Křivost kovariantní der. na vekt. bundlu

Def Operátor křivosti

nechť D je kov. der. na vekt. bundlu $A M$

$\mathbb{F}_{\xi,\varsigma}$ je operátor křivosti ve směrech $\xi, \varsigma \in TM$ =

$$\mathbb{F}_{\xi,\varsigma} = D_\xi D_\varsigma - D_\varsigma D_\xi - D_{[\xi,\varsigma]}$$

pokud máme kov. der. D rozšířenou na tenz. bundle $A^{\circ}_{e} M$

operátor křivosti působí na řezech $\varphi \in t A^{\circ}_{e} M$

Věta

operátor křivosti $\mathbb{F}_{\xi,\varsigma}$ na tenz. bundlech $A^{\circ}_{e} M$ je

- ultralokální v argumentech ξ a ς
- pseudoderivace v argumentu z $A^{\circ}_{e} M$

důkaz:

$$\mathbb{F}_{f\xi,\varsigma}\phi = D_{f\xi} D_\varsigma \phi - D_\varsigma D_{f\xi}\phi - D_{[f\xi,\varsigma]}\phi = f D_\xi D_\varsigma \phi - D_\varsigma(f D_\xi \phi) - D_{f[\xi,\varsigma]-\varsigma[f]\xi}\phi$$

$$= f\left(D_\xi D_\varsigma \phi - D_\varsigma D_\xi \phi - D_{[\xi,\varsigma]}\phi\right) - \varsigma[f] D_\xi \phi + \varsigma[f] D_\xi \phi = f\, \mathbb{F}_{\xi,\varsigma}\phi$$

$$\mathbb{F}_{\xi,\varsigma}(f\phi) = D_\xi D_\varsigma (f\phi) - D_\varsigma D_\xi (f\phi) - D_{[\xi,\varsigma]}(f\phi) =$$

$$= D_\xi(f D_\varsigma \phi) - D_\varsigma(f D_\xi \phi) - f D_{[\xi,\varsigma]}\phi + D_\xi(\varsigma[f]\phi) - D_\varsigma(\xi[f]\phi) - [\xi,\varsigma][f]\phi$$

$$= f\left(D_\xi D_\varsigma \phi - D_\varsigma D_\xi \phi - D_{[\xi,\varsigma]}\phi\right) + (\xi[f] - \xi[f]) D_\varsigma \phi - (\varsigma[f] - \varsigma[f]) D_\xi \phi$$

$$+ \left(\xi[\varsigma[f]] - \varsigma[\xi[f]] - [\xi,\varsigma][f]\right)\phi$$

$$= f\, \mathbb{F}_{\xi,\varsigma}\phi$$

$$\mathbb{F}_{\xi,\varsigma}(\phi\otimes\psi) = D_\xi D_\varsigma(\phi\otimes\psi) - D_\varsigma D_\xi(\phi\otimes\psi) - D_{[\xi,\varsigma]}(\phi\otimes\psi)$$

$$= D_\xi\left(D_\varsigma\phi\otimes\psi + \phi\otimes D_\varsigma\psi\right) - D_\varsigma\left(D_\xi\phi\otimes\psi + \phi\otimes D_\xi\psi\right) - D_{[\xi,\varsigma]}\phi\otimes\psi - \phi\otimes D_{[\xi,\varsigma]}\psi$$

$$= \left(D_\xi D_\varsigma\phi - D_\varsigma D_\xi\phi - D_{[\xi,\varsigma]}\phi\right)\otimes\psi + \phi\otimes\left(D_\xi D_\varsigma\psi - D_\varsigma D_\xi\psi - D_{[\xi,\varsigma]}\psi\right)$$

$$+ D_\varsigma\phi\otimes D_\xi\psi + D_\xi\phi\otimes D_\varsigma\psi - D_\xi\phi\otimes D_\varsigma\psi - D_\varsigma\phi\otimes D_\xi\psi$$

$$= (\mathbb{F}_{\xi,\varsigma}\phi)\otimes\psi + \phi\otimes(\mathbb{F}_{\xi,\varsigma}\psi)$$

ostatní vlastnosti pseudoderivace jsou přímočaré

Díky ultralokalitě $\mathbb{F}_{\xi,\varsigma}$ v argumentech ξ,ς umožňuje definovat operátor křivosti nezávislý na ξ a ς

Def Operátor křivosti

nechť D je kov. der. na vekt. bundlu $\mathbb{A}M$

$\mathbb{F}_{mn}$ je operátor křivosti $\equiv$

$$\xi^m \varsigma^n \mathbb{F}_{mn} = \mathbb{F}_{\xi,\varsigma}$$

$\mathbb{F}_{mn}$ lze chápat jako operátor na tenz. bundlech $\mathbb{A}^{\bullet}_{\bullet}M$

Podle věty výše je $\mathbb{F}_{mn}$ též pseudoderivace a její akce je dána působením na $\mathbb{A}M$

Def tenzor křivosti

akce operátoru křivosti na $\mathbb{A}M$ definuje tenzor křivosti $F_{mn}{}^{K}{}_{L}$

$$F_{\xi,\varsigma}{}^{K}{}_{L}\,\phi^{L} = \xi^m \varsigma^n F_{mn}{}^{K}{}_{L}\,\phi^{L} = \left[D_\xi D_\varsigma - D_\varsigma D_\xi - D_{[\xi,\varsigma]}\right]\phi^{K}$$

Věta

operátor křivosti $\mathbb{F}_{mn}$ lze zapsat

$$\mathbb{F}_{mn} = D_m D_n - D_n D_m + T_{mn}^{k} D_k$$

kde D je rozšířeno na $\mathbb{T}M$ pomocí libovolné der. ∇ s torzí T

důkaz:

$$\mathbb{F}_{\xi,\varsigma}\,\phi^{K\dots}_{L\dots} = D_\xi D_\varsigma \phi^{K\dots}_{L\dots} - D_\varsigma D_\xi \phi^{K\dots}_{L\dots} - D_{[\xi,\varsigma]}\phi^{K\dots}_{L\dots} = \xi^m D_m(\varsigma^n D_n \phi^{K\dots}_{L\dots}) - \varsigma^m D_m(\xi^n D_n \phi^{K\dots}_{L\dots}) - [\xi,\varsigma]^m D_m \phi^{K\dots}_{L\dots}$$

$$= \xi^m \varsigma^n (D_m D_n \phi^{K\dots}_{L\dots} - D_n D_m \phi^{K\dots}_{L\dots}) + (\xi^m \nabla_m \varsigma^n - \varsigma^m \nabla_m \xi^n - [\xi,\varsigma]^n) D_n \phi^{K\dots}_{L\dots}$$

$$= \xi^m \varsigma^n \left[D_m D_n - D_n D_m + T_{mn}^{k} D_k\right]\phi^{K\dots}_{L\dots}$$

Věta Zobecněné Ricciho identity

$$\mathbb{F}_{mn} X^{K\dots}_{L\dots} = \left[D_m D_n - D_n D_m + T_{mn}^{k} D_k\right] X^{K\dots}_{L\dots} =$$

$$= F_{mn}{}^{K}{}_{M} X^{M\dots}_{L\dots} + \dots - F_{mn}{}^{M}{}_{L} X^{K\dots}_{M\dots} - \dots$$

$$F_{mn}{}^{K}{}_{L}\,\phi^{L} = \left[D_m D_n - D_n D_m + T_{mn}^{k} D_k\right]\phi^{K}$$

chápeme-li $D_m X^{K\dots}_{L\dots} = {}^{D}\!d_m X^{K}_{L}$ jako objekt z $\mathbb{A}^1\mathbb{A}^{\bullet}_{\bullet}M$, můžeme psát

$$\mathbb{F}_{mn} X^{K\dots}_{L\dots} = {}^{D}\!d_m\, {}^{D}\!d_n\, X^{K\dots}_{L\dots}$$

důkaz: akce pseudoderivace a aplikace vztahu ${}^{D}\!d$ a D

Věta

D kov. derivace na $(\mathbb{A}\otimes\mathbb{B})M$ dané kov. der

${}^{A}D$ na $\mathbb{A}M$ s tenzorem křivosti ${}^{A}F$

${}^{B}D$ na $\mathbb{B}M$ s tenzorem křivosti ${}^{B}F$

operátor křivosti D je dán

$$\mathbb{F} = {}^{A}\mathbb{F} \oplus {}^{B}\mathbb{F} \qquad \text{tj}$$

$$\mathbb{F}_{mn} X^{k\ldots m\ldots}_{l\ldots n\ldots} = {}^{A}F_{mn}{}^{k}{}_{c} X^{c\ldots m\ldots}_{l\ldots n\ldots} + \ldots - {}^{A}F_{mn}{}^{c}{}_{l} X^{k\ldots m\ldots}_{c\ldots n\ldots} - \ldots \qquad \text{akce } {}^{A}\mathbb{F}_{mn}$$

$$+ {}^{B}F_{mn}{}^{m}{}_{c} X^{k\ldots c\ldots}_{l\ldots n\ldots} + \ldots - {}^{B}F_{mn}{}^{c}{}_{n} X^{k\ldots m\ldots}_{l\ldots c\ldots} - \ldots \qquad \text{akce } {}^{B}\mathbb{F}_{mn}$$

Lemma

v případě, kdy jeden z vekt. bundlů je tečný bundl TM a na něm máme kov. der. ∇ s tenzorem křivosti $R_{mn}{}^{k}{}_{l}$ pak

$$\left[D_m D_n - D_n D_m + T_{mn}^{k} D_k \right] X^{a\ldots k\ldots}_{b\ldots l\ldots} = \mathbb{R}_{mn} X^{a\ldots k\ldots}_{b\ldots l\ldots} + \mathbb{F}_{mn} X^{a\ldots k\ldots}_{b\ldots l\ldots}$$

působí pouze na $\frac{a\ldots}{b\ldots}$ působí pouze na $\frac{k\ldots}{l\ldots}$

vše plyne z přímočaré aplikace vlastností pseudoderivace na součinu vektorových bundlů

Věta

nechť D je kov. der. na $\mathbb{A}M$ a $\phi \in \mathcal{S}ect\, \Lambda^p \mathbb{A}^k_l M$ pak

$$\overset{D}{d}\overset{D}{d}\phi = \mathbb{F}\wedge\phi \qquad \text{tj.}$$

$$\overset{D}{d}_m \overset{D}{d}_n \phi_{a_1\ldots a_p}{}^{k\ldots}_{l\ldots} = \mathbb{F}_{mn} \wedge \phi_{a_1\ldots a_p}{}^{k\ldots}_{l\ldots}$$

působí mezi tečnými indexy mn a $a_1\ldots a_p$

působí jako pseudoderivace na $\frac{k}{l}$

$$= \binom{p}{2} F_{[mn}{}^{k}{}_{A} \phi_{a_1\ldots a_p]}{}^{A\ldots}_{l\ldots} + \ldots - \binom{p}{2} F_{[mn}{}^{A}{}_{l} \phi_{a_1\ldots a_p]}{}^{k\ldots}_{A\ldots} - \ldots$$

$\overset{D}{d}\overset{D}{d}$ není tak nulové, ale je to ultralokální operace daná křivostí

důkaz:

stačí provést pro tenzory součinového tvaru $\phi_{a_1\ldots a_p}{}^{k\ldots}_{l\ldots} = \varphi^{k\ldots}_{l\ldots}\, \omega_{a_1\ldots a_p}$

$$\overset{D}{d}\overset{D}{d}(\varphi\omega) = \overset{D}{d}\big((\overset{D}{d}\varphi)\wedge\omega + \varphi\, d\omega\big) = (\overset{D}{d}\overset{D}{d}\varphi)\wedge\omega \cancel{- D\varphi\wedge d\omega} \cancel{+ D\varphi\wedge d\omega} + \varphi \underbrace{dd\omega}_{0}$$

$$= (\mathbb{F}\varphi)\wedge\omega = \mathbb{F}\wedge(\varphi\omega)$$

Věta

$D, \tilde{D}$ kov. der. na AM s rozdíl. tenzorem $A_m{}^k{}_l$ tj.

$$D\phi^k - \tilde{D}\phi^k = A_m{}^k{}_l\,\phi^l$$

rozdíl tenzorů křivosti F a $\tilde{F}$ je

$$F - \tilde{F} = {}^{\tilde{D}}d A + [A, A] = {}^{D}d A - [A, A]$$ neboli

$$F_{mn} - \tilde{F}_{mn} = {}^{\tilde{D}}d_m A_n + A_m \cdot A_n - A_n \cdot A_m = {}^{D}d_m A_n - A_m \cdot A_n + A_n \cdot A_m$$ neboli

$$F_{mn}{}^k{}_l - \tilde{F}_{mn}{}^k{}_l = {}^{D}d_m A_n{}^k{}_l + A_m{}^k{}_c A_n{}^c{}_l - A_n{}^k{}_c A_m{}^c{}_l = {}^{D}d_m A_n{}^k{}_l - A_m{}^k{}_c A_n{}^c{}_l + A_n{}^k{}_c A_m{}^c{}_l$$

zvolíme-li rozšíření $D, \tilde{D}$ na TM pomocí ∇ bez torze, máme

$$F - \tilde{F} = \tilde{D} \wedge A + [A, A] = D \wedge A - [A, A]$$ tj.

$$F_{mn} - \tilde{F}_{mn} = \tilde{D}_m A_n - \tilde{D}_n A_m + A_m \cdot A_n - A_n \cdot A_m = D_m A_n - D_n A_m - A_m \cdot A_n + A_n \cdot A_m$$

Pozn.:

člen $[A_m, A_n] = A_m \cdot A_n - A_n \cdot A_m$ lze též zapsat $A_m \wedge A_n$

tento člen není nulový díky nekomutativitě "maticového" násobení.

důkaz:

1) $$F_{mn} \cdot \phi = [D_m D_n - D_n D_m + T^k_{mn} D_k]\phi = D_m(\tilde{D}_n\phi + A_n \cdot \phi) - D_n(\tilde{D}_m\phi + A_m \cdot \phi) + T^k_{mn}\tilde{D}_k\phi + T^k_{mn} A_k \cdot \phi$$

$$= \tilde{D}_m\tilde{D}_n\phi - \tilde{D}_n\tilde{D}_m\phi + T^k_{mn}\tilde{D}_k\phi + \tilde{D}_m(A_n\cdot\phi) - \tilde{D}_n(A_m\cdot\phi)$$

$$+ A_m \cdot \tilde{D}_n\phi - A_n \cdot \tilde{D}_m\phi + T^k_{mn} A_k \cdot \phi + A_m \cdot A_n \cdot \phi - A_n \cdot A_m \cdot \phi$$

$$= \tilde{F}_{mn}\cdot\phi + (\tilde{D}_m A_n - \tilde{D}_n A_m + T^k_{mn} A_k)\cdot\phi + (A_m \cdot A_n - A_n \cdot A_m)\cdot\phi$$

$$+ \cancel{A_m \cdot \tilde{D}_n\phi} - \cancel{A_n \cdot \tilde{D}_m\phi} + \cancel{A_n \cdot \tilde{D}_m\phi} - \cancel{A_m \cdot \tilde{D}_n\phi}$$

$$= (\tilde{F}_{mn} + {}^{\tilde{D}}d_m A_n + [A_m, A_n])\cdot\phi$$

druhá varianta lze získat záměnou $D \leftrightarrow \tilde{D}$ $A \leftrightarrow -A$

nebo pomocí vztahu

$$D_m A_n = \tilde{D}_m A_n + [A_m, A_n] \Rightarrow D_m \wedge A_n = D_m A_n - D_n A_m = \tilde{D}_m \wedge A_n + 2[A_m, A_n]$$

2) pro $T = 0$ máme ${}^{D}d A = D \wedge A$

Věta

nechť ∂ je kov. derivace trivializace E_A pak tenzor křivosti derivace ∂ je nulový

důkaz

$$F_{\xi\varsigma} \cdot E_A = \partial_\xi \partial_\varsigma E_A - \partial_\varsigma \partial_\xi E_A - \partial_{[\xi,\varsigma]} E_A = 0$$ díky $\partial E_A = 0$

Věta

nechť D je dána vektorovým potenciálem $A_m{}^k{}_l$ vůči trivializaci E_A, ∂

$$F_{mn} = {}^{\partial}d_m A_n + [A_m, A_n] = \partial_m \wedge A_n + [A_m, A_n]$$

kde ∂ je rozšířena na TM jako kov. derivace bez torze

Vlastnosti tenzoru křivosti

Věta: Bianchiho identity

D kov. der. na AM s tenzorem křivosti $F_{\underline{mn}}{}^{k}{}_{l}$ pak

$$\overset{D}{d} F = 0 \qquad \text{tj.} \qquad \overset{D}{d}_{\underline{a}} F_{\underline{bc}} = 0$$

pokud rozšíříme D na TM bez torze, platí

$$D_{[\underline{a}} F_{\underline{bc}]} = 0$$

důkaz:

$$\overset{D}{d}\,\overset{D}{d}\,\overset{D}{d}\phi = \overset{D}{d}(\overset{D}{d}\overset{D}{d}\phi) = \overset{D}{d}(F\cdot\phi) = (\overset{D}{d}F)\cdot\phi + \underset{\sim\sim\sim}{F\wedge\overset{D}{d}\phi}$$

$$= \overset{D}{d}\,\overset{D}{d}\,(\overset{D}{d}\phi) = F\ \overset{D}{d}\phi = \underset{\sim\sim\sim}{F\wedge\overset{D}{d}\phi}$$

$$\Rightarrow \overset{D}{d}F = 0$$

pro rozšíření s nulovou torzí máme

$$\overset{D}{d}_{\underline{a}} F_{\underline{bc}} = D_{\underline{a}} \wedge F_{\underline{bc}} = 3\, D_{[\underline{a}} F_{\underline{bc}]}$$

Pozn.:

pro kov. der. ∇ na TM tak dostáváme elegantní důkaz Bianchiho identit (∇ bez torze)

$$\nabla_{[a} R_{bc]}{}^{k}{}_{l} = 0 \iff \overset{\nabla}{d} R = 0 \qquad \text{kde chápeme } R \in \Lambda^2 T^1_1 M$$

argument funguje i pro ∇ s torzí

Věta Zákon zachování

M varieta s metrikou g a Levi-Civitovou der. ∇

$\nabla g = 0 \qquad T = 0$

D kov. der. na AM rozšířená na TM pomocí ∇

platí

$$D_m D_n F^{mn\,k}{}_l = 0$$

kde F je tenzor křivosti D

Pozn.:

identitu lze chápat jako "lokální zákon zachování"

$$D_m J^{m\,k}{}_l = 0$$

takže

$$J^{m\,k}{}_l = D_n F^{mn\,k}{}_l$$

důkaz:

$$2 D_m D_n F^{mn} = [D_m D_n - D_n D_m] F^{mn} = \mathbb{R}_{mn} F^{mn} + \mathbb{F}_{mn} F^{mn} =$$

$$= R_{mn}{}^m{}_k F^{kn} + R_{mn}{}^n{}_k F^{mk} + [F_{mn}, F^{mn}] =$$

$$= \underbrace{Ric_{nk} F^{kn}}_{0} - \underbrace{Ric_{mk} F^{mk}}_{0} + \underbrace{F_{mn} \cdot F^{mn} - F^{mn} \cdot F_{mn}}_{0}$$

$$= 0$$

kde jsme užili symetrii Ric_{ab}

Vnější kovariantní derivace na tečném bundlu

Speciální případ $\mathbb{A}^q_e$-značných forem je, pokud za vekt. bundl $\mathbb{A}M$ zvolíme přímo tečný bundl $\mathbb{T}M$. Budeme tak pracovat s $\mathbb{T}^q_e M$-značnými formami, tj. objekty

$$\omega_{a_1 \dots a_p}{}^{m \dots}_{n \dots} \in \Lambda^p \mathbb{T}^q_e M$$

Na formových indexech $a_1 \dots a_p$ máme definované operace vnějšího násobení $\wedge$ a vnější derivace d.
Na indexech z prost. $\mathbb{T}^q_e M$ jak tenzorové násobení a kov. der. ∇.
Dohromady definují kov. vnější derivaci $\overset{\nabla}{d}$

$$\overset{\nabla}{d}_{a_0} \omega_{a_1 \dots a_p}{}^{m \dots}_{n \dots}$$

Věta o vztahu vnější kov. der. a kov. der. jak dává návod jak vnější derivaci na $\Lambda^p M$ převést na kov. der. na $\mathbb{T}^0_{[p]} M$

$$\underbrace{\overset{\nabla}{d}_{a_0} \omega_{a_1 \dots a_p}{}^{m \dots}_{n \dots}}_{\Lambda^p \mathbb{T}^q_e M} = \nabla_{a_0} \wedge \underbrace{\omega_{a_1 \dots a_p}{}^{m \dots}_{n \dots}}_{\mathbb{T}^q_{p+e} M} + T^k_{a_0 a_1} \wedge \omega_{|k| a_2 \dots a_p}{}^{m \dots}_{n \dots}$$

Při používání tohoto formalismu je potřeba dávat pozor, které indexy se chápou jako formové, z $\Lambda^p M$, a které jako tenzorové, z $\mathbb{T}^q_e M$

Vzhledem k tomu, že se však jedná o tenzorové indexy stejného typu, existuje volnost, jak se indexy rozdělí. Toho lze využít s výhodou při některých úpravách.

Věta Torze kov. der ∇ na $\mathbb{T}M$
chápejme jednotkový tenzor δ^m_a jako objekt z $\Lambda^1 \mathbb{T}^1_0 M$ pak

$$\overset{\nabla}{d}_a \delta^m_b = T^m_{ab}$$

důkaz
přímé použití vztahu $\overset{\nabla}{d}$ a ∇ a faktu $\nabla \delta = 0$

$$\overset{\nabla}{d}_a \delta^m_b = \nabla_a \wedge \delta^m_b + T^n_{ab} \delta^m_n = 2 \nabla_{[a} \delta^m_{b]} + T^m_{ab} = T^m_{ab}$$

Pro tečný bundl TM je tenzor křivosti Riemannův tenz. R
Ten lze chápat jako $T^1_1 M$-značnou 2-formu

$$R_{\underline{mn}}{}^{a}{}_{\underline{b}} \in \Lambda^2 T^1_1 M$$

Stejně tak Christoffelovy symboly charakt. rozdíl ∇ a souřadnicové der. $\nabla = \partial + \Gamma^a$ jsou $T^1_1 M$ značné 1-formy

$$\Gamma_{\underline{m}}{}^{a}{}_{\underline{b}} \in \Lambda^1 T^1_1 M$$

V tomto smyslu můžeme použít vzorec pro tenz. kř. na vektorovém bundlu

Věta

mějme kov. der. ∇ a souř. der ∂ na tečném bundlu TM

$$\nabla = \partial + \Gamma$$

Riemannův tenzor je dán

$$R_{\underline{mn}}{}^{a}{}_{\underline{b}} = \partial_{\underline{m}} \Gamma_{\underline{n}}{}^{a}{}_{\underline{b}} + [\Gamma_{\underline{m}}, \Gamma_{\underline{n}}]^{a}{}_{b}$$

Rozepíšeme-li kov. vnější derivaci a komutátor, dostaneme standardní vzorec

$$R_{\underline{mn}}{}^{a}{}_{\underline{b}} = \partial_m \Gamma_{\underline{n}}{}^{a}{}_{\underline{b}} - \partial_n \Gamma_{\underline{m}}{}^{a}{}_{\underline{b}} + \Gamma_{\underline{m}}{}^{a}{}_{k} \Gamma_{\underline{n}}{}^{k}{}_{\underline{b}} - \Gamma_{\underline{n}}{}^{a}{}_{k} \Gamma_{\underline{m}}{}^{k}{}_{\underline{b}}$$

Věta Bianchiho identity pro ∇

na TM lze Bianchiho identity pro ∇ zapsat

$$\overset{\nabla}{d}_{\underline{a}} R_{\underline{bc}}{}^{k}{}_{l} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\nabla_{[a} R_{bc]}{}^{k}{}_{l} = T_{[ab}{}^{n} R_{c]n}{}^{k}{}_{l}$$

pro beztorzní derivaci ∇ tak máme

$$\nabla_{[a} R_{bc]}{}^{k}{}_{l} = 0$$