① Skládání obecných Lorentzových transformací a Thomasova precese

- speciální LT : $S'$ pohybuje ve směru jedné ze souřadnicových os $S$ např. $\vec{v} = (v, 0, 0)$
  - v $t=0$ souřadnicové osy splývají
  - sp. LT v určitém směru tvoří grupu
- nekomutativita obecných LT povede ke stáčení souřadnicových os

## Obecná LT

- podobná transformace $S \to S^+$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

  ↳ • $O = O^+$ pro $t = t^+ = 0$

  počátek

  - nezahrnuje otočení souřadnicových os

    ✗ neznamená, že splývají (kontrakce délek)

    $\Rightarrow \vec{x}_{0^+}(t) = \vec{v}\, t \Rightarrow \vec{x}^+_0(t^+) = -\vec{v}\, t^+$
- nelze získat složením spec. LT
  - nesplňuje naše požadavky (zahrnuje rotaci) ⇒ uvidíme za chvilku

- transformaci, která splňuje naše podmínky:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{x}^{+} &= \vec{x}^{+} + \left(\frac{\gamma-1}{v^2}\,\vec{v}\cdot\vec{x}^{+} \mp \gamma t^{+}\right)\vec{v} \\ t^{+} &= \gamma\left(t^{+} \mp \frac{\vec{v}\cdot\vec{x}^{+}}{c^2}\right) \end{aligned}}$$

inverse *

- přechází na SLT pro $\vec{v} = (v, 0, 0)$

$$x_1^{+} = \gamma(x_1 - vt) \qquad v_1 = v \,;\quad \vec{v}\cdot\vec{x} = v\cdot x_1$$

$$x_2^{+} = x_2 \qquad + (\ )\cdot 0$$

$$x_3^{+} = x_3 \qquad + (\ )\cdot 0$$

$$t^{+} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_1\right) \qquad \vec{v}\cdot\vec{x} = v x_1$$

- správný pohyb počátku:
  - dosadíme $\vec{x} = 0$ (poloha $O$ v $S$) $\rightarrow$ $\vec{x}_0^{+} = -\gamma\vec{v}t \qquad t^{+} = \gamma t$

    $$\vec{x}_0^{+} = -\vec{v}\,t^{+}$$

  - dosadíme do inverzní $\vec{x}^{+} = 0$ (poloha $O^{+}$ v $S^{+}$) $\rightarrow$ $\vec{x}_{0^+} = \gamma\vec{v}t^{+} \qquad t = \gamma t^{+}$

    $$\vec{x}_{0^+} = \vec{v}\,t$$

- zachovává časoprostorový interval

$$\eta_{\mu\nu}\,\Delta x^{+\mu}\Delta x^{+\nu} = \eta_{\mu\nu}\,\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu}$$

- splňuje další vlastnosti LT
  - dilatace času $\Delta t = \gamma\,\Delta t^{+}$ $\leftarrow$ hodiny pevné v $S^{+}$
  - kontrakce délek $l_{\parallel}^{+} = \gamma\, l_{\parallel}$ $\leftarrow$ klidné v $S^{+}$

    $l_{\perp}^{+} = l_{\perp}$

- obecné LT netvoří grupu
  ↳ složením $S \to S^+$ a $S^+ \to S^{++}$ obecné nevznikne transformace téhož tvaru

- grupu vždy tvoří LT ve stejném směru $\vec{v}$

# Složení SLT v kolmých směrech

- $S \to S'$ $\quad \vec{v}_{0'} = (u, 0, 0)$
→ $S' \to S''$ $\quad \vec{v}'_{0''} = (0, v, 0)$ $\quad \Rightarrow \vec{W} = \vec{v}_{0''} = \left(u, \frac{1}{\gamma_u} v, 0\right) = (w_1, w_2, 0)$
  - poté porovnáme s $S^+$ a zjistíme, proč nelze používat jako obecné LT

$$x_1'' = \gamma_u (x_1 - ut)$$
$$x_2'' = \gamma_v \left(x_2 - v\gamma_u \left(t - \frac{u}{c^2} x_1\right)\right)$$
$$x_3'' = x_3$$
$$t'' = \gamma_v \left(\gamma_u \left(t - \frac{u}{c^2} x_1\right) - \frac{v}{c^2} x_2\right)$$

← také zachovává prostoročasový interval, tedy $S$ inerciální systém $\Rightarrow S''$ inerciální systém

- porovnáním první řádky je jasné, že nejde o stejnou transformaci

$(x_1'' \neq f(x_2))$
$x_1^+ = f(x_2)$

- abychom zjistili, v čem se liší potřebujeme určit transformaci $S^+ \to S''$ tj. transformaci, kterou doplníme transformaci $S \to S^+$, abychom získali $S \to S''$
- pro získání $S^+ \to S''$ dosadíme z $\#$ do $\star$
  ↳ získáme vztah $x''(x^+)$

$$x_1'' = x_1^+ \cos\varphi + x_2^+ \sin\varphi$$
$$x_2'' = -x_1^+ \sin\varphi + x_2^+ \cos\varphi$$
$$x_3'' = x_3^+$$
$$t'' = t^+$$

- kde $\cos\varphi = \dfrac{w_1^2 + \gamma_w w_2^2}{\gamma_v w^2}$

$$\sin\varphi = \frac{(1-\gamma_w)\, w_1 w_2}{\gamma_v w^2}$$

- využili jsme i vlastnosti $\gamma_w = \gamma_u \gamma_v \left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}\right)$

⇒ složení dvou LT odpovídá čisté LT ve směru, který leží v rovině dané jednotlivými translacemi, a čistého otočení kolem osy kolmé k této rovině
⇒ obecné LT netvoří grupu

# Thomasova precese

5

laboratorní soustava

- setrvačník pohybuje vůči $S$ v čase $t$ rychlostí $\vec{v} = (v, 0, 0)$ → v klidu vůči soustavě $S'$
- je zrychlený, takže v čase $t + dt$ se vůči $S'$ pohybuje rychlostí $d\vec{v} = (0, dv, 0)$

- zrychlení působí pouze na těžiště (nulový moment síly)

→ přejdeme do $S''$, vůči níž je těžiště setrvačníku v klidu v čase $t + dt$

- zkonstruujeme $S^{+}$

- jaký síně tomu odpovídá?
- předpoklad $dv \ll v < c$ → $\gamma'' = 1$ $\quad \gamma' = \gamma^{+} = \gamma$

$$\text{síně} \doteq \varphi = d\varphi \doteq (1-\gamma)\frac{v\,dv}{v^2}$$

$$d\vec{\varphi} = \frac{(1-\gamma)}{v^2}\vec{v} \times d\vec{v}$$

→ znovu přejdeme do $S'''$, pak znovu a znovu (mezitím můžeme konstruovat $S^{++}$, $S^{+++}$ …)

- když budem sledovat takto konstruované systémy spojitě (tedy v limitě $dt \to 0$) dostaneme

$$\boxed{\vec{\omega}_{Th} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \doteq \frac{1-\gamma}{v^2}\vec{v} \times \vec{a}}$$

← potřeba aby rotace $\vec{v} \nparallel \vec{a}$

- pro $v \ll c$ pak Taylorem

$$\vec{\omega}_{Th} = -\frac{1}{2}\frac{\vec{v}\times\vec{a}}{c^2}$$

vůči němuž je setrvačník v klidu

- v každém okamžiku můžu uvažovat $S^+$ který není pootočený vůči $S$
  - zároveň můžu uvažovat sérii $S''$, která z předchozí vzniká infinitezimální LT

- protože čárkované systémy vznikají z předchozích pomocí LT (tedy čisté translace) zachovává se v těchto systémech směr momentu hybnosti setrvačníku

↳ tyto systémy se vzájemně stáčejí vůči křížkovaným systémům a tedy i vůči $S$

⇒ setrvačník koná precesi vůči laboratornímu systému

- jedná se čistě o kinematický efekt
  - zrychlení však vždy má dynamický původ

⇒ celková precese je pak součtem Thomasovy a dynamické

(7)

- pro elektron v atomu nelze zanedbat
  - $\omega_{Th}$ a $\omega_D$ téhož řádu
  
    (jinak typicky $\omega_p \gg \omega_{Th}$)

Odvození Thomasovy precese pomocí Fermi-Walkerova transportu

---

trochu předbíháme - za 2 týdny

- další transport
  - přenáší vektor podle dané světočáry tak, jak by se podle ní choval setrvačník

- dán transportní rovnicí

$$\frac{ds^\mu}{dt}\gamma = u^\mu a_\nu s^\nu$$ ← Fermiho transport

- $s^\mu = (s^0, \vec{s})$ ← čtyřvektor momentu hybnosti v $S$

- světočára se zrychlením $a$ na ní setrvačník
  
  ↳ v každém okamžiku lze uvažovat $S^+$ vůči níž je setrvačník v klidu a který odpovídá obecné LT $S \to S^+$

$\Rightarrow$ v $S^{+}$ má moment hybnosti pouze prostorové složky $\ell^{\mu +} = (0, \vec{\ell}^{+})$

- pomocí * pak získáme čtyřvektor momentu hybnosti v $S$:

$$\ell^{0} = \gamma\, \vec{v} \cdot \vec{\ell} \qquad \vec{\ell} = \vec{\ell}^{+} + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\vec{v} \cdot \vec{\ell}^{+})\, \vec{v}$$

- rovnice Fermiho transportu

$$\frac{d\ell^{\mu}}{dt} \gamma = u^{\mu} a_{\nu} s^{\nu}$$

$\Rightarrow$ z těchto tří rovnic získáme

$$\frac{d\vec{\ell}^{+}}{dt} = -\vec{\omega}_T \times \vec{\ell}^{+} \qquad \vec{\omega}_T = \frac{\gamma - 1}{v^2} (\vec{v} \times \vec{a})$$

$\Rightarrow$ nesmí $\vec{\omega}_T \parallel \vec{\ell}^{+}$

- protože křížkované soustavy nejsou zrotované vůči $S$, setrvačník koná precesi vůči $S$

↳ osy kontrahovány proto udržet paralelní $S$