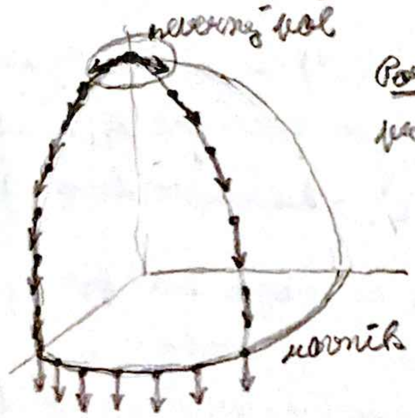
4. PARALELNÝ PRENOS (WAK) (Kuchař K. - Základy OTR - II.4.)

Prenos a reprodukcia smeru

- ak chceme rozhodnúť, že či sú 2 úsečky v rôznych miestach priestoru rovnako dlhé, potrebujeme v každom bode dĺžkový štandard
- ak sa pýtame či majú 2 orientované úsečky v rôznych miestach priestoru rovnaký smer, tak by sme mali mať v každom bode smerový štandard
- predstavíme si, že sme moreplavci na Zemi (S^2) - mohli by sme v danom bode nastaviť magnetický kompas - tým môžeme vytýčiť a reprodukovať smer (taký kompas vieme vyrobiť v každom bode)
- jednoduchšie bude kompas prenášať - strelka reaguje na fyz. podm. (mag. pole) v tom bode priestoru, na ktorom sa ocitne
- v každom mieste zemského povrchu je fyz. podm. určená ortonormálna dyáda (dvojica) vektorov smerujúca na sever a západ a smer ľub. iného vektoru T_K je daný jeho priemetmi $T_K h^K_{(A)}$ do vektorov dyády
  - K → súradnica
  - (A) → ktorý vektor
- priestor, ktorý má v každom bode n-ádu vektorov def. smer nazveme priestorom s paralelizmom na diaľku (máme priestor s metrikou signatúry $(++\dots+)$)
- takéto smerové pole n-ád na obecnom riemannovskom priestore nemáme → vlastné mag. pole Zeme nemá čo robiť s geometriou jej povrchu, preto chceme nájsť iné porovnanie smerov, ktoré by bolo založené len na metrickej štruktúre riemannovského priestoru a nevnášalo do neho ďalšie prvky (nepotrebujeme nejaký špeciálny bod - severný pól)
- použijeme nový kompas - setrvačníkový kompas - po roztočení si os drží rovnaký smer v E^3
- v E^3 je prenos smeru takýmto setrvačníkom integrabilný (nezávislý na ceste) → v každom bode vieme nastaviť triádu (3 na-

konečnej v smere osi), a teda aj paralelizmus na diaľku
- počiatočná informácia o orientácii kružidla je prenesená preto, že smerové pole nie je priestoru vrodené

- ak by chceli moreplavci takýto kompas použiť, tak by ho po chvíli museli sklopiť v smere paluby a znovu nastaviť, inak by im vychádzala stále z paluby
- avšak pri dlhej plavbe zistia, že prenos nie je integrabilný:



Pozn: pri plavbe po valci alebo kuželi by bol prenos integrabilný (pozor! pri kuželi nesmie-me obkrútiť vrchol)

- máme dve možnosti:

1) buď navedieme do Riemannovskej geometrie ďalší prvok - smerové pole n-ád

2) alebo definujeme paralelný prenos pomocou príkladu s moreplavcami a zmierime sa s tým, že prenos smeru nie je integrabilný - nie je def. paralelizmus dvoch vektorov na diaľku, ale iba paralelizmus vektorov pozdĺž krivky (toto sa dozvieme v OTR)

- ďalej sa pozrieme na problém kvantitatívne a použijeme 2 prístupy
  - pracujeme s Riemannovským priestorom vnoreným do viacrozmerného euklidovského priestoru
  - pracujeme čisto len s Riemannovským priestorom

<u>Paralelný prenos vektora po krivej ploche</u>

karteziánske súr. v E^3 ; krivočiare súr. na Riem. priestore

- plavci plávajú po hladine tvaru $y^i = y^i(x^A)$
- vektor T^i mieriaci z bodu plochy $\times$ do okolného priestoru rozložíme na normálovú zložku $T^i_\perp$, ktorá je kolmá na oba tečné vektory Y^i_A súr. čiar, a zložku $T^i_\parallel$, ležiacu v rovine tvorenej vektormi Y^i_A:

i → karteziánske súr. ; A → ktorý vektor

$$T^i = T^i_\perp + T^i_\parallel \qquad (1)$$

$$T^i_\parallel = T^A_\parallel Y^i_A \qquad (2)$$

$$\delta_{(i)(k)} T^i_\perp Y^k_B = 0 \qquad (3)$$

- vyjadríme (1) výrazom $Y^k_B \delta_{(i)(k)}$ a použijeme (3), nájdeme koeficienty $T_\parallel^A$:

$$\delta_{(i)(k)} T^i Y^k_B = T^i_\parallel Y^k_B \delta_{(i)(k)} + \underbrace{T^i_\perp Y^k_B \delta_{(i)(k)}}_{0\ (3)} \overset{(2)}{=} T^A_\parallel \underbrace{Y^i_A Y^k_B \delta_{(i)(k)}}_{\equiv g_{AB}} =$$

$$= T^A_\parallel g_{AB} \Rightarrow T^A_\parallel = g^{AB} \delta_{(i)(k)} T^i Y^k_B \quad (4)$$

$$(g^{-1})^{AB} = g^{AB} \quad \left((\# g)^{ab} = g^{-1\,am} g^{-1\,bn} g_{mn} = (g^{-1})^{ab} \right)$$

- zložky T^i si vieme vyjadriť pomocou zložiek v krivočiarych súr.:

$T^i = T^C Y^i_C$ (5) (už predpokladáme, že T^i leží v smere plochy, a teda aj hladiny)

- s loďou sa posunieme z bodu x do x+dx susedného – v bode x+dx os pozorovateľa stále vnímajú vektor o zložkách T^i – vlastne sa orientujú podľa zložky (4):

$$T^A_\parallel(x+dx) = g^{AB}(x+dx) Y^k_B(x+dx) \delta_{(i)(k)} T^i =$$

$$\overset{(5)}{=} g^{AB}(x+dx) Y^k_B(x+dx) \delta_{(i)(k)} Y^i_C(x) T^C \quad (6)$$

(rozdiel medzi priemetom a sklopením je rádu $O(dx^2)$)

- to nazveme vektorom T^A paralelne preneseným z x do x+dx
- trochu pocvičíme s Y^i_C: $Y^i_C(x) = Y^i_C(x+dx-dx) \underset{\text{Taylor}}{\approx} Y^i_C(x+dx) -$

$$- Y^i_{CD}(x+dx)\, dx^D \underset{\text{Taylor}}{\approx} Y^i_C(x+dx) - Y^i_{CD}(x)\, dx^D, \quad Y^i_{CD} \equiv \frac{\partial^2 y^i}{\partial x_C \partial x_D}$$

- dosadíme do (6) a použijeme def. metriky:

$$T_\parallel^A(x+dx) = g^{AB}(x+dx) \underbrace{Y^k_B(x+dx) \delta_{(i)(k)} Y^i_C(x+dx)}_{g_{BC}(x+dx)} T^C - g^{AB}(x)\, Y^k_B(x)\, \delta_{(i)(k)}$$

$$Y^i_{CD}(x) T^C dx^D = T^A - g^{AB}(x)\, Y^k_B Y^i_{CD} \delta_{(i)(k)} T^C dx^D \quad (7)$$

pozor! znova berieme len členy lin. v dx

- chceme vyjadriť člen $Y^k_B Y^i_{CD} \delta_{(i)(k)}$, pôjdeme na to oklukou – cez definičnú rovnicu pre metriku $g_{CD} = Y^k_C Y^i_D \delta_{(k)(i)}$ → zderivujeme podľa x_B a permutujeme cyklicky indexy CDB, 1. rov. odčítame od ďalších dvoch:

$$-g_{CD,B} = -\delta_{(k)(i)} \{ (Y^k_{CB} Y^i_D) + [Y^k_C Y^i_{DB}] \}$$

$$g_{DB,C} = \delta_{(k)(i)} \{ Y^k_{DC} Y^i_B + (Y^k_D Y^i_{BC}) \}$$

$$g_{BC,D} = \delta_{(k)(i)} \{ [Y^k_{BD} Y^i_C] + Y^k_B Y^i_{CD} \}$$

- členy označené rovnakými zátvorkami sa vyrušia a ostatné ostanú:

$$Y^k_B Y^i_{CD}\,\delta_{(k)(i)} = \frac{1}{2}(-g_{CD,B} + g_{DB,C} + g_{BC,D}) \equiv \Gamma_{BCD} \qquad (8)$$

- dosadíme do (7):

$$\boxed{\begin{aligned} T^A_\parallel &= T^A - \Gamma^A{}_{CD}\,T^C dx^D \\ \Gamma^A{}_{CD} &\equiv g^{AB}\Gamma_{BCD} = \frac{1}{2} g^{AB}(-g_{CD,B} + g_{DB,C} + g_{BC,D}) \end{aligned}} \qquad (9)$$

- vidíme, že paralelný prenos je naozaj určený vnútornou metrikou plochy cez koeficienty $\Gamma^A{}_{CD}$
- zložky vektora T^A sa pri paralelnom prenose z x do $x+dx$ menia o $\boxed{d_\parallel T^A \equiv T^A_\parallel - T^A = -\Gamma^A{}_{BC}\,T^B dx^C}$ (10)

Paralelný prenos v Riemannovskom priestore. Lokálne geodetický systém súradníc.

- teraz budeme pracovať len v Riemannovskom priestore (bez predpokladu vnorenia)
- vyjdeme z toho, že vektoru T v bode x má byť paralelným prenosom do susedného $x+dx$ jednoznačne priradený vektor $T_\parallel$
- ak sa obmedzíme na lin. členy v dx, tak musí platiť

iota :

$$T^\iota_\parallel \equiv T^\iota + d_\parallel T^\iota = T^\iota - \underbrace{\Gamma^\iota{}_\lambda(T,x)}_{\substack{\text{zatiaľ neurčené funkcie} \\ \text{závislé od } T \text{ a } x}}\,dx^\lambda \qquad (11)$$

- rovnica (11) určuje paralelný prenos vektora pozdĺž krivky $x = x(u)$ →
→ ak udáme v jednom bode krivky $x_{(1)} = x(u_{(1)})$ vektor T, je riešením diferenciálnej rovnice $\frac{dT^\iota_\parallel}{du}(u) + \Gamma^\iota{}_\lambda(T^\mu_\parallel(u), x^\mu(u))\frac{dx^\lambda}{du} = 0$ (12) s krajovou podm. $T^\iota_\parallel(u_{(1)}) = T^\iota$ definovaný v každom bode krivky vektor $T_\parallel(u)$ s ním rovnobežný

- chceme, aby smer (množina kolineárnych vektorov) prechádzal paralelným prenosom znova na smer a aby sa pomer veľkostí dvoch vektorov smeru zachoval – to kladie na rov. (12) podm.:

1) ak rieši $T_\parallel(u)$ rov. (12) s poč. podm. $T_\parallel(u_{(1)}) = T$, rieši $\bar{T}_\parallel(u) = \mu\, T(u)$ rov.

(12) s poč. podm. $\bar{T}_{\parallel}(u_{(1)}) = \mu T$: $\quad 0 = \frac{d\bar{T}^{\iota}_{\parallel}(u)}{du} + \Gamma^{\iota}{}_{\lambda}(\bar{T}^{\mu}_{\parallel}(u), x^{\mu}(u))\frac{dx^{\lambda}}{du} =$

$= \mu\frac{dT^{\iota}_{\parallel}(u)}{du} + \Gamma^{\iota}{}_{\lambda}(\mu T^{\mu}_{\parallel}(u), x^{\mu}(u))\frac{dx^{\lambda}}{du} = \left[-\mu\Gamma^{\iota}{}_{\lambda}(T^{\mu}_{\parallel}(u), x^{\mu}(u)) + \Gamma^{\iota}{}_{\lambda}(\mu T^{\mu}_{\parallel}(u), x^{\mu}(u))\right]\frac{dx^{\lambda}}{du}$ (13)

- krivku prenosu môžeme viesť ľub. smerom $\frac{dx^{\lambda}}{du}$ => výraz $[\dots]=0$, takže $\Gamma^{\iota}{}_{\lambda}$ musia byť homogénne funkcie prvého rádu v premenných $T^{\mu}_{\parallel}$: $\quad \Gamma^{\iota}{}_{\lambda}(T^{\mu}_{\parallel}, x^{\mu}) = \Gamma^{\iota}{}_{\mu\lambda}(x^{\mu})\,T^{\mu}_{\parallel}$ (dosadením do (13) to sedí)

- rov. (11) a (12) vieme prepísať do tvaru:

$$\boxed{d_{\parallel}T^{\iota} = -\Gamma^{\iota}{}_{\mu\lambda}(x)\,T^{\mu}dx^{\lambda}} \quad (14)$$

$$\boxed{\frac{dT^{\iota}_{\parallel}}{du}(u) + \Gamma^{\iota}{}_{\mu\lambda}(x(u))\,T^{\mu}_{\parallel}(u)\frac{dx^{\lambda}}{du} = 0\ ;\ T^{\iota}_{\parallel}(u_{(1)}) = T^{\iota}} \quad (15)$$

- takéto funkcie $\Gamma^{\iota}{}_{\mu\lambda}(x)$ určujúce paralelný prenos voláme zložky afinnej konexie → ukážeme si ako sa transformujú pri transformácii $S \to S'$ → konkrétne značenie transformácie rov. (15):

$$0 = \frac{d}{du}(X^{\iota}_{,\sigma}T'^{\sigma}_{\parallel}) + \Gamma^{\iota}{}_{\mu\lambda}X^{\mu}_{,\sigma}T'^{\sigma}_{\parallel}X^{\lambda}_{,\tau}\frac{dx'^{\tau}}{du} = X^{\iota}_{,\sigma}\frac{dT'^{\sigma}_{\parallel}}{du} + X^{\iota}_{,\sigma\tau}T'^{\sigma}_{\parallel}\frac{dx'^{\tau}}{du} +$$

$$+ \Gamma^{\iota}{}_{\mu\lambda}X^{\mu}_{,\sigma}X^{\lambda}_{,\tau}T'^{\sigma}_{\parallel}\frac{dx'^{\tau}}{du} \quad \left(\text{kde } X^{\iota}_{,\sigma} \equiv \frac{dx^{\iota}}{dx'^{\sigma}} \text{ a } X'^{\rho}_{,\iota} \equiv \frac{dx'^{\rho}}{dx^{\iota}}\right) \ /\cdot X'^{\rho}_{,\iota}$$

$$\frac{dT'^{\rho}_{\parallel}}{du} + \left(\Gamma^{\iota}{}_{\mu\lambda}X'^{\rho}_{,\iota}X^{\mu}_{,\sigma}X^{\lambda}_{,\tau} + X'^{\rho}_{,\iota}X^{\iota}_{,\sigma\tau}\right)T'^{\sigma}_{\parallel}\frac{dx'^{\tau}}{du} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma'^{\rho}{}_{\sigma\tau} = \Gamma^{\iota}{}_{\mu\lambda}X'^{\rho}_{,\iota}X^{\mu}_{,\sigma}X^{\lambda}_{,\tau} + X'^{\rho}_{,\iota}X^{\iota}_{,\sigma\tau}} \quad (16)$$

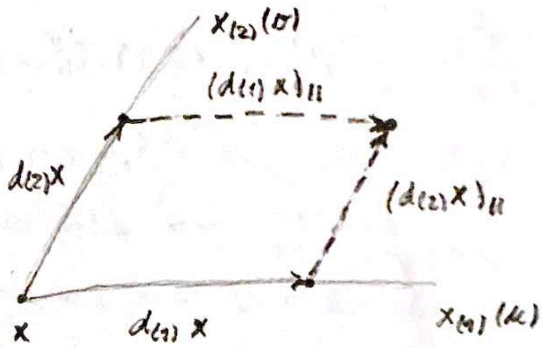
- vidíme, že afinná konexia sa správa ako tenzor len pri lineárnych transformáciách, keď $X^{\iota}_{,\sigma\tau} = 0$

- ak na diferencovateľnej variete M, ktorá ešte nemusí mať metrickú štruktúru, zadáme súbor funkcií $\Gamma^{\iota}{}_{\mu\lambda}$ podrobených pri zmene súradníc transformácii (16), môžeme definovať rovnicou (15) paralelný prenos → varieta M sa týmto stane afinne spojenou

- aby sme prešli k prenášaniu paralelnému v riemannovskom priestora, musíme omedziť voľbu afinnej konexie ďalšími dvoma po-žiadavkami:

2) Paralelným prenosom ide tvoriť infinitezimálne rovnobežníky, presnejšie: ak vedieme bodom x dve krivky, $x_{(1)} = x_{(1)}(u)$ a $x_{(2)} = x_{(2)}(v)$, vynesieme na každej z nich vektor posunutia, $d_{(1)}x^\iota = \frac{dx^\iota_{(1)}}{du}(u)\cdot du$, $d_{(2)}x^\iota = \frac{dx^\iota_{(2)}}{dv}(v)\cdot dv$, prenesieme vektor $d_{(2)}x$ pozdĺž prvej krivky paralelne do bodu $x + d_{(1)}x$ a vektor $d_{(1)}x$ paralelne pozdĺž druhej krivky do bodu $x + d_{(2)}x$, musia sa konce paralelne prenesených vektorov až na veličiny vyššieho rádu stretnúť v rovnakom bode:

$$d_{(1)}x^\iota + (d_{(2)}x^\iota)_\parallel = d_{(1)}x^\iota + d_{(2)}x^\iota - \Gamma^\iota{}_{\kappa\lambda}(x)\, d_{(2)}x^\kappa\, d_{(1)}x^\lambda =$$
$$= d_{(2)}x^\iota + (d_{(1)}x^\iota)_\parallel = d_{(2)}x^\iota + d_{(1)}x^\iota - \Gamma^\iota{}_{\kappa\lambda}(x)\, d_{(1)}x^\kappa\, d_{(2)}x^\lambda$$



$$\Rightarrow \Gamma^\iota{}_{\kappa\lambda}\frac{dx^\kappa_{(1)}}{du}\frac{dx^\lambda_{(2)}}{dv} = \Gamma^\iota{}_{\kappa\lambda}\frac{dx^\kappa_{(2)}}{dv}\frac{dx^\lambda_{(1)}}{du}$$

- a keďže krivky môžeme viesť z x ľub. smermi $\frac{dx^\iota_{(1)}}{du}$, $\frac{dx^\iota_{(2)}}{dv}$, musí platiť, že konexia je symetrická:

$$\Gamma^\iota{}_{\kappa\lambda} = \Gamma^\iota{}_{\lambda\kappa} \quad (\text{teda } \Gamma^\iota{}_{\kappa\lambda} = \Gamma^\iota{}_{(\kappa\lambda)}) \qquad (17)$$

- priestory s asymetrickou konexiou voláme priestory s torziou (čiže tie čo nesplňujú podm. 2))
- ak je afinná konexia symetrická, môžeme nájsť systém súr. S', v ktorom jej zložky v danom bode vymiznú
- stačí si šikovne zvoliť transformáciu medzi S a S':

$$x^\iota = x'^\iota - x'^\iota_{(1)} - \frac{1}{2}\Gamma^\iota{}_{\kappa\lambda}(x_{(1)})(x'^\kappa - x'^\kappa_{(1)})(x'^\lambda - x'^\lambda_{(1)}) \qquad (18)$$

$$\Rightarrow X^\iota_{\prime\sigma}(x_{(1)}) = \delta^\iota_\sigma,\ X'^\sigma_\iota(x_1) = \delta^\sigma_\iota,\ X^\iota_{\prime\sigma\tau}(x_{(1)}) = -\frac{1}{2}[\Gamma^\iota{}_{\sigma\tau}(x_{(1)}) +$$
$$+ \Gamma^\iota{}_{\tau\sigma}(x_{(1)})] = -\Gamma^\iota{}_{\sigma\tau}(x_{(1)}) \longrightarrow \text{dosadením do (16) máme } \boxed{\Gamma'^\iota{}_{\sigma\tau}(x_1) = 0} \qquad (19)$$

- takýto systém voláme lokálne geodetickým systémom bodu $x_{(1)}$, ak prenášame T z $x_{(1)}$ do $x_{(1)} + dx$ nezmenia sa v S' (s presnosťou do prvého rádu) jeho zložky $T'^\iota_\parallel = T'^\iota$
- S' má vo bezprostrednom okolí bodu $x_{(1)}$ rovnaké vlastnosti ako kartézsky systém pri paralelnom prenose vektorov v plochom

prenesie na ľub. vzdialenosť

3) ∃ systém S', v ktorom sa pri paralelnom prenose zo zvoleného bodu $x_{(1)}$ do susedného bodu $x_{(1)} + dx$ nemenia (s presnosťou do veličín prvého rádu v dx) zložky vektorov T'^{ι}: $T'^{\iota}_{\parallel} = T'^{\iota}$ (20)

- týmto tvrdením môžeme nahradiť tvar rovnice paralelného prenosu (11) a podmienky 1) a 2), ktorými sme to doteraz obmedzili

- totiž stačí od S' prejsť k ľubovoľnému S:

$$T^{\iota}_{\parallel} = X^{\iota}_{,\sigma}(x_{(1)}+dx)\,T'^{\sigma} = X^{\iota}_{,\sigma}(x_{(1)})\,T'^{\sigma} + X^{\iota}_{,\sigma\tau}(x_{(1)})\,T'^{\sigma}dx'^{\tau} =$$

$$= T^{\iota} + \underbrace{X^{\iota}_{,\sigma\tau}(x_{(1)})\,X'^{\sigma}_{,\varkappa}(x_{(1)})\,X'^{\tau}_{,\lambda}}_{\equiv\, \Gamma^{\iota}_{\varkappa\lambda}(x_{(1)})}\,T^{\varkappa}dx^{\lambda}$$

=> a tak dostaneme (14) a (17), ktoré splňujú (11) a podm. 1) a 2)

- posledná podmienka zodpovedá prepojeniu medzi afinnou konexiou a metrikou:

4) Norma vektoru sa pri paralelnom prenose nemení:

$$0 = \frac{d(g_{\iota\varkappa}T^{\iota}_{\parallel}T^{\varkappa}_{\parallel})}{du} = \frac{dg_{\iota\varkappa}}{du}T^{\iota}_{\parallel}T^{\varkappa}_{\parallel} + 2g_{\iota\varkappa}T^{\iota}_{\parallel}\frac{dT^{\varkappa}_{\parallel}}{du} = (g_{\iota\varkappa,\lambda} - 2g_{\iota\mu}\Gamma^{\mu}_{\varkappa\lambda})T^{(\iota}_{\parallel}T^{\varkappa)}_{\parallel}\frac{dx^{\lambda}}{du}$$

už to je sym. v $\iota\varkappa$, ďalšou symetrizáciou nič nezmeníme, a teda zátvorka musí byť sym. v $\iota\varkappa$

- v pevnom bode x môžeme voliť však hodnotu T^{ι} a smer krivky prenosu $\frac{dx^{\iota}}{du}$ ľubovoľne => symetrizovaný výraz v ( ) = 0 (v indexoch $\iota\varkappa$):

$$g_{\iota\varkappa,\lambda} - \Gamma_{\iota\varkappa\lambda} - \Gamma_{\varkappa\iota\lambda} = 0, \quad \text{kde } \Gamma_{\iota\varkappa\lambda} \equiv g_{\iota\mu}\Gamma^{\mu}_{\varkappa\lambda}$$

$$\boxed{g_{\iota\varkappa,\lambda} = 2\Gamma_{(\iota\varkappa)\lambda}} \qquad (21)$$

- vyjadríme si $\Gamma_{\iota\varkappa\lambda}$ permutovaním vzťahu (21):

$$\left.\begin{aligned} g_{\iota\varkappa,\lambda} - \Gamma_{\iota\varkappa\lambda} - (\Gamma_{\varkappa\iota\lambda}) &= 0 \\ -g_{\varkappa\lambda,\iota} - (\Gamma_{\varkappa\lambda\iota}) + [\Gamma_{\lambda\varkappa\iota}] &= 0 \\ g_{\lambda\iota,\varkappa} - [\Gamma_{\lambda\iota\varkappa}] - \Gamma_{\iota\lambda\varkappa} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\Gamma_{\iota\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{2}(-g_{\varkappa\lambda,\iota} + g_{\lambda\iota,\varkappa} + g_{\iota\varkappa,\lambda})} \qquad (22)$$

↳ rovnaký výsledok ako (8)

- paralelný prenos v riemannovskom priestore je teda jednoznačne určený jeho metrikou
- zložky afinnej konexie $\Gamma_{\iota\kappa\lambda}$ a $\Gamma^{\iota}{}_{\kappa\lambda}$ uvedené požiadavkami 2) a 4) na tvar (22) voláme Christoffelove symboly prvého a druhého druhu (často sa značia $[\iota,\kappa\lambda]$ a $\left\{ {\iota \atop \kappa\lambda} \right\}$)

- rovnica pre paralelný prenos kovektora:

$$0 = g_{\mu\iota}\frac{dT^{\iota}_{\parallel}}{du} + \Gamma_{\mu\kappa\lambda}T^{\kappa}_{\parallel}\frac{dx^{\lambda}}{du} = \frac{d(g_{\mu\iota}T^{\iota}_{\parallel})}{du} - g_{\mu\iota,\lambda}\frac{dx^{\lambda}}{du}T^{\iota}_{\parallel} + \Gamma_{\mu\kappa\lambda}T^{\kappa}_{\parallel}\frac{dx^{\lambda}}{du} =$$

$$= \frac{dT_{\parallel\mu}}{du} + (\Gamma_{\mu\kappa\lambda} - g_{\mu\kappa,\lambda})T^{\kappa}_{\parallel}\frac{dx^{\lambda}}{du} = \frac{dT_{\parallel\mu}}{du} - \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}T_{\parallel\kappa}\frac{dx^{\lambda}}{du}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dT_{\parallel\kappa}}{du} - \Gamma^{\iota}{}_{\kappa\lambda}T_{\parallel\iota}\frac{dx^{\lambda}}{du} = 0} \qquad (23)$$

$$\boxed{d_{\parallel}T_{\kappa} = \Gamma^{\iota}{}_{\kappa\lambda}T_{\iota}\,dx^{\lambda}} \qquad (24)$$

- v bode 4) sme videli, že sa pri paralelnom prenose zachováva norma vektora, taktiež sa zachováva skalárny súčin dvoch vektorov a s ním aj uhol medzi nimi $\Rightarrow$ ortonormálna n-áda $\to$ $\to$ ortonormálnu n-ádu
- to použijeme na prenos obecného tenzora, rozložíme ho do vektorov n-ády v poč. bode: $T_{\iota\dots}{}^{\kappa\dots}(x_{(0)}) = T_{(\alpha)\dots}{}^{(\beta)\dots}\, h^{(\alpha)}_{\iota}\dots h^{\kappa}_{(\beta)}\dots$
- požadujeme, aby sa pri paralelnom prenose $T_{\iota\dots}{}^{\kappa\dots}$ zložky $T_{(\alpha)\dots}{}^{(\beta)\dots}$ do paralelne prenášaných vektorov n-ády nemenili:

$$\frac{dT_{\parallel\iota\dots}{}^{\kappa\dots}}{du} = \frac{d}{du}\left(T_{\parallel(\alpha)\dots}{}^{(\beta)\dots}\, h^{(\alpha)}_{\iota}\dots h^{\kappa}_{(\beta)}\dots\right) = T_{\parallel(\alpha)\dots}{}^{(\beta)\dots}\frac{d}{du}\left(h^{(\alpha)}_{\iota}\dots h^{\kappa}_{(\beta)}\dots\right) =$$

$$= T_{\parallel(\alpha)\dots}{}^{(\beta)\dots}\frac{dh^{(\alpha)}_{\iota}}{du}\dots h^{\kappa}_{(\beta)}\dots + (\text{člen po člene}) = T_{\parallel(\alpha)\dots}{}^{(\beta)\dots}\left(\Gamma^{\rho}{}_{\iota\sigma}h^{(\alpha)}_{\rho}\frac{dx^{\sigma}}{du}\right)\dots$$

$$h^{\kappa}_{(\beta)}\dots + \dots + T_{\parallel(\alpha)\dots}{}^{(\beta)\dots}\, h^{(\alpha)}_{\iota}\dots\left(-\Gamma^{\kappa}{}_{\rho\sigma}h^{\rho}_{(\beta)}\frac{dx^{\sigma}}{du}\right)\dots + \dots =$$

$$= T_{\parallel\rho\dots}{}^{\kappa\dots}\,\Gamma^{\rho}{}_{\iota\sigma}\frac{dx^{\sigma}}{du} + \dots - T_{\parallel\iota\dots}{}^{\rho\dots}\,\Gamma^{\kappa}{}_{\rho\sigma}\frac{dx^{\sigma}}{du} - \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dT_{\parallel\iota\dots}{}^{\kappa\dots}}{du} - T_{\parallel\rho\dots}{}^{\kappa\dots}\,\Gamma^{\rho}{}_{\iota\sigma}\frac{dx^{\sigma}}{du} - \dots + T_{\parallel\iota\dots}{}^{\rho\dots}\,\Gamma^{\kappa}{}_{\rho\sigma}\frac{dx^{\sigma}}{du} = 0} \qquad (25)$$

$$\boxed{d_{\parallel}T_{\iota\dots}{}^{\kappa\dots} = T_{\rho\dots}{}^{\kappa\dots}\,\Gamma^{\rho}{}_{\iota\sigma}dx^{\sigma} + \dots - T_{\iota\dots}{}^{\rho\dots}\,\Gamma^{\kappa}{}_{\rho\sigma}dx^{\sigma} - \dots} \qquad (26)$$

- všimnime si, že nezáleží na voľbe poč. n-ády $h^{\iota}_{(\alpha)}(x_{(0)})$

Pozn.: v S', kde platí vzťah (14) je $g'_{\iota\kappa,\lambda} = 0$. Ak urobíme transform. na diag. tvar, tak túto vlastnosť neporušíme a máme do čoho sme chceli LIS/LIFE.