Čela vln v teoriích pole

- rozebrání tohoto problému v různých polních teoriích nám umožní lépe pochopit tzv. sendvičovou grav. vlnu
- Elektron v klidu budí statické coulombické pole
  → když s ním zakmitáme, začnou se od něho šířit elmag. vlny
  → analogicky v OTR – nesférický výbuch supernovy
  → budou nás zajímat podmínky na rozhraní vlna – statické pole

- pohyb zdroje v $t=0$ nebyl analytický ⇒ pole na rozhraní také nebude analytické – O jaký typ neanalytičnosti půjde?
- z elektrostatiky víme, že při průchodu plochou s plošnou hustotou náboje se potenciál mění spojitě, ale normálové složky pole skokem; při průchodu oddělující plochou mezi prostorovým nábojem a vakuem se mění intenzita spojitě, nikoliv však první derivace intenzity (druhá derivace potenciálu) → zde se jedná o přechod mezi vakuem a látkou, může ale být pole neanalytické mezi dvěma oblastmi ve vakuu?
- historie čela vlny bude nadplocha – v případě elmag. a grav. vlny to bude nulová (světelná) nadplocha

- Budeme řešit Cauchyho problém → řešení PDR na nějaké množině s počátečními nebo okrajovými podmínkami

→ charakteristické plochy (z teorie PDR 2. řádu) = = plochy, podél nichž řešení hyperbolických PDR 2. řádu mohou být nespojitá

→ charakteristiky identifikujeme s čelami vln

$\boxed{\text{Skalární pole}}$

- předp. skalární pole Φ splňující vlnovou rovnici: $\Phi(x^\mu)$

$$\Box\Phi \equiv g^{\alpha\beta}\Phi_{;\alpha\beta} = 0 \quad ,$$

kde předp. prostoročas s pevně zadanou geometrií $g_{\alpha\beta}$.

Kovariantní derivaci přepíšeme pomocí parciální derivace:

$$\Box\Phi = g^{\alpha\beta}\Phi_{;\alpha\beta} = \Phi^{,\beta}{}_{;\beta} = (g^{\alpha\beta}\Phi_{,\alpha})_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\cdot g^{\alpha\beta}\Phi_{,\alpha}\right)_{,\beta} =$$

$$= g^{\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta} + (\text{členy bez 2. derivací } \Phi) =$$

$$= g^{00}\Phi_{,00} + (\text{členy neobsahující } \Phi_{,00}) = 0 \qquad (*)$$

- Mějme počáteční nadplochu S $(x^0 = t = \text{konst})$ a ní zadaná tzv. Cauchyho data, t.j. $\Phi(x^i, x^0 = \text{konst})$, a $\Phi_{,0}(x^i, x^0 = \text{konst})$, kde x^i jsou souřadnice na nadploše S.

$\equiv \frac{\partial\Phi}{\partial x^0}(x^i, x^0 = \text{konst})$

Pak můžeme spočítat prostorové derivace: $\Phi_{,i} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$

a $\Phi_{,0i} \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^0 \partial x^i}$ a $\Phi_{,ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j}$.

Z rovnice (*) pak můžeme vyjádřit $\Phi_{,00}$, pokud $g^{00} \neq 0$.

Rovnici (*) můžeme dále derivovat podle času, vyjadřovat z ní časové derivace Φ libovolného řádu a určit tak Taylorovým rozvojem, alespoň v blízkosti S, jednoznačně vývoj pole Φ. Cauchyho problém má jednoznačné řešení.

- Nechť je nyní nadplocha ~~S určena~~, na níž zadáme Cauchyho data, určena obecným vztahem:

$$u(x^\mu) = konst$$

Pak lze přejít do nových souřadnic, v nichž $x'^0 = u$. V novém systému má vlnová rovnice (*) a Cauchyho problém lze vyřešit pouze když:

$$g'^{00} = \frac{\partial x'^0}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^0}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} = \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} \neq 0$$

V případě, že $g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 0$, kde $u_\alpha \equiv \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}$,

tj. gradient u_α k S je nulový vektor (S se nazývá nulovou nadplochou), nelze v blízkosti S vyřešit jednoznačně vlnovou rovnici.

Cauchyho problém ani nelze formulovat.

- zde se S nazývá charakteristikou vlnové rovnice

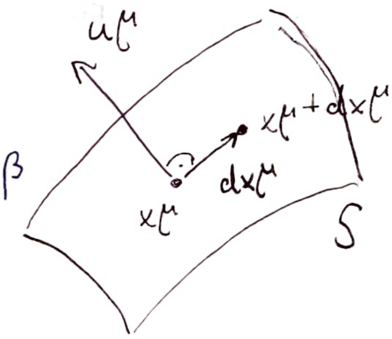
- Ukážeme, že když S je charakteristikou, pak při jejím průchodu se druhé derivace $\Phi_{,\alpha\beta}$ mohou měnit <u>nespojitě</u>.

Předp.: $\Delta\Phi = 0$, $\Delta[\Phi_{,\alpha}] = 0$, $\Delta[\Phi_{,\alpha\beta}] = \Psi_{\alpha\beta} = \Psi_{\beta\alpha}$

Předp., že S je obecná nadplocha $u(x^\mu) = \text{konst}$.

Zvolme na ní 2 blízké body x^μ a $x^\mu + dx^\mu$,

tj. $u_\mu \, dx^\mu = 0$,



potom $\Phi_{,\alpha}(x^\mu + dx^\mu) = \Phi_{,\alpha}(x^\mu) + \Phi_{,\alpha\beta}(x^\mu)\, dx^\beta$

pro skoky těchto veličin potom platí:

$$\Delta[\Phi_{,\alpha}(x^\mu + dx^\mu)] = \Delta[\Phi_{,\alpha}(x^\mu)] + \Delta[\Phi_{,\alpha\beta}(x^\mu)]\, dx^\beta$$

$$\Rightarrow \quad \Delta[\Phi_{,\alpha\beta}(x^\mu)]\, dx^\beta = \Psi_{\alpha\beta}\, dx^\beta = 0 .$$

Lagrangeovy multiplikátory: $(\Psi_{\alpha\beta} + \lambda_\alpha u_\beta)\, dx^\beta = 0$,

určíme λ_α tak, aby dx^β byla nezávislá, a proto

$$\Psi_{\alpha\beta} + \lambda_\alpha u_\beta = 0$$

Dále $\Psi_{\alpha\beta} = \Psi_{\beta\alpha} \Rightarrow \lambda_\alpha u_\beta = \lambda_\beta u_\alpha \Rightarrow \lambda_\alpha = \lambda u_\alpha$

Označím: $\lambda \equiv -\Psi$, $\lambda_\alpha = -\Psi u_\alpha$, $\Psi_{\alpha\beta} - \Psi u_\alpha u_\beta = 0$

Celkově: $\Delta\left[\Phi_{,\alpha\beta}\right] = \psi_{\alpha\beta} = \psi u_\alpha u_\beta$

Vlnová rovnice je splněna na obou stranách S. Tedy:

$$0 = \Delta\left[\Box\Phi\right] = \Delta\left[g^{\alpha\beta}\Phi_{;\alpha\beta}\right] = \Delta\left[g^{\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta}\right] + \Delta\left[\text{členy bez 2 der. } \Phi\right] \overset{0}{=}$$

$$\overset{!}{=} g^{\alpha\beta}\Delta\Phi_{,\alpha\beta} = \psi g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta$$

Jestliže S není nulová nadplocha ($g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \neq 0$)

$\Rightarrow \psi = 0 = \Delta\left[\Phi_{,\alpha\beta}\right]$. Nespojitosti druhých derivací pole mohou existovat pouze při průchodu charakteristickou nadplochou, tj. čelem vlny.

$\boxed{\text{Gravitační pole}}$

metrika $\longleftrightarrow$ potenciál, afinní konexe $\longleftrightarrow$ intenzita,

$g_{\alpha\beta} \longleftrightarrow \Phi$ $\qquad$ $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \longleftrightarrow I_j = \Phi_{,j}$

Riemannův tenzor $\longleftrightarrow$ nehomogenity

$R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} \longleftrightarrow \Phi_{,ij}$ $\qquad$ $(R_{00} = \Delta\Phi = 4\pi G\rho)$

- Afinní konexe lze vynulovat přechodem k LIS, Riemannův tenzor nikoliv

Riemannův tenzor $\longleftrightarrow$ tenzor elmag pole

(invariance vůči kalibračním transformacím

$A_\mu \longleftrightarrow g_{\alpha\beta}$)

- Při průchodu nadplochou nespojitosti S se mění

$g_{\iota\kappa}$ a $g_{\iota\kappa,\lambda}$ spojitě, druhé derivace $g_{\iota\kappa,\lambda\mu}$

a tedy i $R_{\mu\nu\kappa\lambda}$ nespojitě.

- Nadplocha nespojitosti je dána vztahem $u(x^\mu) = \text{konst}$
- Analogicky jako v případě skalárního pole platilo

$\Delta[\Phi_{,\alpha\beta}] = \Psi u_\alpha u_\beta$, kde $u_\alpha \equiv \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}$ je gradient k S,

bude zde platit
$$\Delta[g_{\iota\kappa,\lambda\mu}] = H_{\iota\kappa} u_\lambda u_\mu$$

Z Riemannova tenzoru:

$$R_{\iota\kappa\lambda\mu} = \cancel{\Gamma_{\iota\mu\kappa,\lambda} - \Gamma_{\iota\lambda\kappa,\mu} + \Gamma_{\sigma}}$$

$$\frac{1}{2}\left(g_{\iota\mu,\kappa\lambda} + g_{\kappa\lambda,\iota\mu} - g_{\iota\lambda,\kappa\mu} - g_{\kappa\mu,\iota\lambda}\right) +$$

$$+ g_{\rho\sigma}\left(\Gamma^\rho{}_{\iota\mu}\Gamma^\sigma{}_{\kappa\lambda} - \Gamma^\rho{}_{\iota\lambda}\Gamma^\sigma{}_{\kappa\mu}\right)$$

pak máme díky spojitosti $g_{\iota\kappa}$ a $g_{\iota\kappa,\lambda}$:

$$\Delta R_{\iota\kappa\lambda\mu} = \frac{1}{2}\Big\{H_{\iota\mu} u_\kappa u_\lambda + H_{\kappa\lambda} u_\iota u_\mu - H_{\iota\lambda} u_\kappa u_\mu -$$

$$- H_{\kappa\mu} u_\iota u_\lambda\Big\} = 2\, u_{[\iota} H_{\kappa][\lambda} u_{\mu]} \qquad (*)$$

- Podobně jako v případě skalárního pole, jsme museli pro odvození nulového charakteru S použít rovnice pole, využijeme nyní ER rovnic ve vakuu $R_{\varkappa\mu} = 0$:

$$0 = \Delta R_{\varkappa\mu} = \Delta\left[g^{\iota\lambda} R_{\iota\varkappa\lambda\mu}\right] = g^{\iota\lambda}\,\Delta R_{\iota\varkappa\lambda\mu} = \qquad (**)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ H_{\iota\mu} u^{\iota} u_{\varkappa} + H_{\varkappa\iota} u^{\iota} u_{\mu} - H_{\iota}{}^{\iota} u_{\varkappa} u_{\mu} - H_{\varkappa\mu} u_{\iota} u^{\iota} \right\}$$

- Abychom dokázali, že $u_\iota u^\iota = 0$, vynásobíme rovnici $u_\rho u_\sigma$ a antisymetrizujeme ji v $(\varkappa, \rho)$ a v (μ, σ).

Potom: $0 = u_{[\rho} H_{\varkappa][\mu} u_{\sigma]} u_\iota u^\iota$,

resp. $\underbrace{(\Delta R_{\rho\varkappa\mu\sigma})(u_\iota u^\iota) = 0}$

- Riemannův tenzor ve vakuu může být nespojitý $(\Delta R_{\rho\varkappa\mu\sigma} \neq 0)$ na nějaké nadploše $S \Leftrightarrow u_\iota u^\iota = 0$, nadplocha S je nulová.

$\left(H_{\iota\mu} u^\iota u_\varkappa u_\rho u_\sigma \rightarrow H_{\iota[\mu} u_{\sigma]} u_{[\varkappa} u_{\rho]} = 0 \right)$

- Rozborem Cauchyho problému pro ER lze podobně jako u skal. pole a elmag. pole ukázat, že nulové nadplochy jsou char. nadplochami.

- Předp., že S je nulová. Pak $\Delta R_{\iota\varkappa\lambda\mu}$ má tvar $(*)$ a $H_{\iota\mu}$ musí splňovat $(**)$, kde $\ldots u_\iota u^\iota$ vypadne

Po vynásobení (**) u_ν a antisymetrizace v (μ,ν) máme:

$$0 = H_{2[\mu} u_{\nu]} u^2 u_\varkappa + H_{\varkappa 2} u^2 u_{[\mu} u_{\nu]} - H_2{}^2 u_\varkappa u_{[\mu} u_{\nu]} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(H_{2\mu} u_\nu - H_{2\nu} u_\mu\right) u^2 u_\varkappa$$

$$\Rightarrow \quad H_{2\mu} u^2 u_\nu u_\varkappa - H_{2\nu} u^2 u_\mu u_\varkappa = 0$$

označ.: $\mathcal{H}_\mu \equiv H_{2\mu} u^2$, dostaneme $\mathcal{H}_\mu u_\nu u_\varkappa - \mathcal{H}_\nu u_\mu u_\varkappa = 0$

$\Rightarrow \quad \mathcal{H}_\mu u_\nu = \mathcal{H}_\nu u_\mu$, proto $\mathcal{H}_\mu = \mathcal{H} \cdot u_\mu$

Dosadíme do (**):

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \mathcal{H}_\mu u_\varkappa + \mathcal{H}_\varkappa u_\mu - H_2{}^2 u_\varkappa u_\mu \\ 0 &= \mathcal{H} u_\mu u_\varkappa + \mathcal{H} u_\varkappa u_\mu - H_2{}^2 u_\varkappa u_\mu \end{aligned}\right\} \mathcal{H} = \frac{1}{2} H_2{}^2$$

Tedy při průchodu nulovou plochou nespojitosti (čelem vlny) se $g_{2\varkappa,\lambda\mu}$ a $R_{\rho\varkappa\lambda\mu}$ mění výše popsaným způsobem, kde platí: $\quad H_{2\mu} u^2 = \frac{1}{2} H_\nu{}^\nu u_\mu \,. \qquad (H)$

<u>Intermezzo:</u> V analogii s elmag tenzorem můžeme zavést duální tenzory k Weylovu tenzoru:

$$C^{2\varkappa}{}_{\lambda\mu} = R^{2\varkappa}{}_{\lambda\mu} - 2\,\delta^{[2}{}_{[\lambda} R^{\varkappa]}{}_{\mu]} + \frac{1}{3}\delta^{[2}{}_{[\lambda} \delta^{\varkappa]}{}_{\mu]} R$$

a Riemannovu tenzoru:

Levý duál: $^*R_{\iota\varkappa\lambda\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\iota\varkappa\rho\sigma} R^{\rho\sigma}{}_{\lambda\mu}$

Pravý duál: $R^*_{\iota\varkappa\lambda\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\rho\sigma} R_{\iota\varkappa}{}^{\rho\sigma}$

Lze ukázat: $^*C_{\iota\varkappa\lambda\mu} = C^*_{\iota\varkappa\lambda\mu}$

Ve vakuu dostáváme: ~~$^*R_{\iota\varkappa}$~~ $C_{\iota\varkappa\lambda\mu} = R_{\iota\varkappa\lambda\mu}$

$\Rightarrow \quad ^*R_{\iota\varkappa\lambda\mu} = R^*_{\iota\varkappa\lambda\mu}$

- Nyní se vraťme k nespojitostem $R_{\mu\nu\varkappa\lambda}$ při průchodu čelem vlny
- Na základě podmínek: $u^\lambda u_\lambda = 0$, (H), (*) a z definice duálu k $R_{\mu\nu\varkappa\lambda}$ zjistíme, že skoky $R_{\mu\nu\varkappa\lambda}$ splňují:

$$(\Delta R_{\iota\varkappa\lambda\mu})(\Delta R^{\iota\varkappa\lambda\mu}) = (\Delta R_{\iota\varkappa\lambda\mu})(\Delta\, ^*R^{\iota\varkappa\lambda\mu}) = 0,$$

$$(\Delta R_{\iota\varkappa\lambda\mu})\, u^\mu = (\Delta\, ^*R_{\iota\varkappa\lambda\mu})\, u^\mu = 0$$

v analogii se skoky elmag. tenzoru

- stejné vztahy splňuje Riemannův tenzor rovinné gravitační vlny, grav. pole s těmito algebr. vlastnostmi se nazývá nulové pole, resp. pole typu N
- často se místo o čele vln mluví o rázových vlnách

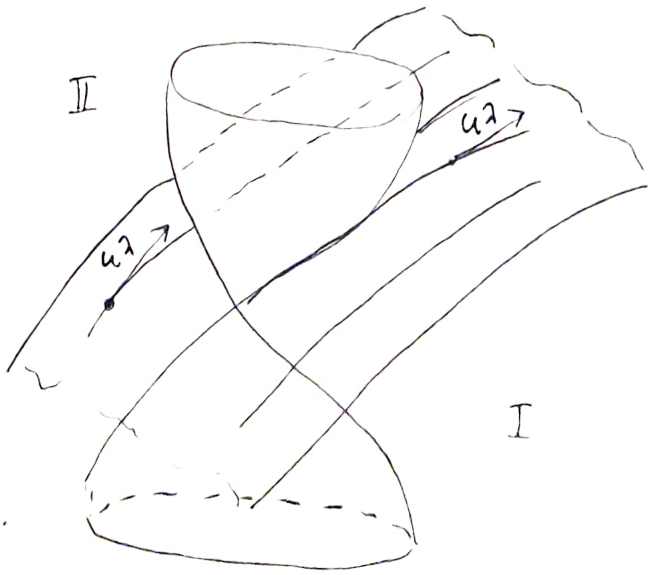
- vyšetřili jsme skalární, elmag. a grav. rázové vlny
- všechna pole se řídí hyperbolickými PDR
- nadplochy s nespojitostmi byly vždy nulové, v teorii hyperbol. PDR tzv. charakteristiky
- normály k charakteristice – pole nulových vektorů u_λ, které v ní leží
  - → tato vekt. pole jsou tečná ke křivkám, které se nazývají bicharakteristiky
  - → bicharakteristiky jsou nulovými geodetikami
- Zvolme LIS: $w_\lambda \equiv u_{\lambda;\mu} u^\mu = u_{\lambda,\mu} u^\mu$.

Neboť $u_\lambda \equiv \frac{\partial u}{\partial x^\lambda} = u_{,\lambda}$, platí $u_{\lambda,\mu} = u_{\mu,\lambda}$,

tj. $w_\lambda = u_{\mu,\lambda} u^\mu = \frac{1}{2}(u_\mu u^\mu)_{,\lambda} \overset{8}{=} 0$.

Protože w_λ je vektor, musí být nulový v každém systému. Rovnice $u_{\lambda;\mu} u^\mu$ je rovnice geodetiky.

- Uvažovali jsme rázové vlny různého řádu
  - → skal. a grav. pole: $p=2$, nespojitosti v druhých derivacích veličin Φ a $g_{\mu\nu}$.



→ elmag. pole : $p=1$; nespojitosti v $F_{\mu\nu}$, tj. v prvních derivacích potenciálu A_λ

→ Φ, A_λ, $g_{\mu\nu}$ jsou „na stejné úrovni"

– lze rozebírat i rázové vlny vyšších řádů

→ nespojité vyšší derivace → výsledky stejné

– většina výsledků pro grav. záření založena na přibližných metodách

→ celá vln rozebrané v přesné teorii díky linearitě ER v $g_{\mu\nu,\varkappa\lambda}$.