Paralelný prenos axiomaticky

Pokúsime sa zaviesť paralelný prenos vektoru pozdĺž ľubovoľnej krivky bez toho aby sme sa museli odvolávať na vloženie variety do Euklidovského priestoru.

- Nech $x^\mu(u)$ je ľubovoľná parametrická krivka prechádzajúca bodom $x \equiv x(0)$ a nech T^μ je ľubovoľný vektor v bode x. Našou úlohou je nájsť prenos tohto vektora pozdĺž krivky $x(u)$, teda funkciu $T^\mu(x(u))$ (kde $T^\mu(x) = T^\mu$). Pre malé hodnoty parametra u môžeme využiť Taylorov rozvoj:

$$T^\mu(x + \mathrm{d}x) = T^\mu(x) - \Gamma^\mu{}_\nu(T, x)\mathrm{d}x^\nu + \mathcal{O}(\mathrm{d}x^2) \tag{1}$$

  Zaviedli sme neznáme funkcie $\Gamma^\mu{}_\nu(T, x)$. Zanedbáme členy vyššieho rádu a zderivujeme podľa u, čím dostaneme rovnicu paralelného prenosu.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T^\mu}{\mathrm{d}u} + \Gamma^\mu{}_\nu(T, x)\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}u} = 0} \tag{2}$$

  V nasledujúcom na túto rovnicu naložíme ďalšie (rozumné) podmienky, čím obmedzíme možné tvary funkcie $\Gamma^\mu{}_\nu(T, x)$.

- Ak za T dosadíme μT do (2), dostaneme

$$\begin{gathered}\underbrace{\mu\frac{\mathrm{d}T^\mu}{\mathrm{d}u}}_{-\mu\Gamma^\mu{}_\nu(T,x)\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}u}} + \Gamma^\mu{}_\nu(\mu T, x)\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}u} = 0,\\ \implies \Gamma^\mu{}_\nu(\mu T, x) = \mu\Gamma^\mu{}_\nu(T, x).\end{gathered} \tag{3}$$

  Rovnakým spôsobom sa ukáže, že ak do (2) dosadíme $T^\mu = X^\mu + Y^\mu$, tak dostaneme $\Gamma^\mu{}_\nu(X + Y, x) = \Gamma^\mu{}_\nu(X, x) + \Gamma^\mu{}_\nu(Y, x)$. Teda funkcia $\Gamma^\mu{}_\nu(T, x)$ je lineárna v T a môžeme ju zapísať ako $\Gamma^\mu{}_\nu(T, x) \equiv \Gamma^\mu{}_{\kappa\nu}(x)T^\kappa$. Rovnica paralelného prenosu sa zjednoduší na

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T^\mu}{\mathrm{d}u} + \Gamma^\mu{}_{\kappa\nu}(x)T^\kappa\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}u} = 0.} \tag{4}$$

  Objekt $\Gamma^\mu{}_{\kappa\nu}$ sa nazýva *zložky afínnej konexie.*

Transformácia zložiek afínnej konexie: $\Gamma^{\mu}{}_{\kappa\nu}(x)$ nie je tenzor, pretože pri zmene súradníc $x \to x'$ sa transformuje ako

$$\boxed{\Gamma^{\mu'}{}_{\kappa'\nu'} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} X^{\mu'}_{\alpha} X^{\beta}_{\kappa'} X^{\gamma}_{\nu'} + X^{\mu'}_{\alpha} X^{\alpha}_{\kappa'\nu'},} \tag{5}$$

kde

$$X^{\alpha}_{\beta'} \equiv \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}}, \quad X^{\alpha'}_{\beta} \equiv \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}, \quad X^{\alpha}_{\beta'\gamma'} \equiv \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta} \partial x'^{\gamma}}. \tag{6}$$

Dôkaz: Vyjdeme z rovnice paralelného prenosu (4). Platí $T^{\mu} = X^{\mu}_{\nu'} T^{\nu'}$, teda

$$X^{\mu}_{\nu'} \frac{\mathrm{d}T^{\nu'}}{\mathrm{d}u} + X^{\mu}_{\nu'\kappa'} T^{\nu'} \frac{\mathrm{d}x^{\kappa'}}{\mathrm{d}u} + \Gamma^{\mu}{}_{\kappa\nu}(x) X^{\kappa}_{\alpha'} X^{\nu}_{\beta'} T^{\alpha'} \frac{\mathrm{d}x^{\beta'}}{\mathrm{d}u} = 0. \tag{7}$$

Túto rovnicu vynásobíme $X^{\rho'}_{\mu}$ a využijeme, že $X^{\rho'}_{\mu} X^{\mu}_{\nu'} = \delta^{\rho'}_{\nu'}$.

$$0 = \frac{\mathrm{d}T^{\rho'}}{\mathrm{d}u} + X^{\rho'}_{\mu} X^{\mu}_{\nu'\kappa'} T^{\nu'} \frac{\mathrm{d}x^{\kappa'}}{\mathrm{d}u} + \Gamma^{\mu}{}_{\kappa\nu}(x) X^{\rho'}_{\mu} X^{\kappa}_{\alpha'} X^{\nu}_{\beta'} T^{\alpha'} \frac{\mathrm{d}x^{\beta'}}{\mathrm{d}u} \tag{8}$$

$$= \frac{\mathrm{d}T^{\rho'}}{\mathrm{d}u} + \underbrace{\left(\Gamma^{\mu}{}_{\kappa\nu} X^{\rho'}_{\mu} X^{\kappa}_{\alpha'} X^{\nu}_{\beta'} + X^{\rho'}_{\mu} X^{\mu}_{\alpha'\beta'} \right)}_{\Gamma^{\rho'}{}_{\alpha'\beta'}} T^{\alpha'} \frac{\mathrm{d}x^{\beta'}}{\mathrm{d}u}. \tag{9}$$

Zložky afínnej konexie sa teda transformujú ako tenzor len pri lineárnych transformáciách, pri ktorých $X^{\alpha}_{\kappa'\nu'} = 0$.

1. *Prvá podmienka súvisí s nulovosťou torzie. Ak vedieme bodom x dve krivky $x_{(1)}(u)$ a $x_{(2)}(v)$ a urobíme v ich smeroch infinitezimálne kroky* $\mathrm{d}_{(1)}x$ *a* $\mathrm{d}_{(2)}(x)$ *a následne tieto vektory paralelne prenesieme, čím dostaneme vektory* $(\mathrm{d}_{(1)}x)_{\parallel}$ *a* $(\mathrm{d}_{(2)}x)_{\parallel}$*, tak konce týchto vektorov sa musia stretnúť v jednom bode (až na veličiny vyššieho rádu, viď obrázok).*

- Podľa obrázku teda má platiť

$$\mathrm{d}_{(1)}x^{\alpha} + (\mathrm{d}_{(2)}x)^{\alpha}_{\parallel} = \mathrm{d}_{(2)}x^{\alpha} + (\mathrm{d}_{(1)}x)^{\alpha}_{\parallel} \tag{10}$$

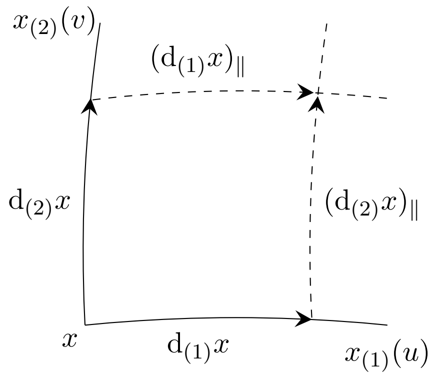
$$\begin{aligned} \Longrightarrow \ \mathrm{d}_{(1)}x^{\alpha} + \mathrm{d}_{(2)}x^{\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(x) \mathrm{d}_{(2)}x^{\beta} \mathrm{d}_{(1)}x^{\gamma} &= \\ = \mathrm{d}_{(2)}x^{\alpha} + \mathrm{d}_{(1)}x^{\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \mathrm{d}_{(1)}x^{\beta} \mathrm{d}_{(2)}x^{\gamma} \end{aligned} \tag{11}$$

Z čoho

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(x) \mathrm{d}_{(1)}x^{\beta} \mathrm{d}_{(2)}x^{\gamma} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\alpha}(x) \mathrm{d}_{(2)}x^{\beta} \mathrm{d}_{(1)}x^{\gamma}, \tag{12}$$

a pretože krivky $x_{(1)}$ a $x_{(2)}$ boli ľubovoľné, musí platiť

$$\boxed{\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}}. \tag{13}$$



- Ak platí predošlá podmienka, tak je možné nájsť také súradnice x', že $\Gamma^{\mu'}{}_{\kappa'\nu'}(x_{(1)}) = 0$ pre nejaký vybraný bod $x_{(1)}$ (globálne sa to nedá). Tieto súradnice je možné skonštruovať z pôvodných transformáciou

$$x^\mu = x'^\mu - x'^\mu_{(1)} - \frac{1}{2}\Gamma^\mu{}_{\kappa\lambda}\left(x'^\kappa - x'^\kappa_{(1)}\right)\left(x'^\lambda - x'^\lambda_{(1)}\right). \tag{14}$$

  Potom

$$\begin{aligned} X^\beta_{\kappa'}(x_{(1)}) &\equiv \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\kappa}(x_{(1)}) = \delta^\beta_{\kappa'} \\ X^{\mu'}_\alpha(x_{(1)}) &\equiv \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}(x_{(1)}) = \delta^{\mu'}_\alpha \\ X^\alpha_{\kappa'\nu'}(x_{(1)}) &\equiv \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\kappa \partial x'^\nu} = -\frac{1}{2}\left[\Gamma^\alpha{}_{\kappa\nu}(x_{(1)}) + \Gamma^\alpha{}_{\nu\kappa}(x_{(1)})\right] = -\Gamma^\alpha{}_{\kappa\nu}(x_{(1)}). \end{aligned} \tag{15}$$

  Dosadením do (5) dostaneme $\Gamma^{\mu'}{}_{\kappa'\nu'} = 0$. Takému systému súradníc sa hovorí *lokálne geodetický (inerciálny) systém* bodu $x_{(1)}$.

2. *Paralelný prenos zachováva normu vektora.*

- Platí teda, že $g_{\alpha\beta}T^\alpha T^\beta = const.$ Z toho

$$0 = \frac{\mathrm{d}(g_{\alpha\beta}T^\alpha T^\beta)}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}g_{\alpha\beta}}{\mathrm{d}u}T^\alpha T^\beta + 2g_{\alpha\beta}T^\alpha \frac{\mathrm{d}T^\beta}{\mathrm{d}u} \tag{16}$$

$$= (g_{\alpha\beta,\gamma} - 2g_{\alpha\kappa}\Gamma^\kappa{}_{\beta\gamma})T^\alpha T^\beta \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}u} \tag{17}$$

Toto má platiť pre ľubovoľný vektor T a pre ľubovoľnú krivku $x(u)$. Výraz za zátvorkou je symetrický v $\alpha\beta$, teda stačí zaručiť, že symetrizovaná časť zátvorky bude nulová:

$$\begin{aligned} 0 &= g_{\alpha\beta,\gamma} - 2g_{(\alpha|\kappa|}\Gamma^{\kappa}{}_{\beta)\nu} \\ &= g_{\alpha\beta,\gamma} - g_{\alpha\kappa}\Gamma^{\kappa}{}_{\beta\gamma} - g_{\beta\kappa}\Gamma^{\kappa}{}_{\alpha\gamma} \\ &= g_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} \end{aligned} \tag{18}$$

Teraz si rovnicu (18) napíšeme trikrát pod seba s permutovanými indexmi $\alpha\beta\gamma$:

$$g_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = 0 \tag{19}$$

$$g_{\beta\gamma,\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma\alpha} - \Gamma_{\gamma\beta\alpha} = 0 \tag{20}$$

$$g_{\gamma\alpha,\beta} - \Gamma_{\gamma\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\gamma\beta} = 0 \tag{21}$$

Prvú a tretiu rovnicu sčítame a druhú od nich odčítame. Rovnako farebné členy sa zrušia a dostaneme známy vzťah

$$\boxed{\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(-g_{\beta\gamma,\alpha} + g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta}\right).} \tag{22}$$

Táto posledná podmienka je teda už dosť silná na to, aby kompletne zafixovala zložky afínnej konexie. Potom sa objektu $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ hovorí *Christoffelove symboly 1. druhu*. Po zdvihnutí prvého indexu pomocou metriky dostaneme $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$, teda *Christoffelove symboly 2. druhu*.