1 Lorentzova transformace

Lorentzova transformace

Lorentzova transformace (LT) je lineární transformace mezi dvěma inerciálními vztažnými soustavami, které se vůči sobě pohybují konstantní rychlostí. Zachovává časoprostorové intervaly a rychlost světla c.

- **Speciální Lorentzova transformace (SLT)**: Forma LT, která se vztahuje na pohyb mezi dvěma soustavami podél jedné osy, obvykle bez zahrnutí rotací nebo pohybu v jiných dimenzích.
- **Lorentzovský boost (LB)**: Specifický typ LT, která popisuje změnu rychlosti mezi dvěma inerciálními soustavami bez zahrnutí jakékoliv rotace.
- **Obecná Lorentzova transformace (OLT)**: Nejkomplexnější forma LT, která zahrnuje nejen boosty (změny rychlosti), ale i rotace souřadnicových soustav.

1.1 Speciální Lorentzova transformace

Uvažujeme transformaci mezi souřadnými soustavami Σ a Σ', Σ' se vůči Σ pohybuje konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}$ o velikosti v ve směru osy x. Souřadné osy jednotlivých soustav jsou vzájemně rovnoběžné (x je rovnoběžné s x', y a y' a z s z'). V čase $t = t' = 0$ počátky obou souřadných souřadných soustav splývají. O takové dvojici souřadných soustav se hovoří jako o *synchronizované* či *v standardním nastavení*. Dále definujeme Lorentzův faktor odpovídající rychlosti o velikosti v: $\gamma_v := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Speciální Lorentzova transformace ve směru osy x: $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}=(v,0,0)$

Přímá transformace
$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_v & -\frac{\gamma_v}{c}v \\ -\frac{\gamma_v}{c}v & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

Inverzní transformace
$$\begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_v & +\frac{\gamma_v}{c}v \\ +\frac{\gamma_v}{c}v & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix}$$

1.2 Lorentzovský boost v obecném směru

Oproti SLT má vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$ obecný směr.

Lorentzovský boost v obecném směru: $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}=(v_x,v_y,v_z)$

Přímá transformace
$$\begin{bmatrix} ct' \\ \boldsymbol{x}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_v & -\frac{\gamma_v}{c}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \\ -\frac{\gamma_v}{c}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{I} + \frac{\gamma_v^2}{\gamma_v+1}\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix}$$

Inverzní transformace
$$\begin{bmatrix} ct \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_v & +\frac{\gamma_v}{c}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \\ +\frac{\gamma_v}{c}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{I} + \frac{\gamma_v^2}{\gamma_v+1}\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ \boldsymbol{x}' \end{bmatrix}$$

Matici přímého Lorentzovského boostu označme $\mathbb{B}(\boldsymbol{v})$ a matici inverzního Lorentzovského boostu označme $\mathbb{B}^{-1}(\boldsymbol{v})$:

$$\mathbb{B}(\boldsymbol{v}) := \begin{bmatrix} \gamma_v & -\frac{\gamma_v}{c}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \\ -\frac{\gamma_v}{c}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{I} + \frac{\gamma_v^2}{\gamma_v+1}\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}}{c^2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{B}^{-1}(\boldsymbol{v}) := \begin{bmatrix} \gamma_v & +\frac{\gamma_v}{c}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \\ +\frac{\gamma_v}{c}\boldsymbol{v} & \boldsymbol{I} + \frac{\gamma_v^2}{\gamma_v+1}\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}}{c^2} \end{bmatrix}.$$

Zřejmě pak platí vztah: $\boxed{\mathbb{B}^{-1}(\boldsymbol{v}) = \mathbb{B}(-\boldsymbol{v})}$

2 Skládání 3-rychlostí

2.1 Transformace 3-rychlosti při SLT

Uvažujme standardní nastavení, pak při transformaci rychlosti $\boldsymbol{u}'$ zadané v soustavě Σ' do soustavy Σ dochází ke změně všech složek podle vztahů:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1+\frac{vu'_x}{c^2}}, \qquad u_y = \frac{u'_y}{\gamma_v\left(1+\frac{vu'_x}{c^2}\right)}, \qquad u_z = \frac{u'_z}{\gamma_v\left(1+\frac{vu'_x}{c^2}\right)}$$

Odvození vztahu pro transformaci 3-rychlosti při SLT

Výše uvedené vztahy lze jednoduše odvodit použitím vztahu pro SLT ve standardním nastavení na diferenciály souřadnic:

$$\mathrm{d}t = \gamma_v(\mathrm{d}t' + \tfrac{v}{c^2}\mathrm{d}x'), \qquad \mathrm{d}x = \gamma_v(\mathrm{d}x' + v\mathrm{d}t'), \qquad \mathrm{d}y = \mathrm{d}y', \qquad \mathrm{d}z = \mathrm{d}z'$$

Odvození zde uvedu pro komponenty u_x a u_y, pro u_z je analogické k u_y

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma_v}{\gamma_v}\frac{\mathrm{d}x' + v\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t' + \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x'} = \frac{\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y'}{\gamma_v\left(\mathrm{d}t' + \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x'\right)} = \frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}}{\gamma_v\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\right)} = \frac{u'_y}{\gamma_v(1 + \frac{vu'_x}{c^2})}$$

2.2 Skládání obecných 3-rychlostí

Pro popis obecné situace mírně změníme zavedené značení. Uvažujme trojici inerciálních vztažných soustav Σ, Σ' a Σ''. Σ' se vůči Σ pohybuje obecnou rychlostí $\boldsymbol{v}$, Σ'' se vůči Σ' pohybuje obecnou rychlostí $\boldsymbol{u}$ (zde označené bez čárky). Cílem bude získat vztah pro rychlost $\boldsymbol{u}$ v soustavě Σ, tedy pro složení rychlostí $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{u}$.

Abychom odlišili *relativistické skládání 3-rychlostí* od obyčejného vektorového součtu, označíme relativistické složení 3-rychlosti $\boldsymbol{v}$ s $\boldsymbol{u}$ jako $\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$, které je dáno následujícím vztahem.

Relativistické složení 3-rychlostí

$$\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u} = \frac{1}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}}\left[\left(1 + \frac{1}{c^2}\frac{\gamma_v}{1+\gamma_v}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{v} + \frac{1}{\gamma_v}\boldsymbol{u}\right], \gamma_{\boldsymbol{v}\oplus\boldsymbol{u}} = \gamma_v\gamma_u\left(1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}\right)$$

Z tvaru vztahu pro $\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$ můžeme nahlédnout několik vlastností relativistického skládání 3-rychlostí:

(1) nelinearita $(\lambda\boldsymbol{v}) \oplus (\lambda\boldsymbol{u}) \neq \lambda(\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u})$

(2) skládání opačných rychlostí $(-\boldsymbol{v}) \oplus (-\boldsymbol{u}) = -(\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u})$

(3) nekomutativita $\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}$

(4) neasociativita $\boldsymbol{v} \oplus (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{w}) \neq (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}) \oplus \boldsymbol{w}$

Odvození vztahu pro skládání obecných 3-rychlostí

Pro získání vztahu pro relativistické složení obecných 3-rychlostí využijeme triku, ve kterém si výsledek složení rychlostí $\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$ (tedy rychlost $\boldsymbol{u}$ transformovanou do systému Σ) a rychlost $\boldsymbol{u}$ rozštěpíme na rovnoběžnou a kolmou složku vůči rychlosti $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u})_\parallel + (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u})_\perp, \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_\parallel + \boldsymbol{u}_\perp$$

Toto rozštěpení nám po zavedení kartézské báze $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ v soustavě Σ takové, aby platilo

$$(\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u})_\parallel = (v \oplus u)_x \boldsymbol{e}_x, \qquad (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u})_\perp = (v \oplus u)_y \boldsymbol{e}_y + (v \oplus u)_z \boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x,$$

umožní využít vztahy pro transformaci 3-rychlosti při SLT ve standardním nastavení, díky kterým získáme:

$$(\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u})_\parallel = \frac{\boldsymbol{u}_\parallel + \boldsymbol{v}}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}}, \qquad (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u})_\perp = \frac{1}{\gamma_v}\frac{\boldsymbol{u}_\perp}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}}$$

Výsledný vztah pak získáme sérií algebraických úprav:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u} &= \frac{\boldsymbol{u}_\parallel + \boldsymbol{v}}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}} + \frac{1}{\gamma_v}\frac{\boldsymbol{u}_\perp}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}} = \frac{\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{v^2}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}} + \frac{1}{\gamma_v}\frac{\boldsymbol{u} - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{v^2}\boldsymbol{v}}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}} \\
&= \frac{1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{v^2}(1 - \frac{1}{\gamma_v})}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}}\boldsymbol{v} + \frac{1}{\gamma_v}\frac{1}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}}\boldsymbol{u} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}}\left[\left(1 + \frac{1}{v^2}\left(1 - \tfrac{1}{\gamma_v}\right)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{v} + \frac{1}{\gamma_v}\boldsymbol{u}\right] \\
&= \frac{1}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}}\left[\left(1 + \frac{1}{v^2}\frac{\gamma_v}{1+\gamma_v}\frac{v^2}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{v} + \frac{1}{\gamma_v}\boldsymbol{u}\right] \\
&= \frac{1}{1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}}\left[\left(1 + \frac{1}{c^2}\frac{\gamma_v}{1+\gamma_v}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{v} + \frac{1}{\gamma_v}\boldsymbol{u}\right],
\end{aligned}$$

kde jsme využili identitu

$$1 - \frac{1}{\gamma_v} = \frac{1}{1+\gamma_v}\frac{v^2}{c^2}.$$

3 Skládání Lorentzovských boostů

Použitím výsledků z minulé sekce však můžeme dojít ke zdánlivému paradoxu. Uvažujme opět trojici soustav Σ, Σ' a Σ''. Σ' se vůči soustavě Σ pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ a Σ'' se vůči Σ' pohybuje rychlostí $\boldsymbol{u}$, přičemž tyto rychlosti nejsou obecně kolineární. Připomeňme, že podle *Einsteinova principu reciprocity rychlosti (EPRR)* se Σ vůči Σ' pohybuje rychlostí $-\boldsymbol{v}$ a Σ' se vůči Σ'' pohybuje rychlostí $-\boldsymbol{u}$. Dále nastavme souřadnicové osy soustav tak, aby z pohledu Σ' byly osy Σ a Σ' rovnoběžné a zároveň opět z pohledu Σ' byly osy Σ' a Σ'' rovnoběžné. To však opět znamená, že i z pohledu Σ jsou osy Σ a Σ' rovnoběžné, stejně tak z pohledu Σ'' jsou osy Σ' a Σ'' rovnoběžné. Jak si dále ukážeme, už to nutně neznamená, že by byly osy Σ a Σ'' z pohledu těchto soustav vzájemně rovnoběžné.

Z pohledu soustavy Σ se soustava Σ'' vůči ní pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$. Zároveň se z pohledu soustavy Σ'' se soustava Σ vůči Σ'' pohybuje rychlostí $(-\boldsymbol{u}) \oplus (-\boldsymbol{v})$. Využitím vztahů z minulé sekce však získáme

$$(-\boldsymbol{u}) \oplus (-\boldsymbol{v}) = -(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \neq -(\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}),$$

tedy že vzájemné rychlosti soustav Σ a Σ'' měřené v jednotlivých soustavách nejsou opačné, což je zdánlivě v rozporu s *EPRR*. Skutečnost však není taková, že by vzájemné rychlosti soustav jakožto vektory opačné nebyly, avšak složky těchto rychlostí měřených v jednotlivých soustavách opačné nejsou. Proč tomu tak je můžeme nahlédnout ze skládání Lorentzovských boostů.

Skládání Lorentzovských boostů

Mějme trojici soustav Σ, Σ' a Σ'', označme $\mathbb{B}(\boldsymbol{v})$ matici LB provádějící transformaci $\Sigma \to \Sigma'$ a $\mathbb{B}(\boldsymbol{u})$ matici LB provádějící transformaci $\Sigma' \to \Sigma''$, tedy

$$X' = \mathbb{B}(\boldsymbol{v})X \qquad \text{a} \qquad X'' = \mathbb{B}(\boldsymbol{u})X',$$

pak matice $\mathbb{\Lambda} \coloneqq \mathbb{B}(\boldsymbol{u})\mathbb{B}(\boldsymbol{v})$ provádí transformaci $\Sigma \to \Sigma''$, tedy $X'' = \mathbb{\Lambda} X$.

Matice $\mathbb{\Lambda}$ má blokový tvar $\mathbb{\Lambda} = \begin{bmatrix} \gamma & -\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{b} & \boldsymbol{M} \end{bmatrix}$ a pro její složky platí:

$$\gamma = \gamma_v \gamma_u \left(1 + \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{c^2}\right), \qquad \boldsymbol{a} = \frac{\gamma}{c} \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{b} = \frac{\gamma}{c} \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{M} = \gamma_u \gamma_v \frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}}{c^2} + \left(\boldsymbol{I} + \frac{\gamma_u^2}{\gamma_u + 1} \frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}{c^2}\right) \left(\boldsymbol{I} + \frac{\gamma_v^2}{\gamma_v + 1} \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}}{c^2}\right)$$

Odvození složek matice $\mathbb{\Lambda}$

Složky matice $\mathbb{\Lambda}$ získáme přímo maticovým násobením matic $\mathbb{B}(\boldsymbol{u})$ a $\mathbb{B}(\boldsymbol{v})$ v tomto pořadí:

$$\gamma = \gamma_u\gamma_v + \frac{\gamma_u\gamma_v}{c^2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \gamma_u\gamma_v\left(1+\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= -\left[-\gamma_u\gamma_v\frac{\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}}{c} - \frac{\gamma_u}{c}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} - \frac{\gamma_u\gamma_v^2}{\gamma_v+1}\frac{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}}{c^2}\right]^{\mathrm{T}}\\
&= \frac{1}{c}\gamma_u\gamma_v\left(1+\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}\right)\frac{1}{1+\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}}\left[\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} + \frac{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}{\gamma_v} + \frac{\gamma_v}{1+\gamma_v}\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}\\
&= \frac{\gamma}{c}\frac{1}{1+\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}}\left[\left(1+\frac{1}{c^2}\frac{\gamma_v}{1+\gamma_v}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{v} + \frac{\boldsymbol{u}}{\gamma_v}\right] = \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{v}\oplus\boldsymbol{u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b} &= -\left[-\gamma_u\gamma_v\frac{\boldsymbol{u}}{c} - \frac{\gamma_v}{c}\boldsymbol{v} - \frac{\gamma_v\gamma_u^2}{\gamma_u+1}\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}}{c^2}\right]\\
&= \frac{1}{c}\gamma_u\gamma_v\left(1+\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}\right)\frac{1}{1+\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}}\left[\boldsymbol{u} + \frac{\boldsymbol{v}}{\gamma_u} + \frac{\gamma_u}{1+\gamma_v}\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}\boldsymbol{u}\right]\\
&= \frac{\gamma}{c}\frac{1}{1+\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}}\left[\left(1+\frac{1}{c^2}\frac{\gamma_u}{1+\gamma_u}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\right)\boldsymbol{u} + \frac{\boldsymbol{v}}{\gamma_u}\right] = \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{M} = \gamma_u\gamma_v\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}}{c^2} + \left(\boldsymbol{I} + \frac{\gamma_u^2}{\gamma_u+1}\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}{c^2}\right)\left(\boldsymbol{I} + \frac{\gamma_v^2}{\gamma_v+1}\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}}{c^2}\right)$$

Ze vztahů pro složky matice $\mathbb{\Lambda}$ a vlastností relativistického skládání 3-rychlostí, konkrétně $\boldsymbol{v}\oplus\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{v}$, si můžeme všimnout, že $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, a tedy že matice $\mathbb{\Lambda}$ není symetrická oproti matici obecného Lorentzovského boostu $\mathbb{B}$, která symetrická je. Zjišťujeme tedy důležitou vlastnost:

Složením dvou Lorentzovských boostů obecně nevzniká Lorentzovský boost.

Tento fakt lze také symbolicky zapsat jako: $\boxed{\mathbb{B}(\boldsymbol{v}\oplus\boldsymbol{u}) \neq \mathbb{B}(\boldsymbol{u})\mathbb{B}(\boldsymbol{u})}$

Lorentzovské boosty tedy netvoří grupu, obecné Lorentzovy transformace ale grupu tvoří. Lze tedy najít matici rotace $\mathbb{R}(\boldsymbol{\varphi})$:

$$\mathbb{R}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\varphi}) \end{bmatrix},$$

kde $\boldsymbol{\varphi} = \varphi \boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\varphi})$ je 3D matice rotace o úhel φ okolo osy dané jednotkovým vektorem $\boldsymbol{n}$, takovou, že:

$$\mathbb{\Lambda} = \mathbb{B}(\boldsymbol{u})\mathbb{B}(\boldsymbol{u}) = \mathbb{R}(\boldsymbol{\varphi})\mathbb{B}(\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}), \text{ kde navíc} = \mathbb{B}(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v})\mathbb{R}(\boldsymbol{\varphi})$$

Rotace zjevně patří do grupy obecných Lorentzových transformací, jelikož nemění prostoročasový interval.

Odvození maticové rovnice pro $\boldsymbol{R}$

Z požadavků na $\mathbb{R}$ můžeme odvodit rovnici pro $\boldsymbol{R}$:

$$\begin{bmatrix} \gamma & -\frac{\gamma}{c}(\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \\ -\frac{\gamma}{c}\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} & \boldsymbol{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{\gamma}{c}(\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \\ -\frac{\gamma}{c}\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u} & \boldsymbol{I} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{(\boldsymbol{v}\oplus\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}\oplus\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}}{c^2} \end{bmatrix}$$

S využitím

$$-\frac{\gamma}{c}\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = -\frac{\gamma}{c}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}) \implies \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u})$$

získáme rovnici

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R} + \frac{1}{c^2}\frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R} + \frac{1}{\gamma+1}\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$$

Pro stopu obecné rotační matice $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\varphi})$ platí vztah $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{R}) = 1 + 2\cos\varphi$, z rovnice pro $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\varphi})$

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{M} - \frac{1}{\gamma+1}\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$$

můžeme spočítáním stopy pravé strany této rovnice stanovit úhel φ (výpočet stopy pro přehlednost neuvádím):

$$\cos\varphi = \frac{(1+\gamma+\gamma_u+\gamma_v)^2}{(1+\gamma)(1+\gamma_u)(1+\gamma_v)} - 1$$

Zároveň jelikož platí $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}$, je osa rotace dána směrem vektoru $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \propto \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

Celkově jsme tedy zjistili:

Složením dvou nekolineárních Lorentzovských boostů vzniká Lorentzovský boost následovaný rotací kolem osy kolmé k oběma rychlostem.

Tato rotace bývá nazývána *Thomasova rotace*, *Thomasova-Wignerova rotace* nebo *Wignerova rotace* (přestože byla jako první objevena Émilem Borelem).

4 Thomasova precese

Thomasova precese

Thomasova precese je relativistický jev projevující se u spinu elementární částic či u rotace makroskopických setrvačníků pohybujících se po křivočarých drahách.

Uvažujme trojici inerciálních souřadných systémů Σ, Σ' a Σ'' a částici se spinem pohybující se po křivočaré dráze. Σ označuje laboratorní soustavu. Σ' označuje inerciální souřadný systém, ve kterém je v čase t měřeném v Σ spin momentálně v klidu, tedy tento inerciální souřadný systém v daném okamžiku splývá se skutečným neinerciálním souřadným systémem spinu. Σ'' označuje analogicky momentální klidový systém spinu v čase $t + \Delta t$, opět měřeném v Σ.

Pro zjednodušení značení používejme odteď bezrozměrnou rychlost $\boldsymbol{\beta} \coloneqq \boldsymbol{v}/c$. V čase t se Σ' vůči laboratorní soustavě Σ pohybuje rychlostí $\boldsymbol{\beta}$, pro transformaci souřadnic tak platí

$$X' = \mathbb{B}(\boldsymbol{\beta})X.$$

V čase $t+\Delta t$ se Σ'' vůči laboratorní soustavě Σ pohybuje rychlostí $\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta}$, a tedy platí

$$X'' = \mathbb{B}(\boldsymbol{\beta} + \Delta\boldsymbol{\beta})X.$$

Uvažujeme, že časový přírůstek Δt i přírůstek rychlosti $\Delta\boldsymbol{\beta}$ jsou malé. Pro transformaci mezi Σ' a Σ'' pak platí vztah

$$X'' = \mathbb{B}(\boldsymbol{\beta} + \Delta\boldsymbol{\beta})\mathbb{B}(-\boldsymbol{\beta})X' \eqqcolon \Delta\mathbb{A}X'.$$

Z předchozí sekce pak víme, že složením těchto boostů odpovídá kombinace boostu a rotace

$$\Delta\mathbb{A} = \mathbb{B}(\boldsymbol{\beta} + \Delta\boldsymbol{\beta})\mathbb{B}(-\boldsymbol{\beta}) = \mathbb{R}(\Delta\boldsymbol{\varphi})\mathbb{B}(\Delta\boldsymbol{b}),$$

kde $\Delta\boldsymbol{b} \coloneqq (-\boldsymbol{\beta}) \oplus (\boldsymbol{\beta} + \Delta\boldsymbol{\beta})$.

Tato rotace dává za vznik Thomasově precesi, avšak abychom mohli interpretovat souřadné systémy Σ' a Σ'' jako inerciální soustavy okamžitě spolupohybující se se spinem vzhledem k laboratorní soustavě, očekáváme, že transformace mezi okamžitými souřadnými systémy částice v časech t a $t+\Delta t$ bude dána pouze boostem bez jakékoliv rotace. Získáme tak vztah

$$X''' = \mathbb{B}(\Delta \boldsymbol{b})X' = \mathbb{R}(-\Delta\boldsymbol{\varphi})X'',$$

který zavádí nový okamžitý souřadný systém Σ'''.

Máme tedy celkově čtyři inerciální souřadné systémy: v laboratorním systému Σ pozorujeme pohyb spinu, dále máme tři okamžité inerciální systémy, vůči kterým je spin v klidu, a to vůči Σ' v čase t a vůči Σ'' a Σ''' v čase $t+\Delta t$. Souřadné systémy Σ'' a Σ''' jsou v čase $t+\Delta t$ na stejném místě a liší se pouze o rotaci.

Tato rotace nastává mezi dvěma okamžiky laboratorního času, provedeme-li limitu $\Delta t \to 0$, bude souřadný systém částice spojitě rotovat v každém okamžiku s úhlovou rychlostí danou vztahem

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{Th}} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{-\Delta\boldsymbol{\varphi}}{\Delta t}.$$

Odvození Taylorova rozvoje Lorentzova faktoru $\gamma_{\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta}}$

Pro stanovení úhlu $\boldsymbol{\varphi}$ budeme potřebovat rozvoj Lorentzova faktoru $\gamma_{\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta}}$:

$$\begin{aligned}\gamma_{\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-|\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta}|^2}} &= 1 + \frac{1}{2}|\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta}|^2 + \frac{3}{8}|\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta}|^4 + \cdots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}|\boldsymbol{\beta}|^2 + \frac{3}{8}|\boldsymbol{\beta}|^4 + \cdots\right) + \left(1 + \frac{3}{2}|\boldsymbol{\beta}|^2 + \cdots\right)\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{\beta} \\ &\approx \gamma + \gamma^3\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{\beta},\end{aligned}$$

kde značíme $\gamma \equiv \gamma_{\boldsymbol{\beta}}$ a použili jsme vztah

$$|\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta}|^2 = |\boldsymbol{\beta}|^2 + 2\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{\beta} + |\Delta\boldsymbol{\beta}|^2 \approx |\boldsymbol{\beta}|^2 + 2\boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\boldsymbol{\beta}.$$

Pro další odvození budeme uvažovat, že bez újmy na obecnosti můžeme kartézskou bázi v Σ nastavit tak, aby $\boldsymbol{\beta}$ mířila ve směru osy x a $\Delta\boldsymbol{\beta}$ ležela v rovině xy:

$$\boldsymbol{\beta} = \beta\boldsymbol{e}_x, \qquad \Delta\boldsymbol{\beta} = \Delta\beta_x\boldsymbol{e}_x + \Delta\beta_y\boldsymbol{e}_y =: \Delta\boldsymbol{\beta}_{\parallel} + \Delta\boldsymbol{\beta}_{\perp}$$

Osa Wignerovy rotace má tak směr osy z a platí

$$\boldsymbol{\beta}\times\Delta\boldsymbol{\beta} = \beta\Delta\beta_y\boldsymbol{e}_z.$$

Odvození matic jednotlivých Lorentzových boostů $\mathbb{B}(-\boldsymbol{\beta})$ a $\mathbb{B}(\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta})$

Pro matice jednotlivých boostů získáváme (přibližné) vztahy:

$$\mathbb{B}(-\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{B}(\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta}) \approx \begin{bmatrix} \gamma+\gamma^3\beta\Delta\beta_x & -\gamma\beta-\gamma^3\Delta\beta_x & -\gamma\Delta\beta_y & 0 \\ -\gamma\beta-\gamma^3\Delta\beta_x & \gamma+\gamma^3\beta\Delta\beta_x & \frac{\gamma-1}{\beta}\Delta\beta_y & 0 \\ -\gamma\Delta\beta_y & \frac{\gamma-1}{\beta}\Delta\beta_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

V uvedených vztazích ignorujeme členy řádu Δ^2 a vyšší.

Celkově pak získáváme (přibližný) vztah pro matici složené transformace

$$\Delta\mathbb{\Lambda} \approx \begin{bmatrix} 1 & -\gamma^2\Delta\beta_x & -\gamma\Delta\beta_y & 0 \\ -\gamma^2\Delta\beta_x & 1 & \frac{\gamma-1}{\beta}\Delta\beta_y & 0 \\ -\gamma\Delta\beta_y & -\frac{\gamma-1}{\beta}\Delta\beta_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pro infinitesimální obecnou Lorentzovu transformaci platí vztah

$$\Delta\mathbb{\Lambda} = I - \Delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{J} - \Delta\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{K},$$

kde $\boldsymbol{J}$ jsou generátory rotace a $\boldsymbol{K}$ jsou generátory boostů:

$$J_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad J_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad J_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad K_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad K_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Porovnáním jednotlivých prvků v matici $\Delta\mathbb{\Lambda}$ tak získáme

$$-\Delta\boldsymbol{\varphi} = -\frac{\gamma-1}{\beta}\Delta\beta_y = \frac{1-\gamma}{\beta^2}\boldsymbol{\beta}\times\Delta\boldsymbol{\beta} = \frac{1-\gamma}{v^2}\boldsymbol{v}\times\Delta\boldsymbol{v}$$

Provedením limity $\Delta t \to 0$ tak dostáváme vztah pro okamžitou úhlovou rychlost Thomasovy rotace:

Okamžitá úhlová rychlost Thomasovy precese

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{Th}} = \frac{\gamma - 1}{v^2}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{c^2}\frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v} \overset{v \ll c}{\approx} \frac{1}{2c^2}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v},$$

kde $\boldsymbol{a}$ je zrychlení částice se spinem pozorované v laboratorní soustavě.

Thomasova precese byla odvozena jako čistě kinematický jev, avšak k jejímu pozorování je nutné, aby se částice se spinem pohybovala se zrychlením, a tedy je nutné, aby na částici působila nějaká síla.