PERICENTRE SHIFT AND LIGHT BENDING

- Schwarzschild
- geodetický pohyb - aplikace
    - apsidální precese
    - ohyb světla

Relativistická Binetova formule

- popisuje rovinný pohyb ve sféricky symetrickém poli jako funkci $r(\phi)$
    - dává tedy tvar oběžné dráhy
- Vyjdeme z dřívějších rovnic pro p^r a p^ϕ

$$(p^r)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\cdot\left(m^2 + \frac{L^2}{r^2}\right) = \left(m\frac{dr}{d\tau}\right)^2$$

$$(p^\phi)^2 = \left(m\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \frac{L^2}{r^4}$$

- rovnici pro p^r vydělíme rovnicí pro p^ϕ

$$\left(\frac{p^r}{p^\phi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{r^4}{L^2}\cdot\left[E^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\cdot\left(m^2 + \frac{L^2}{r^2}\right)\right]$$

kde: $E \equiv -p_t$ a $L \equiv p_\phi$

- Dále zavedeme reciproký poloměr: $u = \frac{1}{r}$

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \left(-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{L^2}\cdot\left[E^2 - \underbrace{(1-2Mu)\cdot(m^2+L^2u^2)}_{=(m^2-2Mm^2u-2ML^2u^3+L^2u^2)}\right] \quad \Big/ \frac{d}{d\phi}$$

- rovnici zderivujeme dle ϕ:

$$2\cdot\frac{du}{d\phi}\cdot\frac{d^2u}{d\phi^2} = \frac{1}{L^2}\cdot\left[2m^2M + 6ML^2u^2 - 2L^2u\right]\cdot\frac{du}{d\phi} \quad \Big/ :2\frac{du}{d\phi} \quad \left(\frac{du}{d\phi}\neq 0\right)$$

- předpokládáme, že orbita není kruhová
  (pro kruhovou orbitu $r = \text{konst.} \Rightarrow \frac{1}{r} = u = \text{konst.} \Rightarrow \frac{du}{d\phi} = 0$)

$\Rightarrow$ Relativistická Binetova formule:

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m^2M}{L^2} + 3Mu^2}$$

- člen $3Mw^2$ je zde navíc oproti klasické verzi
  - v Newtonovské limitě pro $m \neq 0$ je zanedbatelný v porovnání s prvním členem na pravé straně:

$$\boxed{\frac{3Mw^2}{\frac{m^2 M}{L^2}}} \underset{w=\frac{1}{r}}{=} \frac{3L^2}{m^2 r^2} \underset{L=p_\phi = g_{\phi\phi} p^\phi}{=} \frac{3\cdot(g_{\phi\phi} p^\phi)^2}{m^2 r^2} = 3\cdot(r u^\phi)^2 \doteq 3(\hat{\gamma}\hat{v}^{\hat{\phi}})^2 \ll 1$$

$g_{\phi\phi} = r^2$, $\frac{p^\phi}{m} = u^\phi$

pro detailnější vysvětlení: skripta str. 186 (rovnice 12.29 – 12.31)

$$\hat{v}^{\hat{i}} = \sqrt{-g_{AA}\cdot g_{ii}}\cdot\frac{u^i}{\tilde{E}} \Rightarrow (\hat{v}^{\hat{\phi}})^2 = -g_{AA}\cdot g_{\phi\phi}\cdot\left(\frac{u^\phi}{\tilde{E}}\right)^2 =$$

$$\left(= -g_{AA}\cdot \underbrace{g_{\phi\phi}}_{=r^2}\cdot\left(\frac{1}{\tilde{E}}\cdot\frac{L}{mr^2}\right)^2 = -\frac{g_{AA}}{g_{\phi\phi}}\cdot\frac{\tilde{L}^2}{\tilde{E}^2} = \frac{l^2}{r^2}\cdot\left(1-\frac{2M}{r}\right) \right)$$

$\frac{L}{m} = \tilde{L}$, $g_{\phi\phi} = r^2$

$-g_{AA} = 1 - \frac{2M}{r}$, $g_{\phi\phi} = r^2$, $\frac{\tilde{L}}{\tilde{E}} = l$

$$\Rightarrow (\hat{v}^{\hat{\phi}})^2 = -\frac{g_{AA}}{g_{\phi\phi}}\cdot\frac{\tilde{L}^2}{\tilde{E}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{L}^2}{r^2} = \frac{L^2}{m^2 r^2} = \frac{(\hat{v}^{\hat{\phi}})^2}{-g_{AA}}\cdot\tilde{E}^2 = \frac{(\hat{v}^{\hat{\phi}})^2}{\underbrace{1-\frac{2M}{r}}_{\to 1}}\cdot\underbrace{\frac{E^2}{m^2}}_{=\hat{\gamma}^2} \xrightarrow{r \gg M} (\hat{\gamma}\hat{v}^{\hat{\phi}})^2$$

$\parallel$

$r^2 (u^\phi)^2 = (r u^\phi)^2$

$u^\phi = \frac{L}{mr^2} = \frac{\tilde{L}}{r^2}$

- kde $\hat{v}^{\hat{\phi}}$ je lineární tangenciální rychlost částice, kterou naměří vzdálený statický pozorovatel
- a $\hat{\gamma}$ je příslušný Lorentzův faktor

- Pro případ pohybu ve slabém poli (např. Sluneční soustava) lze řešit Binetovu rovnici iterativně = nejprve bez relativistického členu a potom s tímto členem jako s malou perturbací
  - toho využijeme při výpočtu advance perihelia, na kterou se hned podíváme

Advance perihelia

- Máme vázanou oběžnou dráhu hmotného testovacího tělesa
- řešíme rovnici: $\dfrac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \dfrac{M}{\tilde{L}^2}$ (Binet bez relativistického členu)

$\tilde{L} := \dfrac{L}{m}$

- homogenní řešení: $u_H = A \cdot \cos(\phi - \phi_0)$ (BÚNO $\phi_0 = 0$ - stačí upravit počátek ϕ)
- partikulární řešení: $u_P = \dfrac{M}{\tilde{L}^2}$

=> Dostáváme nultou aproximaci:

$$\boxed{u_{(0)} = \frac{M}{\tilde{L}^2} \cdot (1 + A\cos\phi)}$$ = Newtonovo řešení Keplerova problému

- Nás dále zajímají vázané orbity => dále uvažujeme řešení pro elipsu ($|A| < 1$)
- porovnáme-li výsledek s tvarem běžným v klasické mechanice:

$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1 + e \cdot \cos\phi}{p}$ tak: => $p = \dfrac{\tilde{L}^2}{M}$ a $A = e$

(kde $p = \dfrac{b^2}{a} = a \cdot (1 - e^2)$)

- Nyní přejdeme k relativistické Binetově formuli:
  - řešení hledáme ve tvaru: $u = u_{(0)} + u_{(1)}$, kde $u_{(1)}$ je malá oprava k $u_{(0)}$

$$\underbrace{\cancel{\frac{d^2 u_{(0)}}{d\phi^2} + u_{(0)}}}_{= \frac{M}{\tilde{L}^2}} + \frac{d^2 u_{(1)}}{d\phi^2} + u_{(1)} = \cancel{\frac{M}{\tilde{L}^2}} + 3M(u_{(0)} + u_{(1)})^2$$

$$\frac{d^2 u_{(1)}}{d\phi^2} + u_{(1)} = 3M u_{(0)}^2 + \underbrace{\cancel{3M u_{(1)}^2} + \cancel{6M u_{(0)} u_{(1)}}}_{\text{zanedbáme}} = \frac{3M^3}{\tilde{L}^4}(1 + 2e\cos\phi + e^2 \cdot \cos^2\phi)$$

dosazujeme za $u_{(0)}^2$, kde $A = e$

- $u_{(1)}$ je malé => $u_{(1)}^2$ je malé

=> $u_{(0)} \cdot u_{(1)} = u_{(1)} \cdot \dfrac{1}{u_{(0)}}$ = "malé" · "malé"

· Pro Sluneční soustavu: $e \ll 1$ => zanedbáme e^2 člen

=> Máme: $\dfrac{d^2 u_{(1)}}{d\phi^2} + u_{(1)} = \dfrac{3M^3}{\tilde{L}^4}\cdot(1+2e\cos\phi)$

- partikulární řešení: $u_{(1)p} = \dfrac{3M^3}{\tilde{L}^4}\cdot(1+e\phi\sin\phi)$

Zk.: $\dfrac{d^2}{d\phi^2}\left(\dfrac{3M^3}{\tilde{L}^4}\cdot(1+e\phi\sin\phi)\right) + \left(\dfrac{3M^3}{\tilde{L}^4}\cdot(1+e\phi\sin\phi)\right) =$

$= \dfrac{3M^3}{\tilde{L}^4}\cdot\Big(1+e\phi\cdot\sin\phi + e\underbrace{\dfrac{d^2}{d\phi^2}\cdot(\phi\sin\phi)}_{=\frac{d}{d\phi}(\sin\phi+\phi\cos\phi) = (\cos\phi+\cos\phi-\phi\sin\phi)}\Big) = \bullet$

$\bullet = \dfrac{3M^3}{\tilde{L}^4}\cdot\left(1+\cancel{e\phi\sin\phi}+2e\cos\phi-\cancel{e\phi\sin\phi}\right)$ ✓

=> Celkové řešení: $u = u_{(0)} + u_{(1)} = \dfrac{M}{\tilde{L}^2}\cdot(1+e\cos\phi) + \dfrac{3M^3}{\tilde{L}^4}\cdot(1+e\phi\sin\phi)$

· Pro hezčí tvar řešení využijeme aproximace malých úhlů

- ve Sluneční soustavě platí: $\dfrac{3M^2}{\tilde{L}^2} = \dfrac{3M}{p} \approx \dfrac{3M}{a} \ll 1$

$p = \dfrac{\tilde{L}^2}{M}$ $\quad p = a\cdot(1-e^2) \approx a$

- proto platí: $\dfrac{3M^2}{\tilde{L}^2}\phi \approx \sin\left(\dfrac{3M^2}{\tilde{L}^2}\phi\right)$ a $1 \approx \cos\left(\dfrac{3M^2}{\tilde{L}^2}\phi\right)$

$u = \dfrac{M}{\tilde{L}^2}\cdot\Big[1+\dfrac{3M^2}{\tilde{L}^2} + e\cdot\Big(\cos\phi + \underbrace{\dfrac{3M^2}{\tilde{L}^2}}_{\text{toto je zhruba sinus}}\cdot\phi\cdot\sin\phi\Big)\Big] =$

$= \dfrac{M}{\tilde{L}^2}\cdot\left\{1+\dfrac{3M^2}{\tilde{L}^2} + e\cdot\left[\cos\left(\dfrac{3M^2}{\tilde{L}^2}\phi\right)\cdot\cos\phi + \sin\left(\dfrac{3M^2}{\tilde{L}^2}\cdot\phi\right)\cdot\sin\phi\right]\right\} =$

vedle kosinu ϕ jsme napsali jedničku jako kosinus

$= \dfrac{M}{\tilde{L}^2}\cdot\left[1+\dfrac{3M^2}{\tilde{L}^2} + e\cdot\cos\left(\phi - \dfrac{3M^2}{\tilde{L}^2}\phi\right)\right]$

malá modifikace parametru p ← šest

důležité! → pohyb pericentra (*)

- dvě relativistické korekce

- kosinus nabývá stejné hodnoty po $2\pi + 2\pi\cdot\dfrac{3M^2}{\tilde{L}^2}$

=> celá oběžná dráha se po jednom oběhu otočí o úhel: $\boxed{\delta\phi = \dfrac{6\pi M^2}{\tilde{L}^2} = \dfrac{6\pi M}{a\cdot(1-e^2)}}$

(*) otočení je v "prográdním" směru (ve směru oběhu)
=> advance pericentra
=> relativistický střed přitahuje silněji než Newtonovský

10 km 1-2 $M_\odot$ neutron star ; 7-16× seconds , 10^{11} T

precession - misalignment with the dipole axis

1967

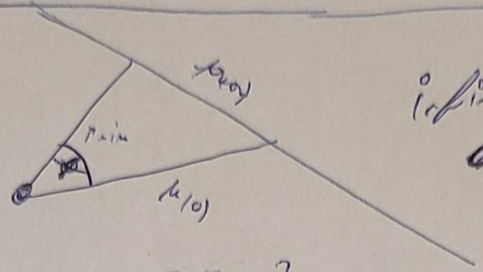
1971 - pulsar orbits another neutron star

2003 - two pulsars 800 000 km 7 mm/per day ⇒ quadrupole 2.4 hours orbital period

17° per year 3600 orbits

2020 Nobel prize - black holes in the center of galaxies

$u_{(0)} = \frac{\cos\phi}{r_{min}}$



infinite speed of light

$$\frac{d^2(u_{(0)}+u_{(1)})}{d\phi^2} + u_{(0)} + u_{(1)} = 3M u_{(0)}^2 + 6M u_{(0)} u_{(1)} + 3M u_{(1)}^2$$

$$\frac{d^2 u_{(1)}}{d\phi^2} + u_{(1)} = \text{— '' —}$$

$$u_{(0)} \gg u_{(1)}$$

$$\gg \qquad \gg \qquad \frac{6M}{r_{min}} \quad \frac{6GM}{c^2 r_{min}} \ll 1$$

$$\frac{d^2 u_{(1)}}{d\phi^2} + u_{(1)} = \frac{3M\cos^2\phi}{r_{min}^2} = \frac{3M}{2r_{min}^2}(1+\cos 2\phi)$$

$$u_{(1)} = A + B\cos 2\phi + C\sin 2\phi$$

$$u_{(1)} = \frac{M}{2(r_{min})^2}(3-\cos 2\phi) \qquad A = \frac{3M}{2r_{min}^2} \qquad B = -\frac{M}{2r_{min}^2}$$

$$u = \frac{\cos\phi}{r_{min}} + \frac{M}{2(r_{min})^2}(3-\cos 2\phi) = \frac{\cos\phi}{r_{min}} + \frac{M}{r_{min}^2}(2-\cos^2\phi)$$

for any $u \to 0$

$$\cos\phi = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) \approx \frac{\pi}{2}-\phi$$

$$0 = \frac{\pi}{2} - \phi + \frac{2M}{r_{min}} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} + \frac{2M}{r_{min}} \qquad \cos^2 \approx 0$$

$$\delta\phi = \frac{4M}{r_{min}} = \frac{4GM}{c^2 r_{min}}$$ orbitálny uhol

aberration
deformation
Doppler effect - [illegible]
gravitational lensing

Mach - brightening of stars
1936

1979 dark matter real time brightening