Elmag pole

→ pracujeme s tenzorom $F_{\alpha\beta}$ vo vákuu ($J^\alpha = 0$)

Zvolíme nadplochu $S: u(x^\mu) = 0$ a uvažujeme nespojitosť tvaru

$$F_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} + \mathcal{H}_{\alpha\beta}\,\Theta(u)$$

$f, \mathcal{H}$ sú spoj. a dif. na S

$$F_{\{\alpha\beta,\gamma\}} = f_{\{\alpha\beta,\gamma\}} + \mathcal{H}_{\{\alpha\beta,\gamma\}}\Theta(u) + \mathcal{H}_{\{\alpha\beta}\, u_{\gamma\}}\,\delta(u) = 0$$

1.) pre $u<0$ platí $f_{\{\alpha\beta,\gamma\}} = 0$ a zo spojitosti platí aj pre $u>0$ a na S

2.) pre $u>0$ musí tiež platiť $\mathcal{H}_{\{\alpha\beta,\gamma\}} = 0$

3.) Po prenásobení rovnice nejakou spoj. integ. funkciou s komp. nosičom vyplýva, že aj $\mathcal{H}_{\{\alpha\beta}u_{\gamma\}} = 0$

Analogický postup platí pre $F_\alpha{}^\beta{}_{,\beta} = 0$ a dostávame, že $\mathcal{H}_{\alpha\beta}u^\beta = 0$ na S.

Z toho dostávame prenásobením $\mathcal{H}_{\{\alpha\beta}u_{\gamma\}} = 0$ u^γ

$$\mathcal{H}_{\alpha\beta}u_\gamma u^\gamma + \underbrace{\cancel{\mathcal{H}_{\beta\gamma}u_\alpha u^\gamma}}_{=0} + \cancel{\mathcal{H}_{\gamma\alpha}u_\beta u^\gamma} = 0$$

lebo $\mathcal{H}_{\alpha\beta}u^\beta = 0$

$$\boxed{\mathcal{H}_{\alpha\beta}u_\gamma u^\gamma = 0}$$

⟹ EM pole vo vákuu môže byť nespojité, práve vtedy a len vtedy, ak je nadplocha nulová ($u_\gamma u^\gamma = 0$)

$\boxed{\text{„EM pole nespojité} \Longleftrightarrow u_\gamma u^\gamma = 0\text{"}}$

Môžeme si ešte ukázať algebraickú ~~...~~ štruktúru nespojitosti $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$

Uvažujme $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ antisymetrickú ⟹ hodnosť je párna (4, 2). ¿CHCEME?

Užitím faktu, že

$$\mathcal{H}_{\alpha\beta}u^\beta = 0$$

vieme, že ide o hodnosť 2. ∃ teda $e^\alpha_{(A)}$ $A = \{1;2\}$ t.ž.

$$\mathcal{H}_{\alpha\beta}e^\alpha_{(A)} = 0 \qquad \forall\alpha$$

Zvolíme teda vektory p_α, q_α kolmé na $e^\alpha_{(A)}$ t.ž.

$$\mathcal{H}_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha p_\beta + \mu_\alpha q_\beta \qquad \lambda_\alpha, \mu_\alpha \text{ – koef. lin. kombinácie}$$

$\lambda_\alpha, \mu_\alpha$ taktiež ~~[illegible]~~ musia byť kolmé na $e^\alpha_{(A)}$ teda môžeme ich zapísať ako lin. komb. q_α, p_α (4.)

$$\lambda_\alpha = \lambda_1 p_\alpha + \lambda_2 q_\alpha \qquad \mu_\beta = \mu_1 p_\beta + \mu_2 q_\beta$$

$\mathcal{Y}_{\alpha\beta}$ má potom tvar

$$\cancel{\mathcal{Y}_{\alpha\beta} = \lambda_1 p_\alpha q_\beta + \lambda_2 q_\alpha q_\beta + \mu_1 p_\beta}$$

$$\mathcal{Y}_{\alpha\beta} = \lambda_1 p_\alpha p_\beta + \lambda_2 q_\alpha p_\beta + \mu_1 p_\alpha q_\beta + \mu_2 q_\alpha q_\beta$$

Z antisymetrie $\mathcal{Y}_{\alpha\beta}$ plynie $\lambda_1 = \mu_2 = 0 \wedge -\lambda_2 = +\mu_1 = 1$

$$\mathcal{Y}_{\alpha\beta} = p_\alpha q_\beta - p_\beta q_\alpha \longleftarrow$$ NIE SÚ URČENÉ JEDNOZNAČNE (p, q)

Dosadením $\mathcal{Y}_{\alpha\beta} = \mathcal{Y}_{\alpha\beta}(p, q)$ do $\mathcal{Y}_{\beta\gamma} u^\gamma = 0$ ~~dostávame~~ zistíme, že $p_\alpha, q_\alpha, u_\alpha$ je trojica lin. závislých vektorov a preto môžeme položiť $p_\alpha = u_\alpha$ BÚNO.

$$\mathcal{Y}_{\alpha\beta} = u_\alpha q_\beta - u_\beta q_\alpha$$

a zároveň platí

$$\boxed{u_\alpha u^\alpha = 0} \quad \text{a} \quad \mathcal{Y}_{\alpha\beta} u^\beta = u_\alpha q_\beta u^\beta - u_\beta q_\alpha u^\beta = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{q_\beta u^\beta = 0}$$

keďže u^α ~~[illegible]~~ je nulový vektor, q^α má čisto priestorový charakter.

$$\left(u_\alpha = (u, u, 0, 0) \Rightarrow q^\alpha = (0; 0; q_1, q_2) \right)$$

- ako sa pri prechode čelom vlny menia E, B polia?

Invarianty:

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \qquad F_{\alpha\beta}\, {}^*F^{\alpha\beta} = 4 \vec{E} \cdot \vec{B}$$

$$\Longrightarrow \Delta F_{\alpha\beta} \Delta F^{\alpha\beta} = 2((\Delta\vec{B})^2 - (\Delta\vec{E})^2) \qquad \Delta F_{\alpha\beta}\, {}^*_\Delta F^{\alpha\beta} = 4(\Delta\vec{E})(\Delta\vec{B})$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$= 0 \; (= \mathcal{Y}^\alpha_{\alpha\beta} \mathcal{Y}^{\alpha\beta}) \qquad = 0$$

Platí teda

$$|\Delta\vec{E}| = |\Delta\vec{B}| \quad \wedge \quad \Delta\vec{E}\cdot\Delta\vec{B} = 0$$

Mali sme nadplochu $S: u(x^\mu) = 0$, časovú zložku môžeme vyjadriť ako $t = f(x^i)$, potom $u(f(x^i), x^j) = 0$. Vektor kolmý k čelu vlny je $n_i = \frac{\partial f(x^i)}{\partial x^i}$. Derivujeme u podľa x^j

$$\frac{\partial u}{\partial x^j}(f(x^i), x^j) = u_{,0}\, n_j + u_{,j} = 0 \Rightarrow u_{,i} = -n_i u_{,0}$$

Vrátime sa ku rovnici

$$z_{\alpha\beta} u^\beta = \Delta F_{\alpha\beta} u^\beta = 0 \overset{\alpha=0}{\Rightarrow} \Delta E_i u^i = -\Delta E_i u_{,0} n^i = 0$$

a pre duál platí

$$\Delta\overset{*}{F}_{\alpha\beta} u^\beta = 0 \overset{\alpha=0}{\Rightarrow} \Delta B_i u^i = -\Delta B_i n^i u_{,0} = 0$$

Celkovo teda dostávame

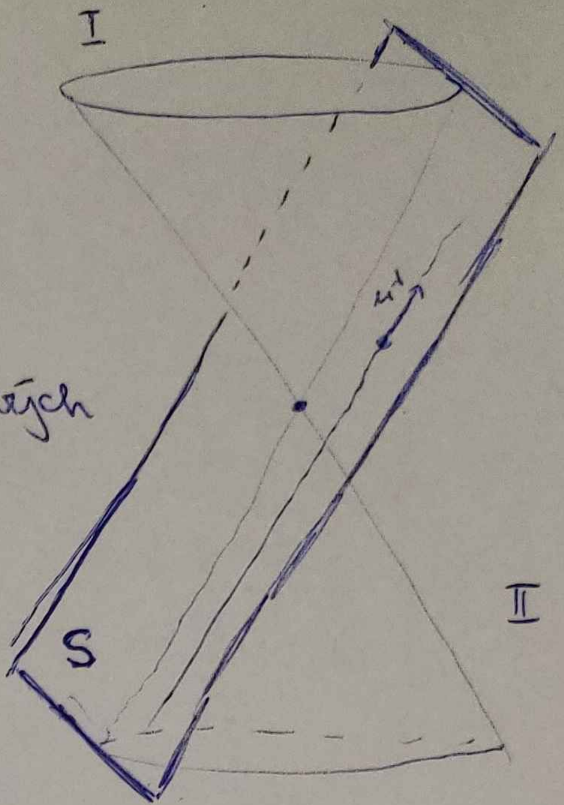
$$\Delta\vec{E}\cdot\vec{n} = 0 = \Delta\vec{B}\cdot\vec{n}$$

$\Rightarrow \vec{n}$ je vektor kolmý k čelu vlny, t.j. ide o vektor v smere šírenia vlny

Pre E, B rovinné vlny platí rovnaký vzťah. V tom prípade ide o tzv. NULOVÉ POLE (taktiež pole typu N)

Záver

- vyšetrili sme skalárne, elektromagnetické a gravitačné rázové vlny. Nadplochy, na kt. dochádzalo ku nespojitostiam, boli nulové. Normály k charakteristikám tvoria pole nulových vektorov n_λ a sú tečné ku bicharakteristikám.



- Nulová nadplocha S reprezentuje čelo vlny. Pri prechode nadplochou sa mení Riemannov tenzor nespojito

- skalárne a gravit. pole sú polia rádu $\underline{p=2}$ (nespojitosť v 2. derivácii veličín Φ a $g_{\mu\nu}$). Pre EM pole ide o pole rádu $p=1$ (Nespoj. $F_{\mu\nu}$)