} + \boldsymbol{j}_{2D})$

  $$\mu_0\, \boldsymbol{j}_{3D} = \chi_+ \nabla \times \boldsymbol{B}_+ + \chi_- \nabla \times \boldsymbol{B}_- \quad , \quad \mu_0\, \boldsymbol{j}_{2D} = \mu_0\, \boldsymbol{\iota}\, \delta_\Sigma = -[\boldsymbol{B}] \times \boldsymbol{n}\, \delta_\Sigma$$

- hraniční podmínky: $\quad [\boldsymbol{B}] \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad , \quad \mu_0 \boldsymbol{\iota} = \boldsymbol{n} \times [\boldsymbol{B}]$

Greenovy funkce ve více dimenzích

Laplaceova–Poissonova rovnice $\Delta G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = \delta_{\boldsymbol{x}_0}$

(označme $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|$ pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{E}^n$)

$$
\begin{aligned}
n &= 1 \qquad & G &= \frac{1}{2} r \\
n &= 2 \qquad & G &= -\frac{1}{2\pi} \ln r \\
n &= 3 \qquad & G &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \\
n &\geq 3 \qquad & G &= -\frac{1}{(n-2)S_n} \frac{1}{r^{n-2}}
\end{aligned}
$$

kde $S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ je plocha sféry v n dimenzích.

Ukázka ověření pro $n = 2$, kde položíme BÚNO $\boldsymbol{x}_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta G, \phi \rangle &= -\left\langle \Delta \frac{1}{2\pi} \ln r, \phi \right\rangle = -\left\langle \frac{1}{2\pi} \ln r, \Delta\phi \right\rangle = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{r\geq\epsilon} \ln r \, \Delta\phi(r,\phi)\,\mathrm{d}V = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0} \left[\int_{r\geq\epsilon} \Delta \ln r \, \phi(r,\phi)\,\mathrm{d}V - \right. \\
&\quad \left. - \oint_{r=\epsilon} \left(\ln r \, \phi_{,r} - \{\ln r\}_{,r}\, \phi \right) \mathrm{d}\ell \right] = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{2\pi} \left(\ln \epsilon \, \phi_{,r}|_{r=\epsilon} - \frac{\phi|_{r=\epsilon}}{\epsilon} \right) \epsilon \,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0} 2\pi \, \bar{\phi}(\epsilon) = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle
\end{aligned}
$$

pro druhý řádek jsme použili 2. Greenovu identitu a zavedli $\bar{\phi}(\epsilon)$ jako integrální střední hodnotu na kružnici o poloměru ϵ

Použití v elektrostatice

Tedy řešíme $\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

- Bodový náboj $\rho_{\mathrm{mon}} = q\delta_{\mathbf{x_0}}$

$$\Phi_{\mathrm{mon}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

- Lineární náboj $\rho_{2D} = \lambda\,\delta_\gamma$ pro konstantní hustotu λ a nekonečnou přímku $\gamma \Rightarrow$ efektivně dvojrozměrný problém, tedy použijeme dvojrozměrnou Greenovu funkci

$$\Phi_{2D} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln R$$

  kde R je vzdálenost od přímky neboli cylindrická radiální souř.

- Elektrický dipól $\rho_{\mathrm{dip}} = -\boldsymbol{p}\cdot\nabla\delta_{\mathbf{x_0}} \Rightarrow$ spočteme $\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\nabla G$

$$\Phi_{\mathrm{dip}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\nabla\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$$

Použití v magnetostatice

Tedy řešíme $\Delta \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}$

- Lineární proud $\boldsymbol{j}_{1\mathrm{D}} = I\boldsymbol{\delta}_\gamma = I\boldsymbol{t}\delta_\gamma$ s konstantní hodnotou I tekoucí nekonečnou přímku γ s tečným vektorem $\boldsymbol{t} \Rightarrow$ dvojrozměrný problém a předpokládám $\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{t}$

$$\boldsymbol{A}_{1\mathrm{D}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(R)\, \boldsymbol{t}$$

- Magnetický dipól $\boldsymbol{j}_{\mathrm{dip}} = -\boldsymbol{m} \times \nabla \delta_{\boldsymbol{x_0}}$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{dip}} = \mu_0 \boldsymbol{m} \times \nabla \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$