Relativistická fyzika I

- zdroje: [1] • J. Bičák, V. N. Rudenko: Teorie relativity a gravitační vlny (skripta) – kapitoly: 1.6, 2.2
  [2] • skripta GTR ... J. Bičák, O. Semerák: Relativistics physics – kapitoly: 18, 18.1, 18.1.2

Lokální referenční systém, Fermiho-Walkerův přenos (v STR)

- rovnice pro Fermiho přenos vektoru S^μ $(S_\mu w^\mu = 0)$ podél světočáry $x^\mu(\tau)$: $\boxed{\frac{dS^\mu}{d\tau} = \left(S_\nu \frac{dw^\nu}{d\tau}\right) w^\mu}$ (FP)$_1$

  (např.: spin)

  ... kde: • τ – vlastní čas hmotného středu fyzikálního systému
  • $w^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ – tečný vektor (čtyřrychlost systému)
  (norma: $w_\mu w^\mu = -1$)

- Fermiho přenos (FP)$_1$ zachovává ortogonalitu i velikost vektorů kolmých k w^μ

  $\Downarrow$

  lze jej využít k zavedení lokálního referenčního systému (LRS) urychleného pozorovatele

- fyzikální realizace LRS:
  - ↳ osy LRS mohou být realizovány pomocí tří na sebe kolmých setrvačníků, přičemž ∀setrvačník je upevněn ve svém vlastním hmotném středu
  - ↳ hmotné středy lze zvolit tak, že jsou pro všechny tři setrvačníky ve společném bodě
  - ↳ pokud síla urychlující triádu setrvačníků působí pouze ve společném vlastním hmotném středu, vektor spinu každého setrvačníku se přenáší fermiovsky $\Rightarrow$ tyto tři vektory spinu zvolíme jako vektory báze $e^\mu_{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$

• mějme tedy tuto triádu bázových vektorů $e^\mu_{(i)}$:
  - ↳ předpokládejme, že v daném čase $\tau = \tau_0$ máme:
    - → ortonormalitu báze: $\eta_{\mu\nu} e^\mu_{(i)} e^\nu_{(j)} = \delta_{ij}$
    - → kolmost báze k w^μ: $\eta_{\mu\nu} e^\mu_{(i)} w^\nu = 0$
  - ↳ v libovolném dalším čase τ podél světočáry definujeme pomocí (FP)$_1$ vektory $e^\mu_{(i)}(\tau)$:

$$\frac{de^\mu_{(i)}}{d\tau} = \left(e_{(i)\nu} \frac{dw^\nu}{d\tau}\right) w^\mu$$

  - ↳ z vlastností (FP)$_1$ pak plyne:
    - ↳ v $\forall\tau$ budou vektory $e^\mu_{(i)}(\tau)$ tvořit s vektorem w^μ "ortonormální" tetrádu
      (↑ N.B.: $w_\mu w^\mu = -1$)
    - ↳ triáda $e^\mu_{(i)}$ je nerotující (ve smyslu, že jednotlivé vektory $e^\mu_{(i)}$ nekonají rotaci vůči osám vůči osám inerciálního systému, v němž je v daném okamžiku $w^\mu = (1, 0, 0, 0)$)

- Fermiho přenos je definovaný pouze pro vektory kolmé na w^μ – jeho zobecněním pro libovolný vektor W^μ získáme rovnici pro Fermiho-Walkerův přenos vektoru podél světočáry $x^\mu(\tau)$:

$$\boxed{\frac{dW^\mu}{d\tau} = \left(W_\nu \frac{dw^\nu}{d\tau}\right) w^\mu - \left(W_\nu w^\nu\right) \frac{dw^\mu}{d\tau}} \quad \text{(FWP)}_1$$

• některé vlastnosti: (další vlastnosti a důkazy - viz později)

↳ pro W^μ splňující $W_\mu u^\mu = 0$ rovnice $(FWP)_1$ přejde na rovnici $(FP)_1$

↳ tečný vektor čtyřrychlosti u^μ se podél světočáry $x^\mu(\tau)$ přenáší Fermiho-Walkerovým přenosem ⇒

⇒ čtveřice ortonormálních vektorů $\{e^\mu_{(\lambda)}\}$ $(\lambda = 0,1,2,3)$ s $e^\mu_{(0)} = u^\mu$ tedy představuje přirozenou nerotující tetrádu urychleného pozorovatele

• pozn.: $(FWP)_1$ lze přepsat do tvaru: $\frac{dW^\mu}{d\tau} = -\Omega^{\mu\nu} W_\nu$, kde: → $\Omega^{\mu\nu} = -\Omega^{\nu\mu} = a^\mu u^\nu - u^\mu a^\nu$

→ $a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$

↳ vektor W^μ koná rotaci v rovině (u^μ, a^μ)

(• N.B.: - mluvíme o "rotaci", ale obecně se může jednat i o boost →

→ např.: pokud budou nenulové pouze složky $\Omega^{tx} = -\Omega^{xt}$)

Zobecnění na křivé prostoročasy

- v případě přítomnosti gravitace musíme převést předchozí vztahy do kovariantního tvaru

Částice se spinem a Fermiho-Walkerův

- Nejprve stručně zmíníme několik případů pohybu částice v křivém prostoročase:
  - volně padající testovací částice
    - ↳ pohyb po geodetice ⟺ čtyřzrychlení částice: $a^\mu = \frac{Du^\mu}{d\tau} = u^\mu{}_{;\nu} u^\nu = 0$ ... kde: → $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$
      → $u_\mu u^\mu = -1$
  - volně padající částice se spinem
    - ↳ jelikož na částici nepůsobí žádné vnější (negravitační) síly, bude se spin S^μ podél geodetiky přenášet paralelně, tj.: $\frac{DS^\mu}{d\tau} = 0$, přičemž stále musí platit $S_\mu u^\mu = 0$ (viz definice spinu)
  - částice se spinem, na kterou působí vnější síla f^μ
    - ↳ pohybová rovnice: $a^\mu = \frac{Du^\mu}{d\tau} = \frac{f^\mu}{m}$
    - ↳ pokud síla bude působit v těžešti částice, získáme přepisem rovnice $(FP)_1$ do kovariantního tvaru vztah pro přenos vektoru spinu: $\boxed{\frac{DS^\mu}{d\tau} = \left(S_\nu \frac{Du^\nu}{d\tau}\right) u^\mu}$ $(FP)_2$
      - ↳ rovnice pro Fermiho přenos v gravitačním poli
  - pozn.: čtyřsílu f^μ nalezneme v libovolném systému tak, že vyjdeme ze vztahu pro čtyřsílu v LIS, a tento vztah pak přetransformujeme jako čtyřvektor do obecného systému souřadnic
    (např. lze zvolit ten, ve kterém částice stojí)

- obdobně přepisem rce $(FWP)_2$ do kovariantního tvaru získáme rovnici pro Fermiho-Walkerův přenos vektoru W^μ v obecném gravitačním poli:

$$\boxed{\frac{DW^\mu}{d\tau} = \left(W_\nu \frac{Du^\nu}{d\tau}\right) u^\mu - (W_\nu u^\nu) \frac{Du^\mu}{d\tau}} \qquad (FWP)_2$$

- vlastnosti:
  - ↳ zachování skalárního součinu

... důkaz: $\frac{d}{d\tau}(g_{\sigma\nu} V^\sigma W^\nu) = \frac{D}{d\tau}(g_{\sigma\nu} V^\sigma W^\nu) = g_{\sigma\nu} \frac{DV^\sigma}{d\tau} W^\nu + g_{\sigma\nu} V^\sigma \frac{DW^\nu}{d\tau} \overset{(FPT)_2}{=}$

$$= g_{\sigma\nu}(u^\sigma a^\tau - u^\tau a^\sigma) V_\tau W^\nu + g_{\sigma\nu} V^\sigma (u^\nu a^\tau - u^\tau a^\nu) W_\tau =$$

$$= (\cancel{u^\sigma a^\tau} - \cancel{u^\tau a^\sigma}) V_\tau W_\sigma + (\cancel{u^\nu a^\tau} - \cancel{u^\tau a^\nu}) V_\nu W_\tau = \underline{\underline{0}}$$

- ↳ v případě přenosu po geodetice ($a^\mu = 0$) rovnice $(FWP)_2$ přejde na rovnici pro paralelní přenos: $\frac{DW^\mu}{d\tau} = 0$

↳ tečný vektor w^μ se po světočáře vždy přenáší fermiho-walkerovsky

...důkaz: $a^\mu = \frac{Dw^\mu}{d\tau} \underset{(FWP)_2}{=} \left(w_\nu \frac{Dw^\nu}{d\tau}\right) w^\mu - \underbrace{(w_\nu w^\nu)}_{=-1}\frac{Dw^\mu}{d\tau} = \underbrace{(w_\nu a^\nu)}_{=0} w^\mu - (-1)\frac{Dw^\mu}{d\tau} = \frac{Dw^\mu}{d\tau} = a^\mu \Rightarrow$

$\Rightarrow a^\mu = a^\mu \Rightarrow$ platí vždy ✓

↳ pro W^μ splňující $W_\mu w^\mu = 0$ přejde rce $(FWP)_2$ na rovnici pro Fermiho přenos: $\frac{DW^\mu}{d\tau} = w^\mu a^\nu W_\nu$

⇓

projekce absolutní derivace $\frac{DW^\nu}{d\tau}$ na třiprostor kolmý k w^μ je nulová

...důkaz: • $\delta^\mu_\nu + w^\mu w_\nu$ = projekční tenzor na třiprostor kolmý k w^μ

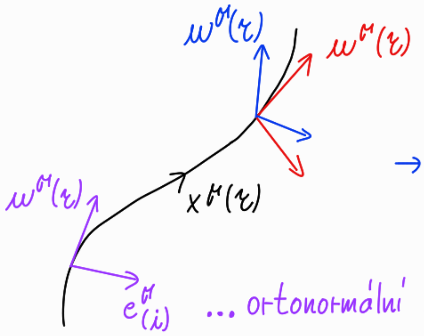
↳ $\frac{DW^\nu}{d\tau}(\delta^\mu_\nu + w^\mu w_\nu) = \frac{DW^\mu}{d\tau} + w^\mu \frac{DW^\nu}{d\tau} w_\nu \underset{(\text{Leibnitz } \& \ W_\mu w^\mu = 0)}{=} \frac{DW^\mu}{d\tau} - w^\mu W^\nu \frac{Dw_\nu}{d\tau} \overset{(FP)_2}{=} \frac{DW^\mu}{d\tau} - w^\mu W^\nu a_\nu =$

$= w^\mu a_\nu W^\nu - w^\mu W^\nu a_\nu = 0$ ✓

$\overset{*}{\Rightarrow}$ F-W přenos zachovává směr vektorů vzhledem k tečně dané světočáry
(zatímco paralelní přenos zachovávává "prostoročasový směr" nezávisle na konkrétní světočáře)

∘ srovnání F-W a paralelního přenosu

↳ uvažme přenos po obecné (urychlené) světočáře $x^\mu(\tau)$:



→ F-W přenos ⇒ získali jsme bázi stejného typu jako na počátku (w^μ je pořád tečnou; $e^\mu_{(i)}$ je prostorová báze)

→ paralelní transport ⇒ w^μ už obecně není tečným vektorem světočáry a vektory $e^\mu_{(i)}$ již nemusí být ryze prostorové vzhledem ke světočáře

... ortonormální báze - jako nultý vektor báze volíme čtyřrychlost w^μ
- $e^\mu_{(i)}$ je prostorová báze

∘ Pozn.: (viz skripta [1] (str. 65+66) a skripta [2] (kapitola 18.1.2)

↳ každý systém (částic) se spinem S^μ má poloměr omezený zdola podmínkou $\rho \geq \frac{|\vec{S}|}{m}$ (Møllerův poloměr) ⇒

⇒ částice se nebude pohybovat přesně po geodetice, ale v její pohybové rovnici se objeví i člen úměrný Riemannovu tenzoru ⇒ nehomogenita gravitačního pole (slapové síly), která se při působení na nebodový systém může projevit

↳ odchylky od geodetiky (tj. $a^\iota = 0$) jsou ale zpravidla malé - odchylka δa^ι typicky bývá:

$$m\,\delta a^\iota \sim \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} R^{\iota\varkappa}{}_{\alpha\beta}\, w_\varkappa S_\rho w_\sigma$$

⇓

např.: uvažujme rotující těleso v newtonovském gravitačním potenciálu $\Phi \sim M/r$

↳ úhlová rychlost ω, poloměr ρ, pohyb rychlostí $v \ll 1$

↳ pro slabé statické pole je $g_{00}=(1-2\Phi)$, $g_{ii}=(1+2\Phi)$

$\Downarrow$

lze ukázat, že největší příspěvek v δa^i bude:

$$|\delta a^i| \sim \frac{w\rho^2}{r}\cdot\sqrt{\frac{M}{r}}\, a_{NEWT}\ ,\quad \text{kde} \quad a_{NEWT}=\frac{M}{r^2}$$

↳ pokud by planeta rotovala mezní rychlostí $w=\frac{m}{\rho^3}$ $\Rightarrow |\delta a^i| \lesssim 10^{-12}\, a_{NEWT}$

(na rovníku by se odstředivá síla rovnala gravitační síle)

(○ Pozn.: - dodatečné poznámky k obecné rotující bázi - viz skripta [2] (kapitola 18.1.1))

Lokální referenční systémy v křivém prostoročase

° uvažujme pozorovatele pohybujícího se po libovolné světočáře, která je v obecném souřadném systému popsána funkcemi $x^\mu(\tau)$ (τ je vlastní čas pozorovatele)

• dále předpokládejme:

(např.: "hrany" laboratoře na Zemi/v raketě)

↳ pozorovatel má ortonormální triádu vektorů $e^\mu_{(i)}$, pomocí které bude konstruovat ve svém bezprostředním okolí nový souřadný systém (označme jej $\{x^\mu\}$)

↳ jeho světočára bude počátkem tohoto souřadného systému, tj. $x^i = 0$

↳ jako čas pozorovatel bude používat vl. č. τ, tj. $x^0 \equiv \tau$ ⇒ nultý vektor báze $e^\mu_{(0)} \equiv u^\mu = (1,0,0,0)$

(komponenty v souřadnicích $\{x^\mu\}$)

⇓

Komponenty triády v souřadnicích $\{x^\mu\}$ jsou $e^\mu_{(i)} = \delta^\mu_i$

⇓

tetráda $\{e^\mu_{(\lambda)}\}$ ($\lambda = 0,1,2,3$) s $e^\mu_{(0)} = u^\mu$ je ortonormální (N.B.: $u_\mu u^\mu = -1$)

⇓

podél světočáry pozorovatele (tj. $x^i = 0$, τ libovolné <=> historie počátku souř. systému $\{x^\mu\}$) jsou složky metriky v souřadnicích pozorovatele $\{x^\mu\}$: • $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ a $g_{\mu\nu,0} = 0$ (1)

↳ v bezprostředním okolí světočáry má metrika tvar: $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu,i} x^i dx^\mu dx^\nu$ (2)

Taylorův rozvoj

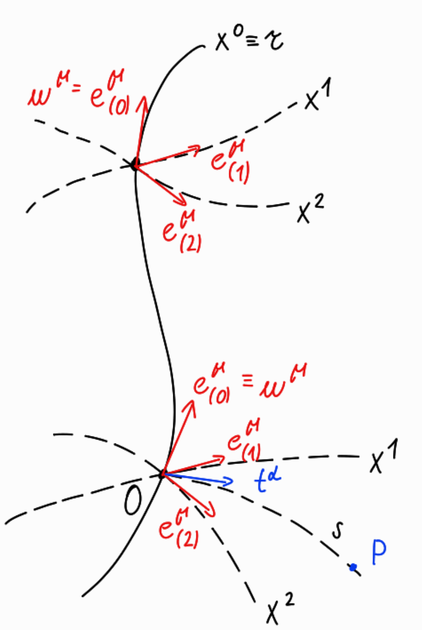
° Dále uvažujme:

↳ pozorovatel vyšle ve třech prostorových směrech $e^\mu_{(i)}$ tři prostorové geodetiky

↳ vlastní délky "s" těchto geodetik zvolí jako prostorové souřadnice měřené podél příslušných souřadných čar

↳ v případě nějakého obecného blízkého bodu P, který leží na nadploše $x^0 \equiv \tau = \text{konst.}$, vyšle pozorovatel k bodu P geodetiku a požaduje, aby souřadnice bodu P byly: $x^\mu = s t^\mu$,

kde: • t^μ = jednotkový vektor v počátku ve směru geodetiky
• s = vl. délka vyslané geodetiky (měřená od počátku po bod P)



↳ pro souřadnice bodu P platí: $\frac{d^2 x^\mu}{d s^2} = 0$

a zmíněné prostorové geodetiky v počátku splňují:

$$\Gamma^\mu_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = \Gamma^\mu_{ij} t^i t^j = 0 \quad \text{pro } \forall t^i$$

⇓

$$\Gamma^\mu_{ij} = 0$$

⇓ $\left| \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\alpha,\beta} + g_{\beta\sigma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma}) \;\&\; (2) \right|$

$$\boxed{\begin{aligned} g_{ij,k} &= 0 \\ g_{0i,j} &= -g_{0j,i} \end{aligned}}$$ (3) (platí pro $x^i = 0$, τ libovolné)

• (3) → antisymetrie $g_{0i,j}$ ⇒ 3 nezávislé komponenty ⇒ lze přiřadit trojvektor w^k:

$$\boxed{g_{0i,j} = -\varepsilon_{ijk} w^k} \quad (4),$$

kde ε_{ijk} je euklidovský Levi-Civitův symbol
(N.B.: prostorová metrika je v $x^i=0$ euklidovská)

∘ dále vypočítáme prostorové složky čtyřzrychlení pozorovatele "a^i" (v souř. $\{x^\mu\}$):

$$a^i = u^i{}_{;\mu} u^\mu \underset{\uparrow}{=} u^i{}_{;0} = \Gamma^i{}_{0\rho} u^\rho \underset{\uparrow}{=} \Gamma^i{}_{00} \doteq \frac{1}{2}\eta^{i\mu}(\cancel{g_{\mu 0,0}} + \cancel{g_{0\mu,0}} - g_{00,\mu}) = -\frac{1}{2} g_{00,i} \Rightarrow$$

$|u^\mu = (1,0,0,0)|$ viz (1)

$$\Rightarrow a^i = -\frac{1}{2} g_{00,i} \Leftrightarrow \boxed{g_{00,i} = -2a_i} \quad (5)$$

∘ dosazením (3),(4),(5) do (2) získáme vztah pro metriku kolem světočáry pozorovatele (v souř. $\{x^\mu\}$):

$$\boxed{ds^2 = -(1+2a_i x^i)(dx^0)^2 - 2\varepsilon_{ijk} x^j w^k dx^0 dx^j + \delta_{ij} dx^i dx^j + \mathcal{O}(|x^i|^2) dx^\mu dx^\nu} \quad (6)$$

⇓

netriviální složky afinní konexe: $\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \Gamma^i_{00} = a^i \\ \bullet\ \Gamma^0_{0i} = a_i \\ \bullet\ \Gamma^i_{0j} = -\varepsilon^i{}_{jk} w^k \end{array}}$ (7)

∘ Nyní uvažujme, že našeho pozorovatele v jistém okamžiku míjí volně padající částice, přičemž její geodetiku parametrizujeme jejím vlastním časem λ
↳ rce této geodetiky zapíšeme v souř. systému pozorovatele, v němž máme afinní konexi (7) (a metriku (6)):

↳ časová část rce geodetiky:

$$\frac{dx^0}{d\lambda^2} + 2a^i \frac{dx^0}{d\lambda}\frac{dx^i}{d\lambda} = 0 \qquad \Rightarrow \text{vztah mezi } x^0 \equiv \tau \text{ a } \lambda \qquad (\otimes)$$

↳ prostorové části rce geodetiky lze zapsat ve tvaru (po využití (⊗))

$$\ddot{\vec{r}} = \underbrace{-\vec{a}}_{(i)} \underbrace{-2\vec{w}\times\dot{\vec{r}}}_{(ii)} + \underbrace{2(\vec{a}\cdot\dot{\vec{r}})\dot{\vec{r}}}_{(iii)} \qquad (8)$$

• značení: → "tečka" ... derivace vůči τ
→ $\vec{a} = (a^i)$ ... prostorové složky zrychlení pozorovatele
→ $\vec{r} = (x^i)$ ... souřadnice volně padající částice

• příspěvky v (8): (i) $-\vec{a}$ ... člen způsobený zrychlováním pozorovatele
(ii) $-2(\vec{w}\times\dot{\vec{r}})$ ... Coriolisovo zrychlení
(iii) $2(\vec{a}\cdot\dot{\vec{r}})\dot{\vec{r}}$ ... relativistická korekce členu (i) (v jednotkách SI: $\frac{2}{c}(\vec{a}\cdot\dot{\vec{r}})\dot{\vec{r}}$)

• v rci (8) si všimněme:

↳ pokud pozorovatel volně padá ($a^i = 0$), může být zrychlení částice $\ddot{\vec{r}}$ nenulové, neboť souřadnicové osy používané pozorovatelem mohou rotovat ($\vec{\omega} \neq 0$) ⇒ objeví se Coriolisovo zrychlení volně padající částice

↑ (iii)

↳ Coriolisovo zrychlení vymizí pouze pokud $\vec{\omega} = 0 \Leftrightarrow \Gamma^i_{0j} = 0$

(viz (7))

toto ovšem platí, přenáší-li se triáda $e^\mu_{(i)}$ Fermiho-Walkerovým přenosem ⟶ ⊛

(resp. Fermiho přenosem, neboť $e^\mu_{(i)} a_\mu = 0$)

⊛ důkaz, že tomu tak je:

↳ v souř. systému pozorovatele můžeme psát: |N.B.: $u^\mu = (1,0,0,0)$, $e^\rho_{(i)} = \delta^\rho_i$|

$$\frac{De^\mu_{(i)}}{d\tau} = e^\mu_{(i);\nu} u^\nu = e^\mu_{(i);0} = e^\mu_{(i),0} + \Gamma^\mu_{\rho 0} e^\rho_{(i)} = \Gamma^\mu_{\rho 0}\delta^\rho_i = \Gamma^\mu_{i0}$$

$$\underset{(FP)_2}{=} (e^\nu_{(i)} a_\nu) u^\mu = (\delta^\nu_i a_\nu) u^\mu = a_i u^\mu = a_i \delta^\mu_0$$

$$\Rightarrow \underline{\Gamma^\mu_{i0} = a_i \delta^\mu_0} \Rightarrow *$$

$* \Rightarrow$ pro $\mu = j$ máme tedy: $\Gamma^j_{i0} = 0 \overset{(7)}{\Leftrightarrow} \vec{\omega} = 0$,

tj. trojice $e^\mu_{(i)}$ se přenáší fermiho-walkerovsky $\Leftrightarrow \Gamma^j_{i0} = 0 \Leftrightarrow \vec{\omega} = 0$ ✓

↳ N.B.: toto mj. potvrzuje, že i v rámci obecné teorie relativity vektory přenášené podél světočáry urychleného pozorovatele Fermiho-Walkerovým přenosem nerotují

∘ výše zkonstruovaný souřadný systém, ve kterém má metrik tvar (6) a jediné nenulové složky afinní konexe jsou (7), nazýváme lokálně referenční systém (LRS) urychleného pozorovatele

• LRS je lokálním inerciálním systémem, neboť:

↳ v případě, kdy je LRS nerotující ($\vec{\omega} = 0$) a navíc pozorovatel volně padá ($a^\mu = 0$), je z rovnic (7) vidět, že všechny složky afinní konexe jsou podél světočáry nulové ⇒

⇒ všechny 1. derivace metriky jsou též nulové |$g_{\alpha\beta,\gamma} = g_{\mu\alpha}\Gamma^\mu_{\beta\gamma} + g_{\mu\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\gamma}$|

(• N.B.: – předtím jsme vždy měli LIS zavedený kolem nějaké jediné události
– nyní máme LIS podél celé geodetiky)

↳ v případě, kdy jde o LRS podél urychlené světočáry, můžeme vždy v ∀ jednotlivé události na světočáře nalézt LIS, který se pohybuje stejnou rychlostí jako LRS a jehož osy v daném okamžiku splývají s osami LRS (i když osy LRS vůči osám LIS obecně rotují)

↓

• BÚNO můžeme předpokládat, že událost, ve které LIS konstruujeme leží v prostoročasovém počátku LRS (tj. $x^i = x^0 = 0$)

- transformace: LRS (souřadnice x^α) $\longrightarrow$ LIS (souřadnice ξ^α):

$$\xi^0 = x^0 + (a_\rho x^\rho) x^0 + \mathcal{O}(|x^i|^3)$$

$$\xi^i = x^i + \frac{1}{2} a^i (x^0)^2 + \varepsilon^{ijk} \omega_j x^k x^0 + \mathcal{O}(|x^i|^3)$$

- inverzní transformace:

$$x^0 = \xi^0 - (a_\rho \xi^\rho) \xi^0 + \mathcal{O}(|\xi^i|^3)$$

$$x^i = \xi^i - \frac{1}{2} a^i (\xi^0)^2 - \varepsilon^{ijk} \omega_j \xi^k \xi^0 + \mathcal{O}(|\xi^i|^3)$$

↳ užitím vztahů (*), (6), (7) lze ukázat, že metrika je v počátku LISu ($\xi^i = \xi^0 = 0$) Minkowského a že $\forall$ složky afinní konexe jsou nulové (tzn. 1. derivace metriky vymizí) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ i v okolí uvažované události $\xi^\alpha = 0$ je metrika Minkowského (až na členy kvadratické v ξ^i)

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta} g_{\rho\sigma} \qquad (*)$$

$$\Gamma'^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\gamma} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\sigma} \cdot \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\beta \partial x'^\gamma}$$