27.11.2023

Linearizovaná teória gravitácie

Hmota $\longrightarrow$ Zakrivený priestoročas $\longrightarrow$ Hmota sa pohybuje inak $\longrightarrow$ ...

Lineárne Einsteinove rovnice

Nelineárne Einsteinove rovnice

Uvažujme slabé pole:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad h_{\mu\nu} \ll 1 \quad \text{aj s deriváciami}$$

Dôležité premenné:

$$\gamma^{\mu\nu} := h^{\mu\nu} - \frac{h}{2}\eta^{\mu\nu} \quad ; \quad h^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} - \frac{\gamma}{2}\eta^{\mu\nu}$$

Voľba systému (Lorenzova kalibračná podmienka):

$$\gamma^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0$$

Infinitesimálna transformácia:

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + \xi^\mu \quad ; \quad \gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\iota}{}_{,\iota}$$

Riemannov tenzor má tvar (do lineárneho rádu):

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\left(h_{\mu\lambda,\nu\kappa} + h_{\nu\kappa,\mu\lambda} - h_{\mu\kappa,\nu\lambda} - h_{\nu\lambda,\mu\kappa}\right) + \cancel{f(\Gamma\Gamma)}$$

Einsteinov gravitačný zákon ($\Lambda = 0$):

$$\Box\gamma_{\mu\nu} - \gamma^{\kappa}{}_{\nu,\kappa\mu} - \gamma^{\kappa}{}_{\mu,\kappa\nu} + \eta_{\mu\nu}\gamma^{\kappa\lambda}{}_{,\kappa\lambda} = -16\pi T_{\mu\nu}$$

$$\Box\xi_\mu = \gamma^{\kappa}{}_{\mu,\kappa} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Box\gamma_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}}$$

Rovinné harmonické gravitačné vlny

Budeme uvažovať vákuové riešenie, kde $T_{\mu\nu}=0$. Takže vlnová rovnica prechádza na tvar: $\square \gamma_{\mu\nu} = 0$

Riešenie takejto rovnice môžeme, podobne ako v prípade elektrodynamiky, nájsť v tvare monochromatickej rovinnej harmonicej vlny:

$$\gamma_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \cos(k_\rho x^\rho) \iff \mathrm{Re}\{A_{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho}\}$$

$A_{\mu\nu}$ ... amplitúda (konštantná)

k^ρ ... vlnový vektor (konštantný)

Vložením späť do vlnovej rovnice dostávame:

$$\square \equiv \nabla^\alpha \nabla_\alpha = \eta^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta$$

$$\nabla_\beta [A_{\mu\nu} \cos(k_\rho x^\rho)] = -A_{\mu\nu} \sin(k_\rho x^\rho) k_\beta$$

$$\nabla_\alpha [-A_{\mu\nu} \sin(k_\rho x^\rho) k_\beta] = -A_{\mu\nu} \cos(k_\rho x^\rho) k_\alpha k_\beta = -\gamma_{\mu\nu} k_\alpha k_\beta$$

$$-\eta^{\alpha\beta} \gamma_{\mu\nu} k_\alpha k_\beta \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = 0$$

$\Rightarrow$ k^ρ je svetelný vektor

Z toho priamo vyplýva: $\omega = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} = |k|$

$$\eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = -k^0 t + \vec{k}\cdot\vec{r} = -\omega(t - \vec{n}\cdot\vec{r}) \; ; \; \vec{n} = \frac{\vec{k}}{\omega}$$

$\Rightarrow$ Vlna sa šíri s rychlosťou svetla v smere vlnového vektora.

Lorenzova podmienka má tvar:

$$\gamma_{\mu\nu,}{}^{\nu} = 0 \quad \dots \quad -A_{\mu\nu} \sin(k_\rho x^\rho) k^\nu \Rightarrow A_{\mu\nu} k^\nu = 0 \iff A_{\mu\nu} \perp k^\nu$$

$\Rightarrow$ Amplitúda a vlnový vektor sú na seba kolmí

V predošlej kapitole bolo ukázané, že platí:

$$\square \gamma_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \square \gamma = 0 \Rightarrow \square R_{\mu\nu\kappa\lambda} = 0$$

Riemannov tenzor je kalibračne invariantný $\Rightarrow$ iba vlny šíriace sa rýchlosťou svetla majú fyzikálny význam.

Ak ale neuvažujeme Lorenzovu podmienku, gravitačný zákon sa nám nezjednoduší na d'Alemberta a vyššie zmienené nemusí platiť.

Preto musíme preskúmať obecnú situáciu:

Majme obecný tvar linearizovaných poľných rovníc:

$$\Box \gamma_{\mu\nu} - \gamma^{\varkappa}_{\nu,\varkappa\mu} - \gamma^{\varkappa}_{\mu,\varkappa\nu} + \eta_{\mu\nu}\gamma^{\varkappa\lambda}_{,\varkappa\lambda} = 0$$ ... dosadíme naše riešenie $\gamma_{\mu\nu}$

🌝: $\eta^{\alpha\beta}\gamma_{\mu\nu}k_\alpha k_\beta - \gamma^{\varkappa}_{\nu}k_\varkappa k_\mu - \gamma^{\varkappa}_{\mu}k_\varkappa k_\nu + \eta_{\mu\nu}\gamma^{\varkappa\lambda}k_\varkappa k_\lambda = 0 \quad / \eta^{\mu\nu}$

$$\eta^{\alpha\beta}\gamma^{\nu}_{\nu}k_\alpha k_\beta - \gamma^{\varkappa\mu}k_\varkappa k_\mu(1+1-4) = 0$$

🌍: $\eta^{\alpha\beta}\gamma^{\nu}_{\nu}k_\alpha k_\beta + 2\gamma^{\varkappa\mu}k_\varkappa k_\mu = 0$

Rozoberieme 2 druhy riešenia:

A) k^ρ je svetelný vektor, tj. platí $\eta^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta = 0$

🌍 $\Rightarrow \gamma^{\varkappa\mu}k_\varkappa k_\mu = 0$

$\hookrightarrow$ 🌝: $\gamma^{\varkappa}_{\nu}k_\varkappa k_\mu + \gamma^{\varkappa}_{\mu}k_\varkappa k_\nu = 0$

To musí ale platiť aj pre špeciálnu voľbu $\mu = \nu$:

$$\gamma^{\varkappa}_{\mu}k_\varkappa k_\mu = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma^{\varkappa}_{\mu}k_\varkappa = 0$$

To znamená, že riešenia so svetelnom rýchlosťou splňajú Lorenzovu podmienku automaticky.

B) k^ρ nie je svetelný vektor (vlna sa nešíri rýchlosťou svetla)

$$\eta^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta \neq 0$$

Stále ale môžeme splniť Lorenzovu podmienku. Stačí ak spravíme vhodnú kalibračnú transformáciu:

Z minulej kapitoly vieme, že kalibračná transformácia splňa:

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + \xi^\mu \; ; \; \Box \xi^\mu = \gamma^{\mu\varkappa}_{,\varkappa}$$

Zároveň $\gamma^{\mu\nu}$ stále splňa: $\Box \gamma^{\mu\nu} = -\eta^{\alpha\beta}\gamma_{\mu\nu}k_\alpha k_\beta$

ξ odhadneme ako: $\xi^\mu = -\dfrac{\gamma^{\mu\varkappa}_{,\varkappa}}{\eta^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta}$

A overíme, že skutočne spĺňa kalibračnú podmienku:

$$\Box \xi^{\mu} = \Box\left(-\frac{\gamma^{\mu\kappa}{}_{,\kappa}}{\eta^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta}\right) = -\frac{1}{\eta^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta}\left(-\gamma^{\mu\kappa}{}_{,\kappa}\,\eta^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta\right) = \gamma^{\mu\kappa}{}_{,\kappa} \quad \checkmark$$

Z minula vieme ako sa Gamma kalibračne transformuje:

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\iota}{}_{,\iota}$$

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \left(-\frac{\gamma^{\kappa}_{\mu,\kappa\nu}}{\eta^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta}\right) - \left(-\frac{\gamma^{\kappa}_{\nu,\kappa\mu}}{\eta^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta}\right) + \eta_{\mu\nu}\left(\frac{\gamma^{\lambda\kappa}{}_{,\lambda\kappa}}{\eta^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta}\right)$$

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{\gamma^{\kappa}_{\mu}k_\kappa k_\nu + \gamma^{\kappa}_{\nu}k_\kappa k_\mu - \eta_{\mu\nu}\gamma^{\lambda\kappa}k_\lambda k_\kappa}{\eta^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta}$$

$$\eta^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta\,\gamma'_{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta\,\gamma_{\mu\nu} \cancel{- \gamma^{\kappa}_{\mu}k_\kappa k_\nu - \gamma^{\kappa}_{\nu}k_\kappa k_\mu + \eta_{\mu\nu}\gamma^{\lambda\kappa}k_\lambda k_\kappa}$$

$$\Rightarrow \gamma'_{\mu\nu}\underbrace{\eta^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta}_{\neq 0} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma'_{\mu\nu} = 0$$

$\neq 0$ z predpokladu nesvetelného vlnového vektoru

Vlna je nulová, tj. vlna bola odtransformovaná preč

To znamená, že vlny, ktoré sa nešíria rýchlosťou svetla sú len súradnicovej povahy (môžu byť odtransformované) a preto nemajú žiaden fyzikálny význam. Takže Lorenzova podmienka neodstraňuje žiadne relevantné riešenia.

Ak je v jednom systéme $\gamma^{\mu\nu}$ nulová, potom je aj Riemannov tenzor nulový. Ten je ale kalibračne invariantný a preto musí byť nulový vo všetkých sústavách.

Je to analogické k elektromagnetizmu, kde vlny nešíriace sa rýchlosťou svetla môžu byť odtransformované pomocou kalibráčnej transformácie potenciálu, čo vedie k nulovému tenzoru $F^{\mu\nu}$.

Fyzikálne stupne voľnosti

Aj s Lorenzovou podmienkou je kalibračná voľnost prítomná. Transformácia ktorá splňuje $\Box \xi_\mu = 0$ nenaruší Lorenzovú podmienku.

... stále sú prítomné 4 stupne voľnosti

Túto voľnosť zafixujeme pomocou transverzálnej a bezstopej kalibrácie (transverse and traceless (TT) gauge)

Transverzálna kalibrácia

Znamená, že $\gamma_{0\nu} = 0$, tj. všetky časové zložky tenzora vymiznú.

Kovariantne povedané, nech máme nejakého pozorovateľa s časupodobnou štvor-rýchlosťou u^μ, tak že platí: $\gamma_{\mu\nu} u^\mu = 0$

(Voľba u^μ odpovedá voľbe inercialneho systému)

$\Rightarrow$ to sú 4 podmienky, ale iba 3 sú nové nezávisle, nakoľko máme stále Lorenzovu podmienku: $\gamma_{\mu\nu} k^\mu = 0$

Bezstopá kalibrácia

Znamená, že $\eta^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} = 0$ ... jedna nezávislá podmienka

10 parametrov $\gamma_{\mu\nu}$ (Symetrický tenzor) $-$ (Lorenzova kalibrácia = 4 podmienky; Transverzálna kalibrácia = 3 podmienky; Bezstopá kalibrácia = 1 podmienka) = 2 stupne voľnosti

Ako nájsť TT tvar matice potenciálov?

1. spôsob = explicitný tvar ξ^μ

$\Box \xi^\mu = 0$ ... zvolíme tvar: $\xi^\mu = \hat{\xi}^\mu \sin(x_\rho k^\rho)$

Kalibracná transformácia má potom tvar:

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu} \xi^\iota{}_{,\iota}$$

$$\hat{\gamma}'_{\mu\nu} = \hat{\gamma}_{\mu\nu} - \hat{\xi}_\mu k_\nu - \hat{\xi}_\nu k_\mu + \eta_{\mu\nu} \hat{\xi}^\iota k_\iota \quad / \cdot \eta^{\mu\nu}$$

$$\hat{\gamma}' = \hat{\gamma} - \hat{\xi}^\nu k_\nu (1 + 1 - 4)$$

My požadujeme bezstopost: $\gamma' = 0 \quad \Rightarrow \hat{\xi}^{\nu} k_{\nu} = -\frac{1}{2}\hat{\gamma}$ (bezstopost)

Zároveň požadujeme transverzálnosť:

$$\gamma'_{\mu\nu} u^{\mu} = 0 = (\hat{\gamma}_{\mu\nu} - \hat{\xi}_{\mu} k_{\nu} - \hat{\xi}_{\nu} k_{\mu} + \eta_{\mu\nu} \hat{\xi}^{\iota} k_{\iota}) u^{\mu}$$

$$(\hat{\xi}_{\mu} k_{\nu} - \hat{\xi}_{\nu} k_{\mu}) u^{\mu} = \left(\hat{\gamma}_{\mu\nu} - \frac{\hat{\gamma}}{2}\eta_{\mu\nu}\right) u^{\mu} \equiv \hat{h}_{\mu\nu} u^{\mu} \quad /\cdot u^{\nu}$$

💡: $(\hat{\xi}_{\mu} k_{\nu} - \hat{\xi}_{\nu} k_{\mu}) u^{\mu} u^{\nu} = \hat{h}_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu}$

💣: $\hat{\xi}_{\mu} u^{\mu} = \frac{\hat{h}_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu}}{2 k_{\lambda} u^{\lambda}}$

💡 + 💣 = $\hat{\xi}_{\nu} = \frac{\hat{h}_{\mu\nu} u^{\mu} - \hat{\xi}_{\mu} u^{\mu} k_{\nu}}{k_{\rho} u^{\rho}} = \frac{h_{\mu\alpha} u^{\mu}}{k_{\rho} u^{\rho}} \left(\delta^{\alpha}_{\nu} - \frac{u^{\alpha} k_{\nu}}{2 k_{\lambda} u^{\lambda}}\right)$

... explicitný tvar pre $\hat{\xi}_{\nu}$

2. spôsob = Extrakcia TT tvaru z obecnej metriky

Lemma

Transverzálna a bezstopá metrika splňujúca Lorenzovu kalibráciu môže byť extrahovaná z obecnej metriky $\gamma_{\alpha\beta}$ pomocou:

$$\gamma^{TT}_{\mu\nu} = \left(P^{\alpha}_{\mu} P^{\beta}_{\nu} - \frac{1}{2} P_{\mu\nu} P^{\alpha\beta}\right) \gamma_{\alpha\beta}$$

kde $P^{\alpha}_{\mu} := \delta^{\alpha}_{\mu} + u^{\alpha} u_{\mu} - n^{\alpha} n_{\mu}$

$$n^{\alpha} := \frac{(\delta^{\alpha}_{\lambda} + u^{\alpha} u_{\lambda}) k^{\lambda}}{\sqrt{g_{\rho\sigma}(\delta^{\rho}_{\iota} + u^{\rho} u_{\iota}) k^{\iota} (\delta^{\sigma}_{\kappa} + u^{\sigma} u_{\kappa}) k^{\kappa}}}$$

n^{α}... smer šírenia vlny v systéme pozorovateľa so štvor-rýchlosťou u^{μ}

Z minulej kapitoly vieme: $\gamma_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{h}{2}\eta_{\mu\nu} \; /\cdot \eta^{\mu\nu}$

$$\gamma = h - 2h = -h$$

V TT kalibrácii máme: $\eta^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} \equiv \gamma = 0 \quad \Rightarrow h = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$

Tradičná parametrizácii zvyšných dvoch stupňov voľnosti (polarizácií) má tvar:

🔥: $$h^{TT}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx} & h_{xy} & 0 \\ 0 & h_{xy} & -h_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Takýto tvar reprezentuje rovinnú harmonickú vlnu šíriacu sa smere osi z. Pre takúto vlnu má vlnový vektor tvar $k^{\rho} = \omega(1,0,0,1)$.

Je zrejmé, že Lorenzova podmienka spolu s transverzálnosťou (pozorovateľ môže mať napr. rýchlosť $u^\mu=(u^t,0,0,0)$) a bezstopovosťou sú splnené.

Užitočný výpočet:

$$\Box \gamma_{\mu\nu} = \Box h^{TT}_{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} h^{TT}_{\mu\nu,\alpha\beta} = -h^{TT}_{\mu\nu,00} + \overset{\sim h_{\mu\nu}k_1=0}{\cancel{h^{TT}_{\mu\nu,11}}} + \overset{\sim h_{\mu\nu}k_2=0}{\cancel{h^{TT}_{\mu\nu,22}}} + h^{TT}_{\mu\nu,33} = 0$$

tvar k^ρ

$\Rightarrow$ 💧: $h^{TT}_{\mu\nu,00} = h^{TT}_{\mu\nu,33}$

Riemannov tenzor má len dve nezávisle netriviálne zložky:

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\left(h_{\mu\lambda,\nu\kappa} + h_{\nu\kappa,\mu\lambda} - h_{\mu\kappa,\nu\lambda} - h_{\nu\lambda,\mu\kappa}\right)$$

$$R_{i0j0} = \frac{1}{2}\left(\cancel{h_{i0,0j}} + \cancel{h_{0j,i0}} - h_{ij,00} - \cancel{h_{00,ij}}\right) = -\frac{1}{2}h^{TT}_{ij,00}$$

$$R_{i3j3} = \frac{1}{2}\left(\cancel{h_{i3,3j}} + \cancel{h_{3j,i3}} - h_{ij,33} - \cancel{h_{33,ij}}\right) = -\frac{1}{2}h^{TT}_{ij,33} \overset{\text{💧}}{=} -\frac{1}{2}h^{TT}_{ij,00} = R_{i0j0}$$

$$R_{i0j3} = \frac{1}{2}\left(\cancel{h_{i3,0j}} + \cancel{h_{0j,i3}} - h_{ij,03} - \cancel{h_{03,ij}}\right) = -\frac{1}{2}h^{TT}_{ij,03}$$

$$R_{i3j0} = -\frac{1}{2}h^{TT}_{ij,03} = R_{i0j3}$$

Nakoľko $\Box h^{TT}_{\mu\nu}=0$, musí teda platiť aj $\Box R_{\mu\nu\kappa\lambda} = 0$

Doteraz sme hovorili len o monochromatických vlnách. Našťastie vďaka linearite teórie, všetky závery môžu byť zobecnené pre reálne gravitačné vlny pomocou rozkladu na jednotlivé monochromatické módy (frekvencie) vlny (Fourierov rozklad):

$$\gamma_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{4\pi^2}\iint \gamma_{\mu\nu}(\omega,\vec{k})\cos(k_\rho x^\rho)\, d^3k\, d\omega$$

$h_{\mu\nu}$ tenzor nemôže byť obecne rozložený do tvaru 🔥, ak sa superpozícia skladá z viacerých módov šíriacich sa rôznymi smermi

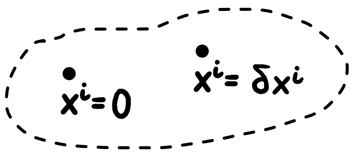
Každý vlnový balík je zložený superpozíciou rovinných vĺn a je možné jeho $h_{\mu\nu}$ previesť do TT kalibrácie (užitočné pre žiarivé polia). Na druhú stranu, nie každé pole môže byť transformované do TT kalibrácie (napr. stacionárne polia ako Schwarzschild alebo Kerr nemôžu byť prevedené kvôli členom $\frac{2M}{r}$ a $\frac{2J}{r}$, pri ktorých Fourierov integrál diverguje).

Efekt gravitačných vĺn na testovacie častice

Uvažujme, že máme TT-metriku, podobnú 🔥. Zapíšeme ju v tvare:

$$ds^2 = -dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j \qquad (g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$$

Ďalej majme 2 voľné testovacie častice, ktoré pred príchodom vlny sú v kľude, tj. $u^i=0$ (v súradniciach fixovaných TT-kalibráciou)



Rovnice geodetiky:

$$\left.\begin{aligned}\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 0\\ \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{00}(u^0)^2 = 0\end{aligned}\right\} u^i=0$$

Pre našu metriku máme:

$$\Gamma^\alpha{}_{00} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\left(\cancel{g_{\mu0,0}} + \cancel{g_{0\mu,0}} - \cancel{g_{00,\mu}}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \frac{du^\mu}{d\tau} = 0$$

$\Rightarrow u^\mu = (u^t,0,0,0)$ sa nezmení ani v prípade, že dorazila vlna. Častice zostávajú na svojich polohách. To ale neznamená, že sa nezmení vlastná vzdialenosť medzi týmito časticami.

Uvažujme, že s prvou časticou zviažeme LIS a budeme sledovať ako sa mení pozícia druhej častice v tomto systéme.

Rovnica geodetickej deviácie (LIS):

$$\frac{d^2\delta x^{\hat i}}{d\tau^2} = -R^{\hat i}{}_{\hat 0\hat j\hat 0}\,\delta x^{\hat j}$$

Nakoľko Riemannov tenzor je kalibračne nezávislý, môžeme pracovať s TT komponentami, ktoré sme si vypočítali:

🚗: $$\frac{d^2\delta x_{\hat i}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}h_{\hat i\hat j,\hat 0\hat 0}\,\delta x^{\hat j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{ij}}{\partial\tau^2}\,\delta x^j$$

Toto úzko odpovedá Newtonovským slapovým silám:

$$\frac{d^2\delta x^i}{d\tau^2} = -\Phi^{,i}{}_j\,\delta x^j$$

Dôležité je si povšimnúť, že $h_{3j}=0$, takže relatívne zrýchlenie častíc v smere z je nulové. Vlna pôsobí iba v rovine kolmej k vlnovému vektoru (analogické k EM vlnám)

Integráciou 🚗 dostávame:

$$🚌: \quad \delta x^{\hat{i}}(\tau) = \delta x^{\hat{i}}(\tau_{in}) + \frac{1}{2} h_{ij}(\tau)\, \delta x^{\hat{j}}(\tau_{in})$$

Pre TT vlnu sa mení vlastná vzdialenosť iba v $\hat{x}$ a $\hat{y}$. ALE treba si uvedomiť, že $\delta\hat{x}(\tau)$ závisí na $\delta\hat{x}(\tau_{in})$ a aj na $\delta\hat{y}(\tau_{in})$.

Aj tak je ale ilustratívne rozložiť vlnu do dvoch stavov polarizácie.

Rozloženie vlny do nezávislých stavov polarizácie

Máme dva stupne voľnosti vlny, ktoré odpovedajú dvom nezávislým stavom polarizácie, do ktorých môže byť vlna rozložená.

2 typy rozkladu polarizácie:
- 2 lineárne módy
- 2 kruhové módy

Lineárne módy

$$h_{\mu\nu} = h^{+}_{\mu\nu} + h^{\times}_{\mu\nu} \qquad h^{TT}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx} & h_{xy} & 0 \\ 0 & h_{xy} & -h_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Explicitne zapísané ako:

$$h^{+}_{ij} = \mathrm{Re}\left\{\hat{h}^{+} e^{ik_\rho x^\rho}\left[(\vec{e}_x)_i(\vec{e}_x)_j - (\vec{e}_y)_i(\vec{e}_y)_j\right]\right\}$$

$$h^{\times}_{ij} = \mathrm{Re}\left\{\hat{h}^{\times} e^{ik_\rho x^\rho}\left[(\vec{e}_x)_i(\vec{e}_y)_j + (\vec{e}_y)_i(\vec{e}_y)_j\right]\right\}$$

Amplitúdy

2 navzájom kolmé jednotkové vektory (v rovine kolmej ku $\vec{k}$)

Pre kruhovú polarizáciu:

$$\vec{e}_x \longrightarrow \vec{e}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)$$

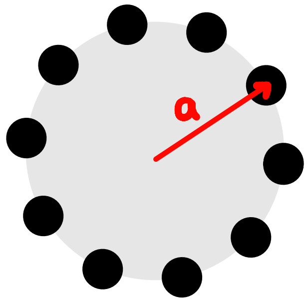
$$\vec{e}_y \longrightarrow \vec{e}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - i\vec{e}_y)$$

Pre "plus" mód vložením do 🚌 dostávame:

$$\delta\hat{x}(\tau) = \left[1 + \frac{1}{2} h_{xx}(\tau)\right] \delta\hat{x}(\tau_{in})$$

$$\delta\hat{y}(\tau) = \left[1 - \frac{1}{2} h_{xx}(\tau)\right] \delta\hat{y}(\tau_{in})$$

Efekt je lepšie viditeľný na krúžku testovacích častíc, pôvodne v kľude:



$$[\delta\hat{x}(\tau_{in}); \delta\hat{y}(\tau_{in})] = [a\cos\phi, a\sin\phi]$$

$$[\delta\hat{x}(\tau_{in})]^2 + [\delta\hat{y}(\tau_{in})]^2 = a^2$$

$$\left[\frac{\delta\hat{x}(\tau)}{a(1+\frac{1}{2}h_{xx}(\tau))}\right]^2 + \left[\frac{\delta\hat{y}(\tau)}{a(1-\frac{1}{2}h_{xx}(\tau))}\right]^2 = 1$$

Toto je elipsa, ktorej poloosi sú $a(1\pm\frac{1}{2}h_{xx}(\tau))$ meniace sa časom.

Ak zvolíme h_{xx} špeciálne:

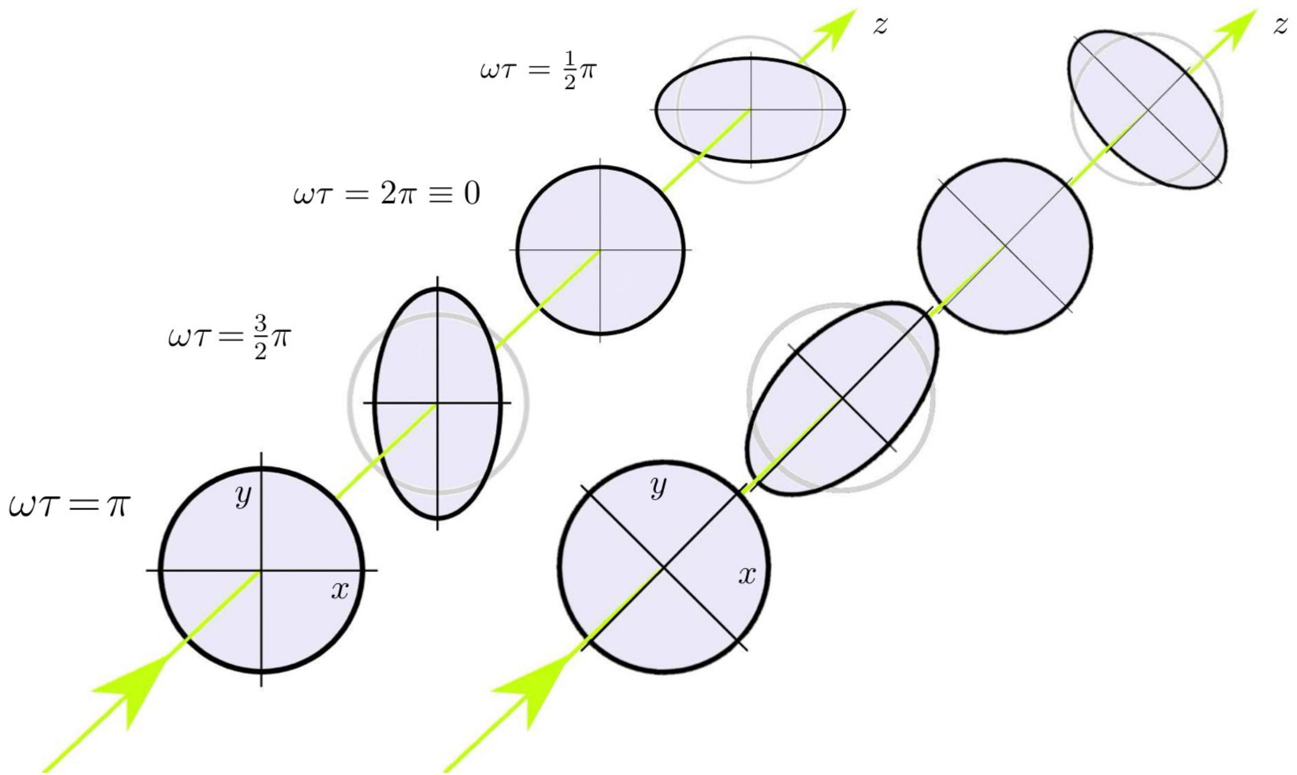
$$h_{xx} = \mathrm{Re}\{\hat{h}^+ e^{i\omega t}\} = \overset{0}{\cancel{\mathrm{Re}\{\hat{h}^+\}\cos\omega t}} + \overbrace{\mathrm{Im}\{\hat{h}^+\}}^{\equiv\hat{h}}\sin\omega t = \hat{h}\sin\omega t$$

...pretože v čase $t=0$ chceme h_{xx} nulovú, tj. častice sú na začiatku v kruhu

V takom prípade poloosi sú $a[1\pm\hat{h}\sin\omega t]$, čo znamená, že elipsa periodicky pulzuje v protifáze (kvadrupólovo) pozdĺž osí x a y.

V prípade h sa krúžok častíc správa analogicky, len je stočený o 45°, tak že pulzuje voči diagonálami medzi osami x a y (v prípade EM je polarizácia stočená o 90°)

Pre kruhovú polarizáciu dostávame, že L mód rotuje elipsu s konštantnou uhľovou rýchlosťou $\omega/2$ ľavotočivo, zatiaľ čo R mód rotuje elipsu pravotočivo vzhľadom na smer $\vec{k}$.



polarizácia +   polarizácia ×

Helicita

Helicita poľa Ψ je číslo h, také že sa vlna správa pri rotácii o uhol θ (voči smeru šírenia) podľa vzťahu:

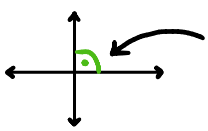
$$\Psi' = e^{ih\theta}\,\Psi$$

Dá sa to vyčítať zo symetrie rovinných vĺn

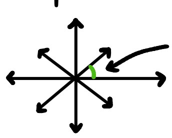
$\Downarrow$

Tie sú symetrické voči rotácii o uhol $\frac{2\pi}{h}$

Pre EM vlny máme symetriu pod uhlom $2\pi \Rightarrow h_{EM} = 1$

V EM máme polarizáciu:  $\frac{\pi}{2h} \Rightarrow h_{EM} = 1$

Pre GV vlny máme symetriu pod uhlom $\pi \Rightarrow h_{GV} = 2$

V GV máme polarizáciu:  $\frac{\pi}{2h} \Rightarrow h_{GV} = 2$