Moment hybnosti (spin) + Fermi-Walker prenos

1. časť: Spin + Fermiho prenos

→ pracujeme v špeciálnej relativite najprv: Minkowského metrika $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$

→ pre voľnú časticu platí, že 4-hybnosť $\boxed{p^\alpha = M u^\alpha}$ je konštantná.

↳ zachováva sa $\frac{dp^\alpha}{d\tau} = 0$

→ zavádzame zobecnenie klasického momentu hybnosti $(\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p})$: (pre jednu voľnú časticu)

$$\boxed{L^{\mu\nu} = (x^\mu - a^\mu)p^\nu - (x^\nu - a^\nu)p^\mu}$$

... tiež sa behom pohybu častice zachováva

$$\frac{dL^{\mu\nu}}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau}p^\nu - (x^\mu - a^\mu)\underbrace{\frac{dp^\nu}{d\tau}}_{\to 0} - \frac{dx^\nu}{d\tau}p^\mu - (x^\nu - a^\nu)\underbrace{\frac{dp^\mu}{d\tau}}_{\to 0} = u^\mu p^\nu - u^\nu p^\mu = M(u^\mu u^\nu - u^\mu u^\nu) = 0$$

a^μ je ľubovoľný pevný svetobod.

Pre sústavu častíc neplatí len $L^{\mu\nu}_{celk} = \sum_{častice} L^{\mu\nu}$

z dôvodov: 1) obecne sila nie je v relativite centrálna (napr. Lorentz.)

2) máme retardovanú interakciu (sily neurčené polohami v čase!)

(neplatí II. impulzová veta ako v klasickej mech.: $\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i \to \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$)

→ teda celkový moment hybnosti izolovaného systému interag. častíc by sa nezachovával L

Do celkového momentu hybnosti treba zahrnúť aj interakciu častíc → ľahko vyjdeme z tenzoru energie a hybnosti $T^{\mu\nu}$ → tenzor momentu hybnosti (vzťažený k bodu a^μ):

$$\boxed{M^{\lambda\mu\nu} = (x^\lambda - a^\lambda)T^{\mu\nu} - (x^\mu - a^\mu)T^{\lambda\nu}}$$

$T^{\mu\nu}$: celkový tenzor e.-h. izolovaného systému, spĺňa ZZ energie aj hybnosti: $\boxed{T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0}$

Potom pre symetrický $T^{\mu\nu}$:

$$\boxed{M^{\lambda\mu\nu}{}_{,\nu}} = (x^\lambda - a^\lambda)_{,\nu}T^{\mu\nu} + \cancel{(x^\lambda - a^\lambda)T^{\mu\nu}{}_{,\nu}} - (x^\mu - a^\mu)_{,\nu}T^{\lambda\nu} - \cancel{(x^\mu - a^\mu)T^{\lambda\nu}{}_{,\nu}} = \delta^\lambda_\nu T^{\mu\nu} - \delta^\mu_\nu T^{\lambda\nu}$$

$$\boxed{= \underbrace{T^{\mu\lambda} - T^{\lambda\mu}}_{\to \text{symetrický tenzor}} = 0}$$

→ aj prach, EM poľa aj id. kvapaliny je $T^{\mu\nu}$ sym. !

možné symetrizovať

→ obecne sa dá vždy zkonštruovať symetrický celkový tenzor $T^{\mu\nu}$ v izolovanom sys. látok a polí (z klasickej mechaniky kontinua → tenzor (napätia) sym. musí byť, lebo inak by v rovnováhe bola nevyrušená dvojica síl → vznik elementu látky do ľubovoľnej uhlovej rýchlosti →

$dM_i^{celk} = \vec{r}\times d\vec{F}_{obj} + \vec{r}\times d\vec{F}_{ploš}$: $M_i^{celk} = \int_\Omega \varepsilon_{ijk} x_j F_k \, dV + \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kn} \, d\Sigma = \int_\Omega \left(\varepsilon_{ijk} x_j \left(F_k + \frac{\partial\tau_{nk}}{\partial x_n}\right) + \varepsilon_{ijk}\tau_{jk}\right) dV$ $F_i + \frac{\partial\tau_{ji}}{\partial x_j} = 0$ 2 podm. rovnováhy; $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ sym. !)

Z diferenciálneho zákona zachovania ⛄ zformulujeme integrálnu verziu →

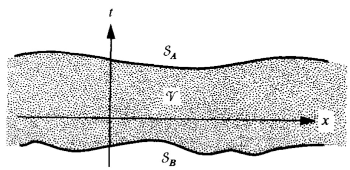
$$\boxed{0 = \int_\Omega M^{\lambda\mu\nu}{}_{,\nu}\, d^{(4)}\Omega \overset{🎁}{=} \int_{\partial\Omega} M^{\lambda\mu\sigma} d^{(3)}\Sigma_\sigma}$$

, 🎁 využitie Gaussovej vety

ďalej definujeme integrály: $J^{\lambda\mu} \equiv \int_\Sigma M^{\lambda\mu\sigma} d^{(3)}\Sigma_\sigma$ → cez priestor. nadplochu Σ sa zachov.

(b) This means that $J^{\mu\nu}$ *is independent of the hypersurface* $\mathcal{S}$ *on which it is calculated* (Gauss's theorem):

$$J^{\mu\nu}(\mathcal{S}_A) - J^{\mu\nu}(\mathcal{S}_B) = \int_{\partial\mathcal{V}} \mathcal{J}^{\mu\nu\alpha}\, d^3\Sigma_\alpha = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{J}^{\mu\nu\alpha}{}_{,\alpha}\, d^4x = 0.$$



(Note: $\partial\mathcal{V} \equiv$ (boundary of $\mathcal{V}$) includes $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_B$, and timelike surfaces at spatial infinity; contribution of latter dropped—localized source.)

Gravitation str. 157

Pre nadplochu súčasnosti $\Sigma(t=konšt.)$: $J^{\lambda\mu} = \int_{t=konšt.} M^{\lambda\mu 0} d^3x = \int_{t=konšt.} \left[(x^\lambda - a^\lambda)T^{\mu 0} - (x^\mu - a^\mu)T^{\lambda 0}\right] d^3x$ 💎

a keďže aj zminula vieme $\left(P_m = -\int T_{m0} d^3x'\right)$, že T^{m0} je m-tá zložka hustoty hybnosti, je 💎 integrand s $\lambda\neq 0, \mu\neq 0$ klasický moment hybnosti $(\vec{r}\times\vec{P})$!

ľahko vidíme antisymetričnosť: $M^{\lambda\mu\nu} = -M^{\mu\lambda\nu}$ aj $J^{\lambda\mu} = -J^{\mu\lambda}$.

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -d & -g \\ -b & -e & -h \\ -c & -f & -i \end{pmatrix} \to \begin{matrix} a,e,i = 0 \\ b=-d,\ c=-g,\ f=-h \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$ → J^{mn} priestor. zložky sú len 3 nezávislé a práve tieto 3 zložky popisujú celkový moment hybnosti izolovaného systému v čase t=konšt. okolo bodu a^m.

Nové ešte ďalšie 3 zložky → $J^{0m} = -J^{m0}$ ($\forall\, \Sigma$ idúce cez t=konšt.):

$$J^{0m} = (t - a^0)\int T^{m0} d^3x - \int (x^m - a^m) T^{00} d^3x = (t - a^0)P^m - \underbrace{\int x^m T^{00} d^3x}_{\text{toto vyjadríme}} + a^m P^0$$

↳ tieto 3 zložky súvisia s pohybom hmotného stredu systému

Definujeme priestor. súradnice hmotného stredu →

→ máme tak: $\frac{1}{P^0}\int x^m T^{00} d^3x \equiv x^m_S = (t-a^0)\frac{P^m}{P^0} + a^m - \frac{J^{0m}}{P^0}$

$$\boxed{x^m_S = \frac{\int x^m T^{00} d^3x}{P^0}}$$

a pre nadplochu t=konšt. (stále) tak máme ∀ fce napravo konštanty → RPP hmotného stredu

s 3-rýchlosťou: $\frac{dx^m_S}{dt} = \frac{P^m}{P^0}$ → odpovedá 4-rýchlosti $\boxed{U^\mu = \frac{P^\mu}{(-P_\sigma P^\sigma)^{1/2}} = P^\mu M^{-1}}$

→ tu M je celková kľudová hmotnosť izolovaného systému

Presun do kľudovej inerciálnej sústavy

...doteraz sme pracovali v pevnom ľubovoľnom inerc. sys. IS.

...no z východzieho princípu STR máme 1 súrad. sys. privilegovaný !

→ nazveme ho kľudový $\overline{IS}$ nášho fyz. sys. → hýbe sa 4-rýchl. u^μ.

platí: $\bar P^0 = M$, $\bar P^i = 0$.

→ obdobné zavedenie **vlastného hmotného stredu (VHS)** fyz. sys.:

všetky hmotné stredy sa hýbu rovnakou 4-rýchl.

→ teda sú v kľude voči $\overline{IS}$ aj voči vlast. hm. str.

$$\boxed{\bar x^m_{VS} = M^{-1}\int_{\bar t = \text{konšt.}} \bar x^m \bar T^{00} d^3\bar x}$$

Vnútorný (spinový) moment hybnosti nazveme moment hybnosti okolo akejkoľvek udalosti, kt. leží na svetočiare VHS. Značíme $S^{\mu\nu}$ (nie $J^{\mu\nu}$).

→ v $\overline{IS}$ sú súr. tejto udalosti $(\bar a^0, \overset{\bar a^m}{\bar x^m_{VS}})$

→ z rovnice pre J^{0m} spočítame $\bar S^{0m} = \cancel{(\bar t-\bar a^0)}\overset{0}{\bar P^m} - \overbrace{\int \bar x^m \bar T^{00} d^3\bar x}^{\bar x^m_{VS}\cdot M} + \overset{\bar x^m_{VS}\cdot M}{\bar a^m \bar P^0} = 0$

→ 3 nezávislé nenulové zložky $\bar S^{mn}$ (aj celého $\bar S^{\mu\nu}$) priradíme 4-vektoru spinu:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & -a & 0 & c \\ 0 & -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ $\bar S_0 = 0$, $\bar S_1 = \bar S^{23}$, $\bar S_2 = \bar S^{31}$, $\bar S_3 = \bar S^{12}$ → $\bar S^\mu = (0, \bar S^{23}, \bar S^{31}, \bar S^{12})$

→ v obecnom inerc. sys. IS má 4-vektor spinu S^μ zložky: $\boxed{S_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} S^{\nu\kappa} u^\lambda}$

$\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}$ ... Levi-Civitta tenzor

dôkaz v $\overline{IS}$: $\bar u^\lambda = (1,0,0,0)$, $\bar S^{\nu\kappa} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S^{12} & S^{31} \\ 0 & -S^{12} & 0 & S^{23} \\ 0 & -S^{31} & -S^{23} & 0 \end{pmatrix}$ → $\bar S_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\kappa 0}\bar S^{\nu\kappa}\bar u^0$ →

$\mu = 0$: $\bar S_0 = 0$ | $\mu = 1$: $\bar S_1 = -\frac{1}{2}\varepsilon_{1\nu\kappa 0}\bar S^{\nu\kappa}\bar u^0$ $(\nu,\kappa) = \{(2,3),(3,2)\}$, 0123 : 1320 ⊕ : 1230 ⊖

$= -\frac{1}{2}\left(1.\bar S^{32}.1 + (-1).\bar S^{23}.1\right) = -\frac{1}{2}\left(-\bar S^{23} - \bar S^{23}\right) = \bar S^{23}$!

$\bar S_2, \bar S_3$ analogicky ☒

→ Vráťme sa na chvíľu k celkovému momentu hybnosti $J^{\mu\nu}$ okolo obecného bodu a^μ.

... zmeňme referenčný bod $a^\mu \to \tilde{a}^\mu$ a ich rozdiel: $b^\mu \equiv \tilde{a}^\mu - a^\mu$, máme z zmenu momentu hybnosti (stále pri t=konšt.):

$$J^{\lambda\mu}\Big|_{\tilde{a}} - J^{\lambda\mu}\Big|_a = \int\left[(\cancel{x^\lambda}-\tilde{a}^\lambda)T^{\mu 0} - (\cancel{x^\mu}-\tilde{a}^\mu)T^{\lambda 0}\right]d^3x - \int\left[(\cancel{x^\lambda}-a^\lambda)T^{\mu 0} - (\cancel{x^\mu}-a^\mu)T^{\lambda 0}\right]d^3x$$

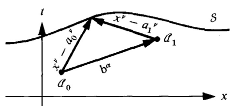
$$= -(\tilde{a}^\lambda - a^\lambda)\overbrace{\int T^{\mu 0}d^3x}^{P^\mu} + (\tilde{a}^\mu - a^\mu)\overbrace{\int T^{\lambda 0}d^3x}^{P^\lambda}$$

$$= -b^\lambda P^\mu + b^\mu P^\lambda$$

C. Change of Point About Which Angular Momentum is Calculated

Let b^α be vector from $\mathscr{a}_0$ to $\mathscr{a}_1$: $b^\alpha = a_1{}^\alpha - a_0{}^\alpha$. Then

$$J^{\mu\nu}(\text{about } \mathscr{a}_1) - J^{\mu\nu}(\text{about } \mathscr{a}_0)$$
$$= -b^\mu \int_S T^{\nu\alpha}\, d^3\Sigma_\alpha + b^\nu \int_S T^{\mu\alpha}\, d^3\Sigma_\alpha$$
$$= -b^\mu P^\nu + b^\nu P^\mu,$$



where P^μ is total 4-momentum.

Gravitation str. 157

→ ak špeciálne a^μ leží na svetočiare VHS: $J^{\lambda\mu}\big|_a \equiv S^{\lambda\mu}$!

Je hneď vidieť, že vo vzťahu môžeme miesto $S^{\nu\kappa}$ písať $J^{\nu\kappa}$, teda moment hybnosti okolo ľubovoľného bodu, lebo $J^{\nu\kappa}\big|_{\tilde{a}} \equiv J^{\nu\kappa} = -b^\nu P^\kappa + b^\kappa P^\nu + S^{\nu\kappa}$ keď dosadíme do a vynásobíme $u^\lambda = \frac{P^\lambda}{M}$ → 2 členy kvadratické v 4-hyb.: $-b^\nu P^\kappa P^\lambda + b^\kappa P^\nu P^\lambda$

symetrický kvadrát pri kontrakcii s antisymetrickým ε.... vypadnú (zostane len $S^{\nu\kappa}$!)

→ takže pre 4-vektor spinu máme obecnejšie: $S_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} J^{\nu\kappa} u^\lambda$

Po vynásobení u^μ hneď máme (zdôvodn. ako P kvadrát): $S_\mu u^\mu = 0$

⇒ 4-vektor spinu je kolmý k 4-rýchlosti systému.

Vzťah môžeme klasicky prepísať: $J^{\lambda\mu} = S^{\lambda\mu} + L^{\lambda\mu}$ → celkový moment hybnosti voči obecnému bodu $\tilde{a}^\mu$ je zložený z vnútorného m.h. (spinu) pre bod a^μ (poloha VHS) $S^{\lambda\mu} = J^{\lambda\mu}\big|_a$ a orbitálneho momentu $L^{\lambda\mu} = -b^\lambda P^\mu + b^\mu P^\lambda$.

($L^{\lambda\mu}$ je moment hybnosti hmotného bodu s 4-hybnosťou P^μ, kt. je umiestnený vo VHS systému voči bodu $\tilde{a}^\lambda$ oproti $L^{\lambda\mu}$ v 1. vzorci a tu → zámenou $x^\lambda \to a^\lambda$ a $a^\lambda \to \tilde{a}^\lambda$)

Pozn.: ak poznáme $J^{\lambda\mu}$ a P^μ, môžme spočítať b^μ medzi bodom VHS a ľubovoľným, ku ktorému je vzťažené $J^{\lambda\mu}$. Vzorec pre projekciu $b^\mu \perp$ k u^μ:

$$b_\perp^\lambda = b^\lambda + u^\lambda(u_\sigma b^\sigma) = M^{-2} \cdot J^{\lambda\mu} P_\mu$$

Pre izolovaný systém platí: zachovanie 4-vekt. spinu so 4-vekt. celkovej hybnosti a s celkovým momentom hybnosti:

$$\boxed{\frac{dS_\mu}{dt} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\frac{dJ^{\nu\kappa}}{dt}u^\lambda - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}J^{\nu\kappa}\frac{d}{dt}\left(\frac{P^\lambda}{M}\right) = 0} \quad \left(\frac{dS^{\cdot}}{dt} = 0 \iff \frac{dJ^{\cdot\cdot}}{dt} \wedge \frac{dP^{\cdot}}{dt}\right)$$

No v prípade nestacionárneho systému (napr. systém so žiarením odchádzajúcim $\to \infty$) máme vzťah pre rýchlosť straty momentu hybnosti plochou S (priestorovou) a vzhľadom k počiatku súr.:

$$-\frac{dJ^{\mu\nu}}{dt} = \oint_S M^{\mu\nu j} d^{(2)}S_j = \oint_S (x^\mu T^{\nu j} - x^\nu T^{\mu j}) d^{(2)}S_j$$

($S \to$ plocha vovlnovej zóne)

$\to$ najčastejší je záujem o stratu vnútorného momentu hybnosti v systéme, kde $P^m = 0$ a počiatok = hm. stred: $a^\mu = 0 = x^\mu_{VS}$. Napr. pri grav. poli v situácii s dvojhviezdou obiehajúcou okolo spoločného hm. str., sa stráca moment hyb. v dôsledku vyžarovania grav. vĺn

Poznámka k inerciálnym systémom:

hm. str. v IS $\left(x_S^m = \frac{\int x^m T^{00} d^3x}{P^0}\right)$ sa líši od definovaného VHS v IS $\left(\bar{x}^m_{VS} = M^{-1}\int \bar{x}^m \bar{T}^{00} d^3\bar{x}\right)$

$\to$ ho x_S^μ je voči vlastnému $\bar{x}^\mu_{VS}$ všade, lebo sa hýbe v IS 4-rýchl. u^μ

(vzťahy $\to$ $\frac{dx_S^m}{dt} = \frac{P^m}{P^0}$ $\quad u^\mu = \frac{P^\mu}{(-P_\sigma P^\sigma)^{1/2}} = \frac{P^\mu}{M}$)

$\to$ chceme nájsť vzťah medzi polohou VHS a hm. stredu voči IS

vrátime sa k vzťahu: $x_S^m = (t-a^0)\frac{P^m}{P^0} + a^m - \frac{J^{0m}}{P^0}$ $\to$ za udalosť a^μ volíme ľubovoľ. udalosť na svetočiare VHS $\Rightarrow$ miesto $J^{0m} \to S^{0m}$ a $a^m \to x^m_{VS}$

(to sú priestor. súr. VHS merané v IS) $\Rightarrow$ (v súr. sys. IS):

$$\boxed{(t-a^0)P^m - (x_S^m - x^m_{VS})P^0 - S^{0m} = 0}$$

→ priame zavedenie 4-vektora rozdielu udalostí: $\Delta x^\mu_S(v\,IS) = (t - a^0, x^m_S - x^m_{VS})$

↳ spojenie udalosti na svetočiare VHS s udalosťou na svetočiare HS voči IS

+ zavedieme 4-vektor V^μ → v IS má zložky: $V^\mu = (1,0,0,0)$

(význam: 4-rýchlosť IS voči inej ľubov. IS')

⇒ predošlá rovnica v tenzorovom tvare: $\boxed{(\Delta x^\mu_S P^\nu - \Delta x^\nu_S P^\mu - S^{\mu\nu})V_\mu = 0}$

(v IS sa redukuje na □ rovnicu: $\mu=0$ len prežije!..)

→ tenzorová rovnica → stačí dokázať platnosť v 1 systéme a to $\overline{IS}$ → $P^m = 0$, $P^0 = M$

pre $\mu=0$: $(\Delta x^0_S P^\nu - \Delta x^\nu_S P^0 - S^{0\nu})V_0 = 0$
- $\nu=0$: $(\Delta x^0_S P^0 - \Delta x^0_S P^0 - S^{00})V_0 = 0$
- $\nu=m$: $(\Delta x^0_S P^m - \Delta x^m_S P^0 - S^{0m})V_0 = 0$

pre $\mu=i$: $(\Delta x^i_S P^\nu - \Delta x^\nu_S P^i - S^{i\nu})V_i = 0$
- $\nu=0$: $(\Delta x^i_S P^0 - \Delta x^0_S P^i - S^{i0})V_i = 0$
- $\nu=m$: $(\Delta x^i_S P^m - \Delta x^m_S P^i - S^{im})V_i = 0$

⊕ $\nu=m$: $-\Delta x^m_S P^0 V_0 - S^{im} V_i = 0$

$\nu=0$: $\Delta x^i_S P^0 V_i = 0$

Prípad $\nu=m$: $\Delta x^m_S = -\frac{1}{P^0} S^{im}\left(\frac{V_i}{V_0}\right) \equiv -\frac{1}{M} S^{im} N_i$ → vektorovo: $\boxed{\Delta\vec{x}_S = -\frac{1}{M}(\vec{N}\times\vec{S})}$

, kde $\vec{N} \equiv \frac{V_i}{V_0}$ je obyčajná rýchlosť sys. IS (hm.str.) v systéme $\overline{IS}$ (VHS), no oba HS sú v kľude v $\overline{IS}$ a separuje ich práve $\Delta\vec{x}_S$

(priame overenie tohto 3D vzťahu: → $\varepsilon_{ijk} N_j S_k =$ $i=1$: $N_2S_3 - N_3S_2 = N_2S^{12} - N_3S^{31}$; $i=2$: $N_3S_1 - N_1S_3$ ⋮; $i=3$: $N_1S_2 - N_2S_1$)

→ hmotné stredy splynú len vtedy, ak fyz. sys. nemá spin: $\vec{S} = 0$!

Z prípadu $\nu=0$: $\Delta\vec{x}_S \cdot \vec{N} = 0$ → plynie easy z (nerelat. lim. $\Delta\vec{x}_S \sim \frac{1}{Mc^2}(\cdot\cdot) \doteq 0$)

Z hľadiska $\overline{IS}$ vytvoria všetky možné HS voči rôznym IS kruhový disk $\perp \vec{S}$

s polomerom $\boxed{\rho = \frac{|\vec{S}|}{cM}}$ so stredom v x^μ_{VS}.

(zem: $\rho \approx 10$ m, Sys. atómových rozmerov a: $\rho \sim a$)

Ďalší dôsledok : polomer fyz. sys. konečných rozmerov ($T^{00} = 0$ mimo r), dané $M, |\vec{S}|$

je ohraničený zospodu (v $\overline{IS}$): $r \geq \rho$, ak má byť v ∀ IS $T^{00} \geq 0$. (Pre dané r, M → určená podm. na $|\vec{S}|$ zhora!)

Fermiho prenos

→ sme v $\overline{IS}$, vlastný hm. stred fyz. sys. je v kľude. Nech na sys. pôsobí sila, len v bode $\bar{x}^\mu_{VS}$ → nevznikajú žiadne momenty síl. (Napr. bezsilový zotrvačník v hm. strede alebo bodová častica so spinom)

Potom v $\overline{IS}$, kde $u^\lambda = (1,0,0,0)$ a $S^0 = 0$ v danom okamihu platí: $\frac{dS^i}{d\tau} = 0$ → v Lorentzovsky

invariantnom tvare v ľubov. IS: $\boxed{\frac{dS^\mu}{d\tau} = \lambda u^\mu}$ 1), τ... vlastný čas vlast. hm. str. a (dosadením $u^\mu = (1,0,0,0)$ a $S^0 = 0$ 1) sedí) λ... zatiaľ len multiplikatívny faktor

Derivovaním podm. ortogonality S^μ z 1. časti $(S_\mu u^\mu = 0)$ + branie do úvahy 1) →

$\left(\frac{d}{d\tau}(S_\mu u^\mu) = \frac{dS_\mu}{d\tau}u^\mu + S_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = 0 \rightarrow\right)$ $S_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} + \lambda u_\mu u^\mu = 0$ → $u_\mu u^\mu = -1$! ⇒

→ $\boxed{\lambda = S_\mu \frac{du^\mu}{d\tau}}$ a tak celkovo pre zmenu 4-vektoru spinu: $\boxed{\frac{dS^\iota}{d\tau} = \left(S_\mu \frac{du^\mu}{d\tau}\right)u^\iota}$

$\hookrightarrow \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{f^\mu}{m}$ rovnica Fermiho prenosu

→ vektor S^ι, kt. spĺňa túto rovnicu pozdĺž svetočiary $x^\mu(\tau)$ s dotyčnými vektormi $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ sa pozdĺž tejto svetočiary prenáša Fermiho prenosom

→ vektor S^ι voči osám $\overline{IS}$ žiadnu rotáciu nekoná ak v tom okamihu $U^\mu = (1,0,0,0)$ → koná jedine rotáciu v časovej rovine (v rovine vektorov U^μ a $\frac{du^\mu}{d\tau}$) → pričom zostáva stále ortogonálny k u^μ.

→ Rovnica FP skutočne zaisťuje zachovanie podmienky $S_\kappa U^\kappa = 0$ počas prenosu: $\frac{d}{d\tau}(S_\kappa u^\kappa) = \frac{dS_\kappa}{d\tau}u^\kappa + S_\kappa \frac{du^\kappa}{d\tau} = \left(S_\mu \frac{du^\mu}{d\tau}\right)\overbrace{u_\kappa u^\kappa}^{-1} + S_\kappa \frac{du^\kappa}{d\tau} \overset{!}{=} 0$

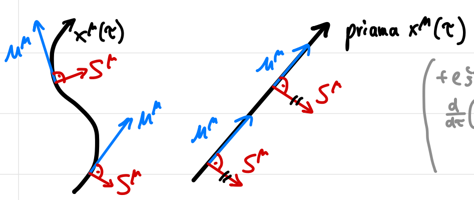
dole index   dole index

... Ak fyzik. systém (častica, zotrvačník) nie je urýchlený ⇒ jeho spin sa prenáša paralelne → S^ι = konšt. | teda FP pozdĺž priamych svetočiar (u^μ = konšt.) prechádza v PP.

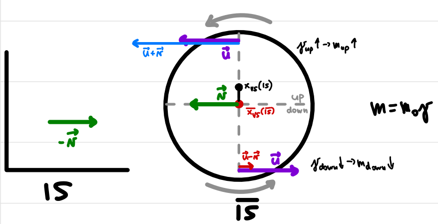
→ v prípade zrýchleného pohybu spin zachováva svoj smer a veľkosť v ∀ okamžitom $\overline{IS}$ (kľud.) no voči pevnému IS sa mení podľa FP a koná Thomasovu precesiu

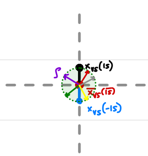
→ spin precéduje rovnicou v GTR skriptách (18.2), resp. 1. študentský talk: (v kľudovom $\overline{IS}$): $\frac{d\vec{S}}{d\tau} = -\vec{\Omega}_T \times \vec{S}$, kde $\vec{\Omega}_T \equiv \frac{\gamma - 1}{v^2}(\vec{v} \times \vec{a})$ ...

$\hookrightarrow$ uhlová rýchlosť Thomas. precesie



(+ ešte FP pre $S^\mu \perp U^\mu$ zachováva veľkosť S^μ? :
$\frac{d}{d\tau}(\eta_{\mu\nu}S^\mu S^\nu) = \eta_{\mu\nu}\frac{dS^\mu}{d\tau}S^\nu + \eta_{\mu\nu}S^\mu \frac{dS^\nu}{d\tau} = \cancel{\eta_{\mu\nu}}\left(S_\kappa \frac{du^\kappa}{d\tau}\right)u^\mu S^\nu + \cancel{\eta_{\mu\nu}}S^\mu\left(S_\kappa \frac{du^\kappa}{d\tau}\right)u^\nu$
$= \left(S_\kappa \frac{du^\kappa}{d\tau}\right)\underbrace{u^\mu S_\mu}_{0} + \left(S_\kappa \frac{du^\kappa}{d\tau}\right)\underbrace{u^\nu S_\nu}_{0} = 0$)





pre ∀ IS → disk s polomerom

$\rho = \frac{|S|}{M}$ (Møllerov polomer)