Elektromagnetické pole

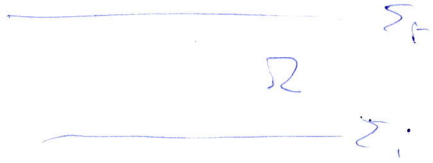
$\boxed{c = 1}$

Kinematika a akce

Minkowského pč. M

$$g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

konv. dle ∇



oblast $\Omega = \langle \Sigma_f, \Sigma_i \rangle$

vektorový 4-potenciál

$A_{\underline{a}}(x)$ 1-forma na M

Maxwellův tenzor

$$F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a$$

akce

$$S_{EM}[A] = -\frac{\varepsilon_0}{4} \int F_{ab} F^{ab} \, d\Omega$$

Pozn: prostoročasové indexy latinka místo řeckých

Princip extremální akce

variace ve směru δA_a

$$\delta S[A] = (S[A+\delta A] - S[A]) =$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_\Omega (\nabla_m \delta A_n - \nabla_n \delta A_m) F^{mn}\, d\Omega + \delta S_{ostatní}$$

$$= -\varepsilon_0 \int_\Omega (\nabla_m \delta A_n) F^{mn}\, d\Omega + \delta S_{ostatní}$$

$$= -\varepsilon_0 \int_\Omega \nabla_m (\underbrace{\delta A_n}_{\partial\Omega = 0} F^{mn})\, d\Omega + \varepsilon_0 \int_\Omega \left[(\nabla_m F^{mn}) + \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\delta S_{ostatní}}{\delta A_n}\right] \delta A_n\, d\Omega$$

$$= \varepsilon_0 \int_\Omega \left[-\nabla_m F^{am} + \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\delta S_{ost}}{\delta A_a}\right] \delta A_a\, d\Omega$$

$$\frac{\delta S}{\delta A_a} = -\varepsilon_0 \nabla_m F^{am} + \frac{\delta S_{ost}}{\delta A_a}$$

$$\frac{\delta S}{\delta A_a} = 0 \iff \nabla_m F^{am} = \frac{1}{\varepsilon_0} J^a$$

$$J^a = \frac{\delta S_{ostatní}}{\delta A_a}$$

$$F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a \iff \nabla_{[a} F_{bc]} = 0$$

Př: vnější zdroj.

zadaný nedynamický vnější zdroj J^a_{ext} interagující s A_a

$$S_{ext}[A] = \int_\Omega J^a_{ext} A_a\, d\Omega \qquad \text{tj. } S_{ostatní} = S_{ext}$$

$$J^a = \frac{\delta S_{ostatní}}{\delta A_a} = J^a_{ext}$$

zákon zachování – pro konzistenci musí platit

$$\nabla_a J^a_{ext} = 0$$

$\Rightarrow$ kalibrační inv. S_{ext} při transformaci $A \to A - \nabla\psi$

Časové rozštěpení (3+1 rozštěpení)

sk. a vekt. potenciál

$$A_a = -\varphi\, \nu_a + \vec{A}_a \qquad \varphi n \,\Big\downarrow\!\!\nearrow \vec{A}$$

$$n = \frac{\partial}{\partial t} \qquad \nu = dt \qquad \nu \cdot n = 1$$

$$\nu = -g \cdot n \qquad \nabla n = 0$$

el. intenzita a mag. ind

$$F_{ab} = \vec{E}_a \nu_b - \nu_a \vec{E}_b + \vec{B}^n \varepsilon_{nab} \qquad \varepsilon \quad \text{3D Levi-Civita}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

důkaz

$$F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a \underset{\uparrow}{=} (\nu_a \dot{A}_b + \vec{\nabla}_a A_b) - (\nu_b \dot{A}_a + \vec{\nabla}_b A_a)$$

$$A = -\varphi \nu + \vec{A} \qquad \nabla = \nu \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}$$

$$\overset{\downarrow}{=} \nu_a(-\nu_b \dot{\varphi} + \dot{\vec{A}}_b) + \vec{\nabla}_a(-\nu_b \varphi + \vec{A}_b) - (a \leftrightarrow b)$$

$$= \nu_a(\dot{\vec{A}}_b + \vec{\nabla}_b \varphi) - (\dot{\vec{A}}_a + \vec{\nabla}_a \varphi)\nu_b + \underbrace{\vec{\nabla}_a \vec{A}_b - \vec{\nabla}_b \vec{A}_a}_{\overleftrightarrow{B}_{ab}}$$

$$= -\nu_a \vec{E}_b + \vec{E}_a \nu_b + \overleftrightarrow{B}_{ab}$$

$$\overleftrightarrow{B}_{ab} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2} \varepsilon_{kab} \varepsilon^{kmn} \overleftrightarrow{B}_{mn} = \vec{B}^k \varepsilon_{kab} \qquad \vec{B}^k = \frac{1}{2} \varepsilon^{kmn} B_{mn}$$

$$\frac{1}{2}\sqcup\!\sqcap = \sqcap\!\sqcap$$

$$\vec{B}^k = \frac{1}{2} \varepsilon^{kmn} (\vec{\nabla}_m \vec{A}_n - \vec{\nabla}_n \vec{A}_m) = \varepsilon^{kmn} \vec{\nabla}_m \vec{A}_n = (\vec{\nabla} \times \vec{A})^k$$

el. tok.

$$J = \varrho n + \vec{j} \qquad \varrho n \,\Big\downarrow\!\!\nearrow \vec{j}$$

Lagr. hustota

$$-\frac{1}{4} F_{mn} F^{mn} = -\frac{1}{2}(\vec{E}_m \nu_n - \nu_m \vec{E}_n + \vec{B}^k \varepsilon_{kmn})(\vec{E}^m \nu^n + \vec{\nabla}^m \vec{A}^n)$$

$$= \frac{1}{2}(E^2 - B^2)$$

Lagrangeovský formalismus

akce

$$S_{EM} = -\int_{\Omega} \frac{\varepsilon_0}{4} F_{ab} F^{ab} \, d\Omega = \int_{t_i}^{t_f} \int_{\Sigma_t} \frac{\varepsilon_0}{2} (E^2 - B^2) \, dV \, dt$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} L_{EM}(\varphi, \vec{A}; \dot{\varphi}, \dot{\vec{A}}) \, dt$$

Lagrangián

$$L_{EM}(\varphi, \vec{A}, \dot{\varphi}, \dot{\vec{A}}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Sigma} (E^2 - B^2) \, dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Sigma} \left((\nabla\varphi + \dot{\vec{A}})^2 - (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right) dV$$

nezávisí na $\dot{\varphi}$!!!

pohybové rovnice

$$L = L_{EM} + L_{ostatní}(\text{jiná pole}, \varphi, \vec{A}, \cancel{\dot{\varphi}}, \cancel{\dot{\vec{A}}})$$

nezávisí na "rychlostech" EM pole

$$\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{A}}}\right)^{\cdot} - \frac{\delta L}{\delta \vec{A}} = 0$$

$$\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}}\right)^{\cdot} - \frac{\delta L}{\delta \varphi} = 0$$

označíme: $\frac{\delta L_{ostatní}}{\delta \vec{A}} = \vec{j}$

$\frac{\delta L_{ostatní}}{\delta \varphi} = -\rho$

$\Downarrow$

$$\left(\frac{\delta L_{EM}}{\delta \dot{\vec{A}}}\right)^{\cdot} - \frac{\delta L_{EM}}{\delta \vec{A}} = \vec{j} \qquad (I)$$

$$\left(\frac{\delta L_{EM}}{\delta \dot{\varphi}}\right)^{\cdot} - \frac{\delta L_{EM}}{\delta \varphi} = -\rho \qquad (II)$$

Př: externí zdroj

$$S_{ext}[\varphi, \vec{A}] = \int_{\Omega} J^a_{ext} A_a \, d\Omega = \int_{t_i}^{t_f} \int_{\Sigma_t} (\rho_{ext} \mathbb{1} + \vec{j}_{ext}) \cdot (-\varphi \mathbb{1} + \vec{A}) \, dV \, dt$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \int_{\Sigma_t} (-\rho_{ext} \varphi + \vec{j}_{ext} \cdot \vec{A}) \, dV \, dt$$

$$L_{ext}(\varphi, \vec{A}) = \int_{\Sigma_t} (-\rho_{ext} \varphi + \vec{j}_{ext} \cdot \vec{A}) \, dV$$

$$\delta L_{ext} = \int_{\Sigma} (-\rho_{ext} \, \delta\varphi + \vec{j}_{ext} \cdot \delta\vec{A}) \, dV$$

$$\rho = -\frac{\delta L_{ext}}{\delta \varphi} = \rho_{ext} \qquad \vec{j} = \frac{\delta L_{ext}}{\delta \vec{A}} = \vec{j}_{ext}$$

zákon zachování

$$\dot{\rho}_{ext} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{ext} = 0$$

variace Lagrangiánu L_{EM}

$\delta\dot{\vec{A}}$ $\quad \delta L_{EM} = \varepsilon_0 \int_\Sigma \vec{E}\cdot(-\delta\dot{\vec{A}})\, dV \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta L_{EM}}{\delta \dot{\vec{A}}} = -\varepsilon_0 \vec{E}$

díky $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}$

$\delta\vec{A}$ $\quad \delta L_{EM} = -\varepsilon_0 \int_\Sigma \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\delta\vec{A})\, dV \qquad$ díky $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$= \varepsilon_0 \underbrace{\int_\Sigma \vec{\nabla}\cdot(\vec{B}\times\delta\vec{A})\, dV}_{\int_{\partial\Sigma} \underbrace{(\vec{B}\times\delta\vec{A})}_{\to 0 \text{ na } \partial\Sigma \text{ (v nekonečnu)}}\cdot d\vec{S} \to 0} - \varepsilon_0 \int_\Sigma (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\delta\vec{A}\, dV \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta L_{EM}}{\delta\vec{A}} = -\varepsilon_0 \vec{\nabla}\times\vec{B}$$

$\delta\dot{\varphi}$ $\quad \delta L_{EM} = 0$ triviální $\quad \Rightarrow \quad \frac{\delta L_{EM}}{\delta\dot{\varphi}} = 0$

$\delta\varphi$ $\quad \delta L_{EM} = -\varepsilon_0 \int_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{\nabla}\delta\varphi\, dV = -\varepsilon_0 \underbrace{\int_\Sigma \vec{\nabla}\cdot(\delta\varphi\vec{E})\, dV}_{\int_{\partial\Sigma} \underbrace{\delta\varphi\vec{E}}_{\to 0 \text{ na } \partial\Sigma \text{ (v nekonečnu)}}\cdot d\vec{S} \to 0} + \varepsilon_0 \int_\Sigma (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\,\delta\varphi\, dV$

$\Downarrow \quad \frac{\delta L_{EM}}{\delta\varphi} = \varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$

pohybové rovnice

(i) $\Rightarrow \quad -\dot{\vec{E}} + \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{j}$

(ii) $\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

Maxwellovy zdrojové rovnice

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$

$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

Maxwellovy potenciálové rov.

Hamiltonovský formalismus pro EM pole

již jsme odvodili:

Lagrangián

$$L(\varphi,\vec{A},\dot{\varphi},\dot{\vec{A}}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_\Sigma (\vec{E}^2-\vec{B}^2)\,dV + \int_\Sigma (-\varrho_E\varphi + \vec{j}_E\cdot\vec{A})\,dV$$

kde $\vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla}\varphi \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad \dot{\varrho}_E + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_E = 0$

zde uvažujeme jako příklad L_{ext} zadaný vnější zdroj $J_E^\alpha = \begin{bmatrix}\varrho_E\\ \vec{j}_E\end{bmatrix}$

hybnosti

$$\vec{\Pi} = \frac{\delta L}{\delta\dot{\vec{A}}} = -\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0(\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla}\varphi)$$

$$K = \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}} = 0 \qquad \text{vazba!}$$

vazba má polní charakter: $\varphi(x)$ je pole $\Rightarrow$ $K(x)$ je pole

$K(x) = 0 \qquad \forall x\in\Sigma$

zhlazená vazba – pro libovolnou testovací fci $\nu(x)$ na Σ máme

$K_\nu = 0 \qquad$ kde $K_\nu = \int_\Sigma \nu K\,dV \qquad \nu(x)$ fce na Σ

fázový prostor

$\varphi,\ K,\ \vec{A},\ \vec{\Pi} \qquad$ (vše polní veličiny na Σ)

$$\{F_1, F_2\} = \int\left(\frac{\delta F_1}{\delta\varphi}\frac{\delta F_2}{\delta K} - \frac{\delta F_1}{\delta K}\frac{\delta F_2}{\delta\varphi} + \frac{\delta F_1}{\delta\vec{A}}\cdot\frac{\delta F_2}{\delta\vec{\Pi}} - \frac{\delta F_1}{\delta\vec{\Pi}}\cdot\frac{\delta F_2}{\delta\vec{A}}\right)dV$$

inverze rychlostí

$$\dot{\vec{A}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\Pi} - \vec{\nabla}\varphi$$

$\dot{\varphi} = \lambda \qquad$ nelze invertovat $K=0$

nutno zadat $\dot{\varphi}$ explicitně jako zvolenou fci λ

degenerovaný Lagrangián (existence vazeb) $\Rightarrow$
nelze vyjádřit rychlosti pomocí hybností
neurčené rychlosti je nutno zvolit uměle

Hamiltonián

$$H_\lambda = \int_\Sigma \left(\dot{\varphi} K + \dot{\vec{A}} \cdot \vec{\Pi}\right) dV - L(\varphi, \dot{\varphi}, \vec{A}, \dot{\vec{A}})$$

kde $\dot{\varphi}$ a $\dot{\vec{A}}$ se vyjádří pomocí hybností a v případě degenerovaného Lagrangiánu pomocí zvolených komponent rychlosti, které nejsou dány hybností tato volba (fce λ) vstupuje do Hamilt. jako parametr

$$= \int_\Sigma \left(\lambda K + \left(\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\Pi} - \vec{\nabla}\varphi\right)\cdot\vec{\Pi} - \frac{1}{2\varepsilon_0}\vec{\Pi}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{B}^2 + \varrho_E \varphi - \vec{j}_E \cdot \vec{A}\right) dV$$

$$= \int_\Sigma \left(\frac{1}{2\varepsilon_0}\vec{\Pi}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{B}^2 - \vec{j}_E \cdot \vec{A} + \varphi\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi} + \varrho_E\right) + \lambda K\right) dV$$

použito per-partes s Gaussovou větou

variace Hamiltoniánu

$$\frac{\delta H_\lambda}{\delta \varphi} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi} + \varrho_E \qquad \frac{\delta H_\lambda}{\delta \vec{A}} = \varepsilon_0(\vec{\nabla}\times\vec{B}) - \vec{j}_E$$

← viz výpočet $\frac{\delta L}{\delta \vec{A}}$

$$\frac{\delta H_\lambda}{\delta K} = \lambda \qquad \frac{\delta H_\lambda}{\delta \vec{\Pi}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\Pi} - \vec{\nabla}\varphi$$

časový vývoj

F pozorovatelná – funkce na fázovém prostoru

$$F[\underbrace{\varphi, K, \vec{A}, \vec{\Pi}}_{\text{závislost na fázovém prostoru}}; t]$$

explicitní závislost na čase (osamotný předpis pro F se mění v čase)

$$\dot{F} = \{F, H_\lambda\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

změna díky vývoje ve fázovém prostoru

změna díky změně předpisu pro pozorovatelnou F

Zachování vazeb

vazby $K_\nu = 0$ musejí platit ve všech časech
tj. vazby se nesmějí v čase měnit

$$\dot{K}_\nu = \{K_\nu, H_\lambda\} + \frac{\partial K_\nu}{\partial t}$$

explicitní závislost na čase

$$K_\nu = \int \nu K \, dV$$

K – souř. ve fázovém prostoru
ν – zadaná funkce – může záviset explicitně na čase

$$\frac{\partial K_\nu}{\partial t} = \int \frac{\partial \nu}{\partial t} K \, dV = K_{\dot{\nu}}$$

opět vazba s testovací fcí $\dot{\nu}$

závislost na vývoji ve fáz. pr.

$$\{K_\nu, H_\lambda\} = -\int_\Sigma \frac{\delta K_\nu}{\delta K} \frac{\delta H_\lambda}{\delta \varphi} dV = -\int_\Sigma \nu (\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi} + \varrho_E) dV \overset{\text{def}}{=} -G_\nu$$

K_ν závisí jen na K

požadavek zachování vazeb $\dot{K}_\nu = 0$ dává

$$-G_\nu + K_{\dot{\nu}} = 0$$

zde jsme definovali novou Gaussovu vazbu

$$G = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi} + \varrho_E) \qquad G_\nu = \int_\Sigma \nu G \, dV = \int_\Sigma \nu (\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi} + \varrho_E) dV = \int_\Sigma (-\vec{\Pi}\cdot\vec{\nabla}\nu + \varrho_E) dV$$

tato vazba se musí též zachovávat

$$\dot{G}_\nu = \{G_\nu, H_\lambda\} + \frac{\partial G_\nu}{\partial t} = -\int_\Sigma \frac{\delta G_\nu}{\delta \vec{\Pi}} \cdot \frac{\delta H_\lambda}{\delta \vec{A}} dV + \underbrace{\int_\Sigma \nu \dot{\varrho}_E dV + \int_\Sigma \dot{\nu} (\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi} + \varrho_E) dV}_{\frac{\partial G_\nu}{\partial t}}$$

$\{G_\nu, H_\lambda\}$

$$= \int \left[\vec{\nabla}\nu \cdot (\varepsilon_0 \vec{\nabla}\times\vec{B} - \vec{j}_E) + \nu \dot{\varrho}_E \right] dV + G_{\dot{\nu}}$$

$$= \int \nu \Big(-\varepsilon_0 \underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})}_{0} + \underbrace{(\dot{\varrho}_E + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_E)}_{0} \Big) dV + G_{\dot{\nu}}$$

0 – předpoklad o vnějších zdrojích

$= 0$ na vazbách

nedostáváme další vazbu

Shrnutí:

Hamiltonián

$$H_\lambda(\varphi, K, \vec{A}, \vec{\Pi}) = \int_\Sigma \left(\frac{1}{2\varepsilon_0} \vec{\Pi}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{B}^2 - \vec{j}_E \cdot \vec{A} \right) dV + G_\varphi + K_\lambda$$

vazby:

$$G_\nu = \int_\Sigma \nu \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} + \rho_E \right) dV = \int_\Sigma \left(-\vec{\Pi} \cdot \vec{\nabla} \nu + \rho_E \right) dV \qquad G_\nu = 0$$

$$K_\nu = \int_\Sigma \nu K \, dV \qquad K_\nu = 0$$

algebra vazeb

$$\{K_\mu, K_\nu\} = 0 \qquad \{G_\mu, G_\nu\} = 0 \qquad \{K_\mu, G_\nu\} = 0$$

Hamiltonovy kanonické rovnice

$$\dot{\varphi} = \frac{\delta H_\lambda}{\delta K} = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varphi} = \lambda$$

$$\dot{K} = -\frac{\delta H_\lambda}{\delta \varphi} = G \quad \Leftrightarrow \quad K = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_E$$

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\delta H_\lambda}{\delta \vec{\Pi}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\Pi} - \vec{\nabla} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla} \varphi$$

$$\dot{\vec{\Pi}} = -\frac{\delta H_\lambda}{\delta \vec{A}} = -\varepsilon_0 (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{j}_E \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \dot{\vec{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{j}_E$$

definice $\vec{B}$: $\quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Částečná redukce fázového prostoru

proměnné φ, K lze jednoduše eliminovat

$\dot{\varphi} = \lambda$ → umožňuje zvolit φ libovolně

$K = 0$ → fixuje hodnotu K jednoznačně

redukovaný fázový prostor

$\vec{A}, \vec{\Pi}$ $\quad \{F_1, F_2\} = \int_\Sigma \left(\frac{\delta F_1}{\delta \vec{A}} \cdot \frac{\delta F_2}{\delta \vec{\Pi}} - \frac{\delta F_1}{\delta \vec{\Pi}} \cdot \frac{\delta F_2}{\delta \vec{A}} \right) dV$

$$H_\varphi(\vec{A}, \vec{\Pi}) = \int_\Sigma \left(\frac{1}{2\varepsilon_0} \vec{\Pi}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{B}^2 - \vec{j}_E \cdot \vec{A} \right) dV + G_\varphi$$

φ volně zvolitelný parametr

Význam vazeb

vazby generují kalibrační symetrii

Gaussova vazba G_ψ generuje v jednom čase přesně kalibrační změnu vekt. potenciálu

$$\delta \vec{A} = \{\vec{A}, G_\psi\} = \frac{\delta G_\psi}{\delta \vec{\Pi}} = -\vec{\nabla}\psi$$

$\vec{A} \to \vec{A} + \delta\vec{A} = \vec{A} - \vec{\nabla}\psi$ $\quad$ kalibrační transformace

$$\delta \vec{\Pi} = \{\vec{\Pi}, G_\psi\} = -\frac{\delta G_\psi}{\delta \vec{A}} = 0$$

$\vec{\Pi} \to \vec{\Pi}$ $\quad$ $\vec{\Pi} \propto \vec{E}$ se nemění