Fibrované prostory

Def:

$M, \mathbb{P}$ variety

$\mathbb{P}M$ je fiber bundle nad M se stand. fibrem $\mathbb{P}$ $\equiv$

$\mathbb{P}M$ je dif. varieta

$\pi : \mathbb{P}M \to M$ je diferencovatelná projekce

$\mathbb{P}M$ je lokálně triviální, t.j.

$\forall x \; \exists U$ okolí x $\quad \pi^{-1}(U) \underset{\uparrow}{\cong} U \times \mathbb{P}$

difeomorfismus

$\mathbb{P}_x M$ je fiber nad $x \in M$ $\equiv$ $\mathbb{P}_x M = \pi^{-1} x$

pokud má $\mathbb{P}$ dodatečnou strukturu, která je respektována difeomorf $\cong$ v definici mluvíme o fibr. bundle s příslušnou strukturou

typicky: vektorové f.b., grupové f.b., ~~k~~ alg. f.b.

Vektorové fibrované bundly

Def:

M varieta, A vekt. prostor

AM je vektorový bundl nad M se standardním fibrem A $\equiv$

AM je dif. varieta

$\pi : AM \to M$ diferencovatelná projekce

AM lokálně triviální, tj.

$\forall x \in M \quad \exists\, U \subset M$ okolí $x \qquad \pi^{-1}(U) \cong U \times A$

$A_x M$ je fibr nad $x \in M$ $\equiv$ $A_x M = \pi^{-1} x$

Def:

AM vektorový bundl nad M

a je řez AM $\equiv$

$a : M \to AM$ (diferencovatelné)

$\pi a = id$

$\mathrm{Sect}\, AM \equiv$ prostor všech řezů AM

Def:

AM vekt. bundl nad M se stand. fibrem A

$A^k_l M$ tenz. bundl nad M vygenerovaný z AM $\equiv$

$A^k_l M = (\underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{k} \otimes \underbrace{A^* \otimes \ldots \otimes A^*}_{l})\, M$

Lemma:

$A^k_l M$ je vekt. bundl nad M se stand. fibrem A^k_l

Trivializace vektorového bundlu

Def

AM vekt. bundl $\dim A = D$

$U_{(\alpha)}$ soubor okolí pokrývajících varietu M

trivializace je soubor bazí ${}^{(\alpha)}E_A$ definov. na okolích $U_{(\alpha)}$

tj. ${}^{(\alpha)}E_A$ $A=1\ldots D$ jsou lin. nezáv. řezy $A^{(\alpha)}U$

nechť ${}^{(\alpha)}E^A$ je duální báze

tyto báze definují

(i) trivializující zobr.

$${}^{(\alpha)}\Phi_x : A_xM \to \mathbb{R}^D \qquad x \in U_{(\alpha)}$$

$${}^{(\alpha)}\Phi : \psi \to \psi^A = {}^{(\alpha)}E^A\cdot\psi \qquad \text{tj.} \quad \psi = \psi^A\, {}^{(\alpha)}E_A$$

(ii) inverzní trivial. zobr.

$${}^{(\alpha)}\Phi^{-1}_x : \mathbb{R}^D \to A_xM \qquad x \in U_{(\alpha)}$$

$${}^{(\alpha)}\Phi^{-1} : \psi^A \to \psi = \psi^A\, {}^{(\alpha)}E_A$$

Pozn: lze ztotožnit ${}^{(\alpha)}\Phi^A \equiv {}^{(\alpha)}E^A$ a ${}^{(\alpha)}\Phi^{-1}{}_A = {}^{(\alpha)}E_A$

(iii) přechodové zobrazení

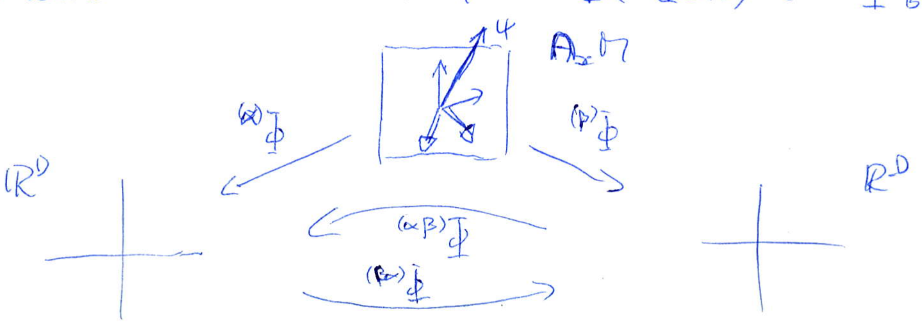
$${}^{(\alpha\beta)}\Phi_x : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^D \qquad x \in U_{(\alpha)} \cap U_{(\beta)}$$

$${}^{(\alpha\beta)}\Phi = {}^{(\alpha)}\Phi \circ {}^{(\beta)}\Phi^{-1} : \psi^A \to {}^{(\alpha\beta)}\Phi^A{}_B\, \psi^B$$

platí

$${}^{(\beta)}E_B = {}^{(\alpha)}E_A\, {}^{(\alpha\beta)}\Phi^A{}_B \qquad {}^{(\alpha)}E^A = {}^{(\alpha\beta)}\Phi^A{}_B\, {}^{(\beta)}E^B$$

vskutku ${}^{(\alpha)}\Phi^A(\psi) = {}^{(\alpha)}E^A\cdot\psi = {}^{\alpha\beta}\Phi({}^{(\beta)}\Phi(\psi)) = {}^{(\alpha\beta)}\Phi^A{}_B\, {}^{(\beta)}E^B\cdot\psi \quad \Uparrow$

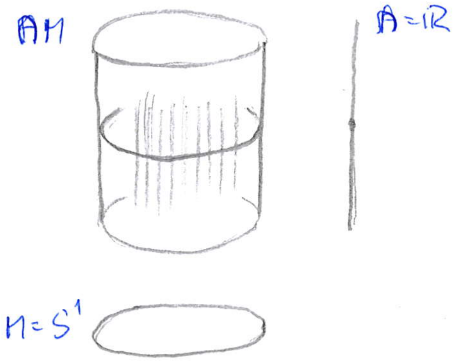


Pomocí souboru přechodových zobr. ${}^{(\alpha\beta)}\Phi$ lze zachytit netriviální strukturu vekt. bundlu (tj. odlišnost od triv. b. $A \times M$)

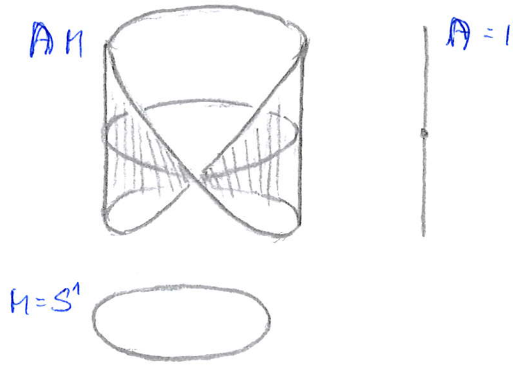
Př: Lineární bundle nad S^1

$M = S^1$ $\qquad A \cong \mathbb{R}$

triviální bundl



twistovaný bundl

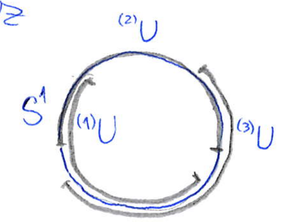


tyto bundly jsou neekvivalentní:

existuje gl. nedeg. řez

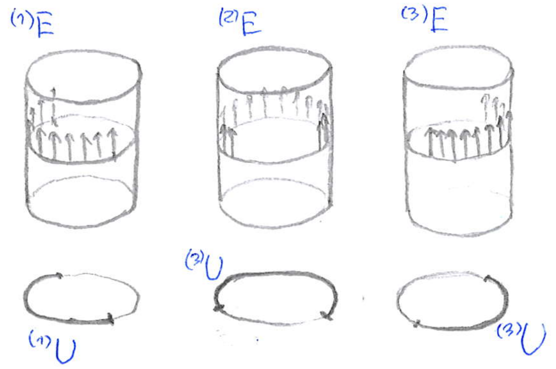
neexistuje gl. nedeg. řez

trivializace:

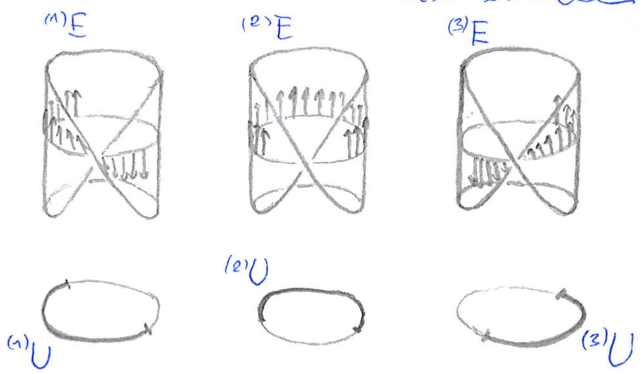


zvolme 3 okolí ${}^{(\alpha)}U$

na každém (jednotkovou) bázi v lineárním bundle



$${}^{(12)}\Phi = [1]$$
$${}^{(23)}\Phi = [1]$$
$${}^{(31)}\Phi = [1]$$



$${}^{(12)}\Phi = [1]$$
$${}^{(23)}\Phi = [1]$$
$${}^{(31)}\Phi = [-1]$$

Kovariantní derivace na vekt. bundlech

Def:

nechť AM je vekt. bundl.

D_ξ je kovariantní derivace na AM ve směru $\xi \in TM$ $\equiv$

$D_\xi : \mathcal{S}ect\, AM \to \mathcal{S}ect\, AM$

$D_\xi \phi|_x$ je dáno znalostí ϕ na lib. okolí x (lokalita)

$$\left.\begin{aligned} D_\xi(\phi+\psi) &= D_\xi\phi + D_\xi\psi \\ D_\xi(f\phi) &= (\xi\cdot df)\,\phi + f D_\xi\phi \\ D_{(f\xi+\varsigma)}\phi &= f D_\xi\phi + D_\varsigma\phi \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} &\phi,\psi \in \mathcal{S}ect\, AM \\ &\xi,\varsigma \in TM \\ &f \in \mathcal{F}M \end{aligned}$$

D je kovariantní diferenciál $\equiv$

$D : \mathcal{S}ect\, AM \to \mathcal{S}ect\,(T^*\otimes A)M$

$\xi\cdot D\phi = D_\xi\phi$

Pozn:

ultralokalita derivace D_ξ v argumentu ξ umožňuje definici kov. diferenciálu

Pozn:

kov. der. lze definovat na každém tensorovém bundlu $A^\bullet_\circ M$
tyto obecně nemusejí souviset, bude ale přirozené používat na všech tens. bundlech "stejnou" kov. derivaci
tu lze specifikovat chováním vůči tens. souč. a kontrakci

Věta:

nechť D je kov. der. na AM
podmínky

$$D(\phi\otimes\psi) = (D\phi)\otimes\psi + \phi\otimes(D\psi)$$

$$D\,\mathcal{C}\phi = \mathcal{C}\,D\phi \qquad \phi,\psi \text{ řezy tenz. bundlů}$$

určují jednoznačně kov. der. na všech tenz. bundlech $A^\bullet_\circ M$

důkaz:

komutace s kontrakcí indukuje kov. der. na A^*M
Leibn. prav. rozšiřuje der. na libovolný $A^\bullet_\circ M$

Kovariantní derivace na více vekt. bundlech

máme-li kov. der. na různých vekt. bundlech, můžeme definovat kov. der. působící na jejich součinu

Def

${}^{\mathbb{E}}D$ kov. der. na $\mathbb{E}M$

${}^{\mathbb{F}}D$ kov. der. na $\mathbb{F}M$

D je jejich rozšíření na $\mathbb{E}\otimes\mathbb{F}M$ $\equiv$

$$D(\phi\otimes\psi) = ({}^{\mathbb{E}}D\phi)\otimes\psi + \phi\otimes({}^{\mathbb{F}}D\psi) \quad \text{pro} \quad \begin{array}{l}\phi\in\mathrm{Sect}\,\mathbb{E}M\\ \psi\in\mathrm{Sect}\,\mathbb{F}M\end{array}$$

takto lze D rozšířit na libovolný tenz. bundl $(\mathbb{E}^{k}_{l}\otimes\mathbb{F}^{n}_{m})M$

Př:

kov. der. ∇ na tečném bundl. je příkladem kov. der. na vektorovém bundl. $\mathbb{T}M$

nicméně kov. der. na tečném bundl má jemnější strukturu než kov. der. na obecném vekt. bundlu – lze pro ní definovat torzi – zde se využívá, že derivovaný objekt má stejné indexy jako směr derivování

Často budeme pracovat s rozšířením kov. der D na $\mathbb{A}M$ na tečný bundl pomocí kov. der. ∇ na $\mathbb{T}M$. To je myšleno přesně ve smyslu definice výše.
Někdy ji budeme označovat výslednou kov. der. stejným symbolem jako derivaci na $\mathbb{A}M$

Lemma

nechť $D, \tilde{D}$ jsou kov. der. def. na tenz. bundlech $A^k_l M$
jejich rozdíl

$$\mathbb{A}\, \mathcal{X} = D\mathcal{X} - \tilde{D}\mathcal{X} \qquad \mathcal{X} \in \mathrm{Sect}\, A^k_l M$$

je pseudoderivace na $A^k_l M$, tj. ultralokální zobr. v $\mathcal{X}$
daná svojí akcí na AM

$$A_m \phi^A = A_m{}^A{}_K \phi^K \qquad \phi \in \mathrm{Sect}\, AM$$

$$A_m \mathcal{X}^{AB\ldots}_{CD\ldots} = A_m{}^A{}_K \mathcal{X}^{KB\ldots}_{CD\ldots} + A_m{}^B{}_K \mathcal{X}^{AK\ldots}_{CD\ldots} + \ldots - A_m{}^L{}_C \mathcal{X}^{AB\ldots}_{LD\ldots} - A_m{}^L{}_D \mathcal{X}^{AB\ldots}_{CL\ldots} - \ldots$$

Def:

$A_m{}^K{}_L$ nazýváme rozdílový tenzor derivací D a $\tilde{D}$

Př:

pro tenzor typu $A^1_1 M$ dostáváme

$$D_m M^A{}_B - \tilde{D}_m M^A{}_B = A_m M^A{}_B = A_m{}^A{}_K M^K{}_B - A_m{}^K{}_B M^A{}_K = [A_m, M]^A{}_B$$

kde $[\,,\,]$ je komutátor "maticového" násobení

Def:

nechť E_A je trivializace (báze) v AM

∂ je souřadnicová derivace trivializace E_A $\equiv$

$$\partial E_A = 0 \qquad \text{resp.} \qquad \partial E^A = 0$$

akce na $\phi \in \mathrm{Sect}\, AM$ pak je

$$\partial\phi = (d\phi^A)\, E_A \qquad \text{tj} \quad (\partial\phi)^A_m = \partial_m \phi^A = \phi^A{}_{,m} \qquad \phi = \phi^A E_A$$

rozdílový tenz. $A_m{}^K{}_L$ kov. der. D vůči der. ∂
nazýváme vektorový potenciál D

$$D_m = \partial_m + A_m \qquad A_m \text{ generovaného tenzorem } A_m{}^K{}_L$$

Lemma Rozdílový tenzor na $(E\otimes F)M$

nechť $D, \tilde{D}$ jsou kov. der. na $(E\otimes F)M$ získané z derivací ${}^E D, {}^E\tilde{D}$ na EM a ${}^F D, {}^F\tilde{D}$ na FM jak

rozdílová pseudoderivace

$$A = D - \tilde{D}$$

má strukturu

$$A = {}^E A \oplus {}^F A$$

kde ${}^E A = {}^E D - {}^E\tilde{D}$ působí pouze na indexy z EM a

${}^F A = {}^F D - {}^F\tilde{D}$ působí pouze na indexy z FM

konkrétně

$$A_m X^{K\ldots\mathcal{M}\ldots}_{L\ldots\mathcal{N}\ldots} = {}^E A_m{}^K{}_C X^{C\ldots\mathcal{M}\ldots}_{L\ldots\mathcal{N}\ldots} + \ldots - {}^E A_m{}^C{}_L X^{K\ldots\mathcal{M}\ldots}_{C\ldots\mathcal{N}\ldots} - \ldots \qquad \text{akce } {}^E A$$

$$+ {}^F A_m{}^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{C}} X^{K\ldots\mathcal{C}\ldots}_{L\ldots\mathcal{N}\ldots} + \ldots - {}^F A_m{}^{\mathcal{C}}{}_{\mathcal{N}} X^{K\ldots\mathcal{M}\ldots}_{L\ldots\mathcal{C}\ldots} - \ldots \qquad \text{akce } {}^F A$$

důkaz:

stačí ověřit akci $D-\tilde{D}$ pro tenzory v součinovém tvaru

$$X^{K\ldots\mathcal{M}\ldots}_{L\ldots\mathcal{N}\ldots} = R^{K\ldots}_{L\ldots} \otimes S^{\mathcal{M}\ldots}_{\mathcal{N}\ldots}$$

$$[D-\tilde{D}]X = ([D-\tilde{D}]R)\otimes S + R\otimes([D-\tilde{D}]S) = ({}^E A R)\otimes S + R\otimes({}^F A S)$$

což je přesný význam výše naznačené akce

$$[{}^E A \oplus {}^F A](R\otimes S)$$

Věta Komponenty kov. derivace

nechť M je varieta se souř. x^a a ∇ kov. der. na $\mathbb{T}M$ daná Christoffel. koeficienty Γ^a_{mn}

nechť AM je vekt. bundle s trivializací E_A, ∂

D je kov. der. s vekt. potenciálem $A_m{}^K{}_L$

komponenty kov. der. obecného tenzoru z $(\mathbb{T}\otimes A)M$ jsou

$$D_a X^{m\ldots M\ldots}_{n\ldots N\ldots} = X^{m\ldots M\ldots}_{n\ldots N\ldots,a} + \Gamma^m_{ak} X^{k\ldots M\ldots}_{n\ldots N\ldots} + \ldots - \Gamma^k_{an} X^{m\ldots M\ldots}_{k\ldots N\ldots} - \ldots$$

$$+ A_m{}^M{}_K X^{m\ldots K\ldots}_{n\ldots N\ldots} + \ldots - A_m{}^K{}_N X^{m\ldots M\ldots}_{n\ldots K\ldots} - \ldots$$

neboli

$$D = \partial + \Gamma \oplus A$$

kde ∂ je dána souř. der. na $\mathbb{T}M$ a trivializací na AM

Pseudoderivace na vektorových bundlech

Def: pseudoderivace

nechť $\mathbb{A}M$ je vekt. bundl a $\mathbb{A}^k_l M$ příslušné tenz. bundly

$\mathbb{M}$ je pseudoderivace na $\mathbb{A}M$ $\equiv$

$$\mathbb{M} : \operatorname{Sect} \mathbb{A}^k_l M \to \operatorname{Sect} \mathbb{A}^k_l M$$

$$\mathbb{M}(\phi + \psi) = \mathbb{M}\phi + \mathbb{M}\psi$$

$$\mathbb{M}(\phi\psi) = (\mathbb{M}\phi)\psi + \phi(\mathbb{M}\psi)$$

$$\mathbb{M}\, C\phi = C\, \mathbb{M}\phi$$

$$\mathbb{M} f = 0$$

ϕ, ψ řezy tenz. bundlů, $f \in \mathcal{F}M$

Věta akce pseudoderivace

pseudoderivace je ultralokální operátor jehož akce je dána akcí na vekt. bundlu $\mathbb{A}M$

$$\Downarrow\ \mathbb{M}\phi^K = M^K{}_L\, \phi^L$$

$$\mathbb{M}\, \mathcal{X}^{KL\dots}_{MN\dots} = M^K{}_A\, \mathcal{X}^{AL\dots}_{MN\dots} + M^L{}_A\, \mathcal{X}^{KA\dots}_{MN\dots} + \dots - M^A{}_M\, \mathcal{X}^{KL\dots}_{AN\dots} - M^A{}_N\, \mathcal{X}^{KL\dots}_{MA\dots} - \dots$$

důkaz

viz pseudoderivace na TM

vlastnosti pseudoderivace umožňují rozšířit akci z $\mathbb{A}M$ na $\mathbb{A}^*M$ a následně na všechny $\mathbb{A}^k_l M$

Pozn:

pseudoderivace lze rozšířit tak, že přidává tečné indexy, které se neúčastní operací výše, např. $\mathbb{A}_m$, $\mathbb{F}_{mn}$, atd.

Def pseudoderivace na tenz. součinu vekt. bundlů

nechť $\mathbb{A}$ je pseudoder. na $\mathbb{E}M$ a $\mathbb{B}$ je pseudoder. na $\mathbb{F}M$

na $(\mathbb{E}\otimes\mathbb{F})M$ lze definovat pseudoderivace

$$\mathbb{M} = \mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$$

$$\mathbb{M}\, \mathcal{X}^{K\dots m\dots}_{L\dots n\dots} = \mathbb{A}\, \mathcal{X}^{K\dots m\dots}_{L\dots n\dots} + \mathbb{B}\, \mathcal{X}^{K\dots m\dots}_{L\dots n\dots}$$

působí pouze na $\frac{K}{L}$ působí pouze na $\frac{m}{n}$

$$= A^K{}_C\, \mathcal{X}^{C\dots m\dots}_{L\dots n\dots} + \dots - A^C{}_L\, \mathcal{X}^{K\dots m\dots}_{C\dots n\dots} - \dots + B^m{}_c\, \mathcal{X}^{K\dots c\dots}_{L\dots n\dots} + \dots - B^c{}_n\, \mathcal{X}^{K\dots m\dots}_{L\dots c\dots} - \dots$$

tato pseudoderivace splňuje všechny vlastnosti pseudoder. na $(\mathbb{E}\otimes\mathbb{F})M$ včetně Leibniz. pravidla pro tenz. v součinovém tvaru

$$\mathbb{M}(\phi^{K\dots}_{L\dots}\, \psi^{m\dots}_{n\dots}) = (\mathbb{A}\phi^{K\dots}_{L\dots})\, \psi^{m\dots}_{n\dots} + \phi^{K\dots}_{L\dots}\, (\mathbb{B}\psi^{m\dots}_{n\dots})$$

Antisymetrické formy s hodnotami ve vekt. bundlu

Def:
$A M$ vekt. bundl nad varietou M

$\Lambda^p A^k_l M$ je vekt. bundl A^k_l-značných antisym. forem na M ≡

$$\Lambda^p A^k_l M = (\Lambda^p \otimes A^k_l)\, M$$

tj. jedná se antisym. formy na M stupně p s hodnotami v $A^k_l M$
mají $\phi_{a_1 \dots a_p}{}^{M\dots}_{N\dots}$

Def
na $\Lambda^p A^k_l M$ máme přirozeně zobecněný vnější součin

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots = \binom{p}{p_1\, p_2 \dots} \mathcal{A}(\phi_1 \otimes \phi_2 \otimes \dots) \qquad \in \Lambda^p A^k_l M$$

↑ antisymetrizace v ΛM

v indexech

$$\phi_{1\, a_1 \dots a_{p_1}}{}^{M_1 \dots}_{N_1 \dots} \wedge \phi_{2\, a_{p_1+1} \dots a_{p_1+p_2}}{}^{M_2 \dots}_{N_2 \dots} \wedge \dots = \binom{p}{p_1\, p_2 \dots} \phi_{1[a_1 \dots a_{p_1}|}{}^{M_1 \dots}_{N_1|\dots} \phi_{2\, a_{p_1+1} \dots a_{p_1+p_2}|}{}^{M_2 \dots}_{N_2| \dots} \dots {}_{a_p]}$$

kde

$$\phi_i \in \Lambda^{p_i} A^{k_i}_{l_i} M \qquad p = \sum_i p_i \quad k = \sum_i k_i \quad l = \sum_i l_i$$

Př:

$$\phi_a{}^{M\dots}_{K\dots} \wedge \psi_b{}^{N\dots}_{L\dots} = \phi_a{}^{M\dots}_{K\dots} \psi_b{}^{N\dots}_{L\dots} - \phi_b{}^{M\dots}_{K\dots} \psi_a{}^{N\dots}_{L\dots}$$

$$\phi_a{}^{M\dots}_{K\dots} \wedge \psi_{bc}{}^{N\dots}_{L\dots} = \phi_a{}^{M\dots}_{K\dots} \psi_{bc}{}^{N\dots}_{L\dots} + \phi_b{}^{M}_{K} \psi_{ca}{}^{N\dots}_{L\dots} + \phi_c{}^{M\dots}_{K\dots} \psi_{ab}{}^{N\dots}_{L\dots}$$

pozice fibrovaných indexů u členů v součinu zůstává stejné (prostý tenz. součin)
antisymetrizují se pouze tečné indexy

Def: Kovariantní vnější derivace

nechť D je kov. derivace na vekt. bundlu $\mathcal{A}M$

$\overset{D}{d}$ je kovariantní vnější derivace na $\Lambda^p \mathcal{A}^k_l M$ ≡

$\overset{D}{d}: \mathrm{Sect}\, \Lambda^p \mathcal{A}^k_l M \to \mathrm{Sect}\, \Lambda^{p+1} \mathcal{A}^k_l M$

$\overset{D}{d}(\phi + \psi) = \overset{D}{d}\phi + \overset{D}{d}\psi$

$\overset{D}{d}(\phi \wedge \psi) = (\overset{D}{d}\phi)\wedge\psi + (-1)^p \phi \wedge (\overset{D}{d}\psi)$ pro $\phi \in \mathrm{Sect}\,\Lambda^p\mathcal{A}^k_l M$

$\overset{D}{d}\phi = D\phi$ pro $p=0$ tj. $\phi \in \mathrm{Sect}\,\mathcal{A}^k_l M$

$\overset{D}{d}\phi = d\phi$ pro $k,l=0$ tj. $\phi \in \mathrm{Sect}\,\Lambda^p M$

Pozn: pro definici není potřeba specifikovat $\overset{D}{d}\overset{D}{d}$
tento výraz budeme zkoumat v souvislosti s křivostí
pro $\phi \in \Lambda^p M$ poslední pravidlo dává $dd\phi = 0$, toto nebude pravda obecně

Lema Vyjádření v souřadnicích na M

nechť x^a jsou souřadnice na M

$\phi = \sum_{a_1 < \dots < a_p} \phi_{a_1 \dots a_p}\, dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$ $\quad \phi \in \mathrm{Sect}\,\Lambda^p \mathcal{A}^k_l M$

kde $\phi_{a_1 \dots a_p} \in \mathrm{Sect}\,\mathcal{A}^k_l M$ jsou komponenty z hlediska tečných ind.
ale abstraktní fibrované tensory

pak lze kov. vnější der. psát

$$\overset{D}{d}\phi = \sum_{a_1 < \dots < a_p} (D\phi_{a_1 \dots a_p}) \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$$

$$= (p+1) \sum_{a_0 < a_1 < \dots < a_p} (D_{[a_0} \phi_{a_1 \dots a_p]})\, dx^{a_0} \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$$

důkaz:
první řádek je použití linearity, Leibniz. pr. a $ddx^a = 0$
druhý řádek je rozpis $D\phi_{a_1 \dots a_p} = D_{a_0}\phi_{a_1 \dots a_p}\, dx^{a_0}$ a přeuspořádání indexů do uspořádané sumy - viz obdobné diskuze pro obyčejnou vnější derivaci

Pozn:
Tento vzorec platí vůči libovolným souřadnicím x^a a je konzistentní vůči změně souřadnic
Zaručuje tak úplnost definice kovar. vnější derivace

Vnější derivace na $\Lambda^p M$ lze vyjádřit pomocí kov. der. ∇ na tečném bundlu TM. Připomeňme

$$d\omega = \nabla\wedge\omega + T\wedge\omega$$

kde T je torze derivace ∇

Tento vztah lze zobecnit pro vnější kov. der. na $\Lambda\mathcal{A}M$

Věta

nechť D je kov. der. na $\mathcal{A}M$ rozšířené na TM pomocí kov. der. ∇ a torzí T, pak

$$\overset{D}{d}_\circ\phi = D\wedge\phi + T\wedge\phi \qquad \text{tj.}$$

$$\overset{D}{d}_{a_0}\phi_{a_1\ldots a_p}{}^{M\ldots}_{N\ldots} = D_{a_0}\wedge\phi_{a_1\ldots a_p}{}^{M\ldots}_{N\ldots} + T^k_{a_0a_1}\wedge\phi_{|k|a_2\ldots a_p}{}^{M\ldots}_{N\ldots}$$

$$= (p+1)\, D_{[a_0}\phi_{a_1\ldots a_p]}{}^{M\ldots}_{N\ldots} + \binom{p+1}{2} T^k_{[a_0a_1}\phi_{|k|a_2\ldots a_p]}{}^{M\ldots}_{N\ldots}$$

důkaz

plyne z rozpisu vnější der. na ΛM

stačí uvažovat tenzory v součinovém tvaru

$$\phi_{a_1\ldots a_p}{}^{M\ldots}_{N\ldots} = \omega_{a_1\ldots a_p}\varphi^{M\ldots}_{N\ldots}$$

$$\overset{D}{d}\phi = (d\omega)\varphi + (\overset{D}{d}\varphi)\wedge\omega =$$

$$= (\nabla\wedge\omega + T\wedge\omega)\varphi + (D\varphi)\wedge\omega = (\varphi\nabla\wedge\omega + D\varphi\wedge\omega) + T\wedge\omega\varphi$$

$$= D\wedge(\omega\varphi) + T\wedge(\omega\varphi) = D\wedge\phi + T\wedge\phi$$

Pozn:

Zdůrazněme, že vnější kov. der. $\overset{D}{d}\phi$ nezávisí na volbě ∇

∇ může být libovolná a torze T se do vyjádření $\overset{D}{d}\phi$ dostává pouze volbou ∇ a týká se pouze ∇ na TM.