Doplněk - Greenova funkce Laplaceova operátoru na kompaktní varietě

(Otakar Svítek, ÚTF MFF UK)

Distribuce na kompaktní varietě M (zakřivený prostor lokálně homeomorfní $\mathbb{R}^n$)

- testovací funkce jsou $C^\infty(M)$
- Delta distribuce v $p \in M$ ($\phi \in C^\infty(M)$)

$$\langle \delta_p, \phi \rangle = \phi(p)$$

Laplace na varietě pomocí kovariantní derivace:

$$\Delta = \nabla^\mu \nabla_\mu = \nabla \cdot \nabla$$

Greenova funkce by tedy měla splňovat

$$\Delta G(p, q) = \delta_p(q)$$

PROBLÉM:

$$1 = \langle \delta_p, 1 \rangle = \langle \Delta G(p,q), 1 \rangle = -\langle \nabla G(p,q); \nabla 1 \rangle = 0$$

- 1 je dobrá testovací funkce díky kompaktnosti
- v nekompaktním případě musíme omezit chování v ∞ nebo požadovat kompaktnost nosiče G

Zkusíme $PS = \delta_p - c$, kde $c \in \mathbb{R}$

$$\langle \delta_p - c, 1 \rangle = \langle \delta_p, 1 \rangle - \langle c, 1 \rangle = 1 - c \int_M \mathrm{d}V = 0 \Rightarrow c = V_M^{-1}$$

Tedy raději řešíme úlohu

$$\Delta G(p,q) = \delta_p(q) - V_M^{-1}$$

Tento problém je dán netriviálním jádrem Laplace:
$\exists f \neq 0: \ \Delta f = 0$

$$0 = \int_M f \Delta f \mathrm{d}V = \int_M \nabla \cdot (f \nabla f) \mathrm{d}V - \int_M \nabla f \cdot \nabla f \mathrm{d}V = -\int_M |\nabla f|^2 \mathrm{d}V$$

$\Rightarrow$ řešení Laplace na kompaktu jsou konstanty

Vlastní čísla a funkce Laplace: $\Delta g = \lambda g$

- existuje vlastní číslo $\lambda = 0$ pro $g = konst.$
- nenulová vlastní čísla jsou záporná neboť

$$\int_M g \Delta g \mathrm{d}V = \lambda \int_M g^2 \mathrm{d}V = -\int_M |\nabla g|^2 \mathrm{d}V$$

(Pozor: matematici často pracují s operátorem "$-\Delta$")

Greenova funkce pomocí vlastních funkcí

Připomenutí: $L_x \psi_n = \lambda_n \psi_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x)\, \psi_n^*(x') = \delta(x - x') \ , \qquad \int \psi_n(x)\, \psi_m^*(x)\, \mathrm{d}x = \delta_{nm}$$

$$G(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n^*(x')\, \psi_n(x)}{\lambda_n}$$

Nyní máme $\lambda_0 = 0 \ \Rightarrow$ odstranit odpovídající $\psi_0 = \mathit{konst}$.

$$\tilde{G}(x, x') = \sum_{n \neq 0} \frac{\psi_n^*(x')\, \psi_n(x)}{\lambda_n}, \ \sum_{n \neq 0} \psi_n(x)\, \psi_n^*(x') = \delta(x - x') - \psi_0(x)\, \psi_0^*(x')$$

$$L_x \tilde{G}(x, x') = \delta(x - x') - \psi_0(x)\, \psi_0^*(x')$$

Podobně i pro neDirichletovy okr. podm. na oblastech s hranicí.