VEKTOROVÉ BUNDLY A KALIBRAČNÍ SYMETRIE

Kalibrační symetrie
Reálný vektorový bundl s O či SO symetrií
Kovariantní derivace na bundlu s O-symetrií
Komplexní vektorový bundl s U-symetrií
Kovariantní derivace na bundlu s U-symetrií
U(1) kalibrační symetrie a nabitá pole
Lokální kalibrační grupa a algebra
Kovariantní derivace na kalibrační algebře
Asociované vektorové bundly
Indukovaná kovariantní derivace na asociovaném bundlu

Opakování Lieových algeber

Kalibrační symetrie

polní teorie popisované pomocí vektorových bundlů mají většinou symetrii vůči transformacím působícím na každém fibru

kalibrační grupa

tyto transformace v jednom fibru tvoří tzv. kalibrační grupu
jedná se o Lieovu grupu konečné dimenze
grupy kalibr. transf. ve všech fibrech jsou isomorfní

lokální kalibrační grupa

kalibr. tranformace v různých fibrech jsou nezávislé a nelze je ani nijak kanonicky porovnávat
plná kalibr. symetrie je tak symetrie vůči lokální kalibr. transformaci, která je zadána volbou kalibr. ve všech bodech

grupový bundl

matematicky lze kalibr. transformace popsat jako grupový bundl GM nad základovou varietou M se stand. fibrem G kt. tvoří Lieova grupa
lokální kalibr. transformace bude pak řez tohoto bundlu
grupa lokálních kalibr. transf. tedy je $\mathrm{Sect}\, GM$

Lieova algebra lokální kalibr. grupy

ke kalibrační grupě G máme její Lieovu algebru $\mathfrak{g} = T_e G$
ke grupovému bundlu GM můžeme vytvořit bundl Lieovy algebry $\mathfrak{g}M$
řezy tohoto bundlu $\mathrm{Sect}\, \mathfrak{g}M$ tvoří Lieovu alg. lok. kal. grupy

reprezentace na vektorovém bundlu AM

akci kalibr. grupy GM na vekt. bundlu je skrze reprezentaci
všechny kalibr. transf. v bodě x jsou reprezentovány prvky z $A_x^1 M$ tj. lin. operátory na $A_x M$
podobně máme reprezentovanou kalibr. algebru $\mathfrak{g}M$

popis kalibr. transf. pomocí zvolené struktury na AM

reprezentaci kalibr. grupy, lze vymezit požadavkem, že transformace zachovává nějakou strukturu, např. reálný skal. součin (metriku), komplexní sk. součin (hermitovskou strukt.), orientaci, symplekt. str, atd.
toto vymezení pak indukuje i reprezentaci kalibr. algebry

nejdříve si ukážeme dva základní příklady tohoto postupu

Reálný vektorový bundl s O či SO symetrií

kalibrační transformace bude vymezena jako transformace zachovávající fibrovou metriku, případně navíc orientaci

popis "standardní kopie" metrické struktury:

Metrická struktura

A reálný vekt. pr. (bude stand. fiber)

$H_{\underline{AB}}$ nedegenerovaná symetrická metrika

$H_{AB} = H_{BA}$ existuje $H^{-1\underline{AB}}$ $H_{\underline{AN}} H^{-1\underline{NB}} = 1\!\!1_{\underline{A}}^{\underline{B}}$

zvyšování a snižování indexů

$H^{\underline{AB}} = H^{-1\underline{AB}}$ $H^{\underline{A}}{}_{\underline{B}} = 1\!\!1^{\underline{A}}_{\underline{B}}$

transpozice (speciální případy zvyš. a sniž. indexů)

$\phi^{\underline{A}} \to \phi^{T}{}_{\underline{A}} = H_{\underline{AB}} \phi^{\underline{B}}$

$\phi_{\underline{A}} \to \phi^{T\underline{A}} = H^{\underline{AB}} \phi_{\underline{B}}$

$X^{\underline{A}}{}_{\underline{B}} \to X^{T\underline{A}}{}_{\underline{B}} = H^{\underline{AM}} H_{\underline{BN}} X^{\underline{N}}{}_{\underline{M}} = X_{\underline{B}}{}^{\underline{A}}$

skalární součin

$(\phi, \psi) = \phi^{\underline{A}} \psi^{\underline{B}} H_{\underline{AB}}$

$(\phi, \psi) = \phi^{T} \cdot \psi = \phi \cdot \psi^{T}$ $(X \cdot \phi, \psi) = (\phi, X^{T} \cdot \psi)$

signatura $H_{\underline{AB}}$

$(\underbrace{- \cdots -}_{m} \underbrace{+ \cdots +}_{p})$ signatura (m, p)

(pseudo) ortonormální transformace

lin. transf. A zachovávající sk. součin

$R^{\underline{A}}{}_{\underline{B}} \in A^1_1$ $\tilde{\phi}^{\underline{A}} = R^{\underline{A}}{}_{\underline{M}} \phi^{\underline{M}}$ $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = (\phi, \psi)$

$\Leftrightarrow$ $\tilde{H}_{\underline{AB}} = H_{\underline{AB}}$ $\Leftrightarrow$ $H_{\underline{AB}} = H_{\underline{MN}} R^{\underline{M}}{}_{\underline{A}} R^{\underline{N}}{}_{\underline{B}}$ $\Leftrightarrow$ $R^{T} \cdot R = 1\!\!1$

ortonorm. transf. tvoří grupu $G = O(A, H) \cong O(m, p)$

rozšíření ortonorm. transf. na tenzory

$\widetilde{(X \otimes \psi)} = \tilde{X} \otimes \tilde{\psi}$ $\widetilde{\mathrm{C} X} = \mathrm{C} \tilde{X}$ $\tilde{\alpha} = \alpha$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$\tilde{X}^{\underline{AB}\ldots}{}_{\underline{CD}\ldots} = R^{\underline{A}}{}_{\underline{K}} R^{\underline{B}}{}_{\underline{L}} \ldots R^{-1\underline{M}}{}_{\underline{C}} R^{-1\underline{N}}{}_{\underline{D}} \ldots X^{\underline{KL}\ldots}{}_{\underline{MN}\ldots}$

malé ortonormální transformace

$R_{\alpha} = 1\!\!1 + \alpha \Omega + O(\alpha^2)$ - jednopar. třída ortonorm. tr. blízkých $1\!\!1$

$1\!\!1 = R_{\alpha}^{T} \cdot R_{\alpha} = 1\!\!1 + \alpha(\Omega + \Omega^{T}) + O(\alpha^2)$

$\Downarrow$

$\Omega = -\Omega^{T}$ reprezentace Lieovy alg. $\mathfrak{g} = o(A, H) \cong o(m, p)$

Kalibrační grupa reprez. podgrupou ortonormální grupy

podgrupa ortonormální grupy může být specifikována zadáním dodatečné struktury, která se má při transformaci zachovat

příkladem může být

Levi-Civitův tenzor určující orientaci

projektory na invariantní podprostory

poznámka:

každá poloprostá grupa lze reprezentovat jako podgrupa ortonormální grupy

vskutku, adjoint reprezentace Ad zachovává Killingovu metriku, která je pro poloprostou grupu nedegenerovaná

Orientace

metrika H_{AB} fixuje "jednotkový" totálně antisym. tenzor až na znaménko

volba znaménka znamená volbu orientace

Levi-Civitův tenzor na A

$\varepsilon_{A_1 \dots A_N}$ normalizace $\varepsilon_{A_1 \dots A_N} \varepsilon^{A_1 \dots A_N} = (-1)^m N!$

transformace zachovávající orientaci

$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad R^{M_1}{}_{A_1} \dots R^{M_N}{}_{A_N} \varepsilon_{M_1 \dots M_N} = \varepsilon_{A_1 \dots A_N} \quad \Leftrightarrow \quad \det R = 1$

ortonormální transf. zachovávající orientaci

grupa $G = SO(A, H) \cong SO(m, p)$

Lieova alg. $g = so(A, H) \cong so(m, p)$

algebra je shodná s algebrou $o(m, p)$

grupa $O(m, p)$ je "dvakrát" větší než $SO(m, p)$

Lokalizace fibrované metrické struktury

AM reálný vekt. bundl se stand. fibrem A
a standardní metrickou strukturou H

tj. máme fibrovanou metriku

$H_{\underline{AB}} \in \mathcal{S}ect\, A^0_2 M$

isomorfní v každém bodě metrice na stand. fibru

je-li AM orientovatelný, lze zvolit globální Levi-Civit. tenzor

$\varepsilon_{\underline{A}_1 \dots \underline{A}_N} \in \mathcal{S}ect\, A^0_N M$

neorientovatelnost znamená, že nelze zvolit globální hladký Levi-Civitův tenzor = nelze konzistentně a spojitě zvolit znaménko Levi-Civitova tenzoru na celém bundlu

Lokální kalibrační O-transformace

lokální kalibr. O-transformace je hladká lineární transf. všech fibrů zachovávající fibrovou metriku

$\phi^{\underline{A}} \in \mathcal{S}ect\, AM$ řez bundlu repr. fyzikální pole

$R^{\underline{A}}{}_{\underline{B}} \in \mathcal{S}ect\, A^1_1 M$ lokální kalibr. transf.

$\phi^{\underline{A}} \to \tilde{\phi}^{\underline{A}} = R^{\underline{A}}{}_{\underline{B}} \phi^{\underline{B}}$

$X^{\underline{A}\dots}_{\underline{B}\dots} \to \tilde{X}^{\underline{A}\dots}_{\underline{B}\dots} = R^{\underline{A}}{}_{\underline{M}} \dots R^{-1\underline{N}}{}_{\underline{B}} \dots X^{\underline{M}\dots}_{\underline{N}\dots}$

kalibr. transf. vekt. a tenz. polí

$(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = (\phi, \psi) \qquad \tilde{H}_{\underline{AB}} = H_{\underline{AB}}$

$R^{\underline{M}}{}_{\underline{A}} R^{\underline{N}}{}_{\underline{B}} H_{\underline{MN}} = H_{\underline{AB}}$

$R^T \cdot R = R \cdot R^T = \mathbb{1}$

lok. kalibr. transf. musí splňovat podmínky ortonormality

lokální kalibr. SO-transformace

$R^{\underline{A}}{}_{\underline{B}}$ navíc zachovává globální orientaci, tj.

$\det R = 1$ či $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$

Lokální kalibrační algebra

Lieova algebra Lieovy grupy popisuje transformace blízké jednotce.
v řeči reprezentace na AM můžeme psát

$$R_\alpha = \mathbb{1} + \alpha \Omega + O(\alpha^2) \qquad \Omega \in \mathrm{Sect}\, A^1_1 M$$

kde Ω je prvek lokální kal. algebry reprezentovaný na AM
z ortonormality R_α plyne antisymetrie Ω

$$\Omega^T = -\Omega$$

Lieova závorka je dána komutátorem

$$[\Omega_1, \Omega_2] = \Omega_1 \cdot \Omega_2 - \Omega_2 \cdot \Omega_1$$

exponenciální zobr. exp: algebra → grupa je dáno maticovou exponenciálou

$$R = \exp(\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Omega^k$$

akce Lieovy algebry na obecném tenzoru
prvek lok. kalibrační algebry $\Omega^A{}_B$ působí na tenzory jako pseudoderivace Ω generované $\Omega^A{}_B$

$$\Omega X^{A\ldots}_{B\ldots} = \Omega^A{}_K X^{K\ldots}_{B\ldots} + \ldots - \Omega^K{}_B X^{A\ldots}_{K\ldots} - \ldots$$

jedná se o lineární řád v α působení $R_\alpha = (\mathbb{1} + \alpha\Omega)$ na X
viz diskuzi pseudoderivace

Trivializace kompatibilní s O-symetrií

trivializace kompatibilní s metrickou strukturou je volba báze E_A pro kterou platí

$$(E_A, E_B) = \text{konst} \qquad \text{tj.} \qquad H_{AB} = \text{konst.}$$

konstantnost je myšlena na zákl. varietě M

ortonormální trivializace

$$H_{AB} = \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & +1 & \\ & & & & +1 \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

nejběžnější volba

pro speciální signaturu může být výhodné volit i jiné trivializace

$$H_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

pro signaturu $m = p$

kalibrační transformace

- kalibr. transf. trivializace konz. s metrikou dé trivializaci konz. s metrikou

$$\tilde{E}_{\tilde{A}} = R \cdot E_A$$

$$\Rightarrow \quad H_{\tilde{A}\tilde{B}} = H_{AB} \qquad \text{tj.} \quad (\tilde{E}_{\tilde{A}}, \tilde{E}_{\tilde{B}}) = (E_A, E_B) \quad \leftarrow \text{ortonorm. } R$$

(zde $H_{\tilde{A}\tilde{B}}$ jsou komponenty vůči bázi $\tilde{E}_{\tilde{A}}$)

- dvě trivial. konz. s metrikou s $H_{AB} = H_{\tilde{A}\tilde{B}}$ jsou spojeny kalibr. transf.

$$R = \tilde{E}_{\tilde{M}} E^M \qquad \text{tj.} \qquad R^{\tilde{A}}{}_B = \tilde{E}^{\tilde{A}}_{\tilde{M}} E^M_B$$

kde E^M je duální k E_M

opravdu, toto R dává

$$\tilde{E}_{\tilde{A}} = R \cdot E_A \qquad\qquad H_{\tilde{A}\tilde{B}} = H_{AB}$$

pasivní kalibrační transformace

změna komponent vektoru ϕ^A při změně trivializace konz. s metrikou se nazývá pasivní kalibr. transf.

mějme trivializace E_M, $\tilde{E}_{\tilde{M}}$ tak že $H_{AB} = H_{\tilde{A}\tilde{B}} = \text{konst}$

nechť $\quad E_A = \tilde{E}_{\tilde{M}} R^{\tilde{M}}{}_A \qquad R^{\tilde{M}}{}_N$ matice přechodu

pak $\quad \phi^{\tilde{A}} = R^{\tilde{A}}{}_M \phi^M \qquad$ ortonormalita: $\quad H_{AB} = H_{\tilde{M}\tilde{N}} R^{\tilde{M}}{}_A R^{\tilde{N}}{}_B$

Kovariantní derivace na bundlu s O-symetrií

Def:
mějme vekt. bundl $\mathcal{A}M$ s metrikou $H_{\underline{AB}}$
kov. derivace D na $\mathcal{A}M$ se nazývá konzistentní s metrickou strukturou, též O-kovariantní der., jestliže

$$D_m H_{\underline{AB}} = 0 \qquad \text{tj.} \quad D(\phi, \psi) = (D\phi, \psi) + (\phi, D\psi)$$

Lema
nechť E_A je trivializace konz. s metrikou $H_{\underline{AB}}$
nechť ∂ je příslušná souř. derivace, tj $\partial E_A = 0$
pak ∂ je konzistentní s metrikou $H_{\underline{AB}}$

$$\partial_m H_{\underline{AB}} = 0$$

důkaz

$$H_{\underline{AB}} = H_{\underline{KL}} E^K_{\underline{A}} E^L_{\underline{B}} \qquad \partial E^K_{\underline{A}} = 0 \qquad \partial H_{KL} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial H_{\underline{AB}} = 0$$

Věta:
nechť D je O-kov. der. daná vektorovým polem. $A_{\underline{m}}{}^{K}{}_{L}$ vůči trivializaci E_K, ∂ konzistentní s metrikou $H_{\underline{AB}}$

$$D\phi = \partial\phi + A\cdot\phi$$

pak

$$A^T_{\underline{m}} = -A_{\underline{m}} \qquad \text{tj.} \quad A_{\underline{m}\underline{L}}{}^{K} = A^{T}_{\underline{m}}{}^{K}{}_{L} = -A_{\underline{m}}{}^{K}{}_{L}$$

důkaz:

$$DH = \partial H = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = [D_{\underline{m}} - \partial_{\underline{m}}] H_{\underline{AB}} = A_{\underline{m}} H_{\underline{AB}} = -A_{\underline{m}}{}^{M}{}_{\underline{A}} H_{\underline{MB}} - A_{\underline{m}}{}^{M}{}_{\underline{B}} H_{\underline{AM}} \quad \Rightarrow \quad A^T_{\underline{m}} = -A_{\underline{m}}$$

Věta
nechť D je O-kov. derivace a $F_{\underline{mn}}{}^{A}{}_{B}$ její tenzor křivosti, pak

$$F^T_{\underline{mn}} = -F_{\underline{mn}} \qquad \text{tj.} \quad F_{\underline{mn}\underline{L}}{}^{K} = F^{T}_{\underline{mn}}{}^{K}{}_{L} = -F_{\underline{mn}}{}^{K}{}_{L}$$

důkaz:

$$DH = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = [D_{\underline{m}} D_{\underline{n}} - D_{\underline{n}} D_{\underline{m}} + T^{\underline{k}}_{\underline{mn}} D_{\underline{k}}] H_{\underline{AB}} = F_{\underline{mn}} H_{\underline{AB}} = -F_{\underline{mn}}{}^{M}{}_{\underline{A}} H_{\underline{MB}} - F_{\underline{mn}}{}^{M}{}_{\underline{B}} H_{\underline{AM}}$$

$$\Rightarrow \quad F_{\underline{mn}} = -F^T_{\underline{mn}}$$

Pozn:
vekt. pot. $A_{\underline{m}}$ a křivost $F_{\underline{mn}}$ jsou tak reprezentací prvku Lieovy algebry lokální kalibrační grupy
(s dodatečnými tečnými indexy $\underline{m}$ resp. $\underline{mn}$)

Kalibrační transformace kov. derivace

Def:

akci kalibr. transf. R na kov. derivaci D definujeme podmínkou

$$\tilde{D}\tilde{\phi} = \widetilde{D\phi}$$

Věta

transformovaná kov. der. $\tilde{D}$ je dána

$$\tilde{D} = D + \Lambda \qquad \text{kde pseudoder. } \Lambda \text{ je generována } \Lambda = -(DR)\cdot R^{-1}$$

důkaz:

definiční vztah pro $\tilde{D}$ je

$$R\cdot D\phi = \tilde{D}(R\cdot\phi) = D(R\cdot\phi) + \Lambda\cdot R\cdot\phi = (DR)\cdot\phi + R\cdot(D\phi) + \Lambda\cdot R\cdot\phi$$

$$\Rightarrow (DR + \Lambda\cdot R)\cdot\phi = 0 \quad \forall\phi \quad \Rightarrow \quad \Lambda = -(DR)\cdot R^{-1}$$

Věta:

nechť $A, \tilde{A}$ jsou vekt. potenciály kov. derivací $D, \tilde{D}$ vůči stejné trivializaci E_A, ∂ platí

$$\tilde{A} = R\cdot A\cdot R^{-1} - (\partial R)\cdot R^{-1}$$

$$= A - (DR)\cdot R^{-1} = A - R^{-1}\cdot(\tilde{D}R)$$

důkaz:

víme: $D\phi = \partial\phi + A\cdot\phi \qquad \tilde{D}\phi = \partial\phi + \tilde{A}\cdot\phi \qquad \tilde{D}\phi = D\phi - (DR)\cdot R^{-1}\cdot\phi$

$$\Rightarrow \tilde{D}\phi = D\phi - (DR)\cdot R^{-1}\cdot\phi = \partial\phi + (A - (DR)\cdot R^{-1})\cdot\phi = \partial\phi + \tilde{A}\cdot\phi$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = A - (DR)\cdot R^{-1}$$ – jedno tvrzení věty

$$= A - (\partial R + A\cdot R - R\cdot A)\cdot R^{-1} = R\cdot A\cdot R^{-1} - (\partial R)\cdot R^{-1}$$

alternativní důkaz

$$\widetilde{D\phi} = \tilde{D}\tilde{\phi} = \partial\tilde{\phi} + \tilde{A}\cdot\tilde{\phi} = \partial(R\cdot\phi) + \tilde{A}\cdot R\cdot\phi = R\cdot\partial\phi + (\partial R + \tilde{A}\cdot R)\cdot\phi$$

$$= R\cdot D\phi = R\cdot\partial\phi + R\cdot A\cdot\phi \qquad \forall\phi \Rightarrow$$

$$\tilde{A} = R\cdot A\cdot R^{-1} - (\partial R)\cdot R^{-1}$$

třetí tvrzení plyne ze záměny

$$D \leftrightarrow \tilde{D} \qquad A \leftrightarrow \tilde{A} \qquad R \leftrightarrow R^{-1} \quad \Rightarrow$$

$$A = \tilde{A} - (\tilde{D}R^{-1})\cdot R \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} = A + (\tilde{D}R^{-1})\cdot R = A - R^{-1}\tilde{D}R$$

Věta:

tenzor křivosti $\tilde{F}$ transformované kov. der. $\tilde{D}$ je

$$\tilde{F} = R \cdot F \cdot R^{-1}$$

tj. je dán standardní kal. transf. tenzoru typu $A^1_1 M$

důkaz:

$$\tilde{D}\tilde{\phi} = \widetilde{D\phi} \quad \Rightarrow \quad \tilde{D}\tilde{D}\tilde{\phi} = \widetilde{DD\phi} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbb{F}}\tilde{\phi} = \widetilde{\mathbb{F}\phi}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{F} \cdot R \cdot \phi = R \cdot F \cdot \phi \quad \Rightarrow \quad \tilde{F} = R \cdot F \cdot R^{-1}$$

Komplexní vektorový bundl s U-symetrií

Kalibrační transformace vymezena jako transf. zachovávající skalární součin na komplexním vekt. prostoru

popis "standardní kopie" komplexní a hermitovské struktury:

Komplexní struktura

$\mathbb{E}$ komplexní vekt. pr.

tenzory z $\mathbb{E}^k_l$ umožňují popsat všechny multilin. zobrazení mezi vektory a tenzory

potřebujeme popsat též antilineární operace

stačí zavést jednu antilin. operaci - ostatní se liší o lineární oper.

zavedeme $\bar{\mathbb{E}}$ - kopii prostoru $\mathbb{E}$, která bude spojena s $\mathbb{E}$ antilin. operací

$\mathbb{E}_L \equiv \mathbb{E}$

$\mathbb{E}_R \equiv \bar{\mathbb{E}}$

} sdružené komplexní vekt. pr. dimenze D

$\bar{\ } : \mathbb{E}_L \leftrightarrow \mathbb{E}_R$ antilineární jedno-jednoznačné operace tak, že

$\bar{\bar{\phi}} = \phi$ sdružení

vektory z $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$ značíme

$\mathbb{E}_L$ ϕ^A indexy $A, B, C, \ldots$

$\mathbb{E}_R$ $\psi^{\bar{A}}$ indexy $\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C}$

Pozn: v kontextu spinorů se používají místo nadtržení tečky

komplexní tenzorový prostor nad $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$ pak je

$$\mathbb{E}^{k_L k_R}_{l_L l_R} = \underbrace{\mathbb{E}_L \otimes \ldots}_{k_L} \otimes \underbrace{\mathbb{E}^*_L \otimes \ldots}_{l_L} \otimes \underbrace{\mathbb{E}_R \otimes \ldots}_{k_R} \otimes \underbrace{\mathbb{E}^*_R \otimes \ldots}_{l_R} \qquad X^{A\ldots\bar{B}\ldots}_{M\ldots\bar{N}\ldots}$$

libovolná antilin. operace lze nyní reprezentovat pomocí sdružení $\bar{\ }$ a tenzorové operace

např.: $\alpha : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$

$$(\alpha\phi)^A = \alpha^A{}_{\bar{M}}\, \bar{\phi}^{\bar{M}}$$

např. $\circledast : \mathbb{E}^{11}_{00} \to \mathbb{E}^{11}_{00}$

$$X^{\circledast A\bar{B}} = S^{A\bar{B}}{}_{N\bar{M}}\, \bar{X}^{\bar{M}N}$$

Skalární součin, hermitovská struktura

na E_L a E_R definujeme skal. součiny pomocí nedegenerované hermitovské positivně definitní formy $h_{\underline{\bar{A}}\underline{B}}$

$h_{\underline{\bar{A}}\underline{B}} \in \mathbb{E}^{00}_{11}$

$h_{\underline{\bar{A}}\underline{B}}$ nedegenerované $\equiv$ existuje inverzní $h^{-1\bar{A}B}$ $\quad h_{\underline{\bar{M}}\underline{A}} h^{-1\bar{M}B} = \mathbb{1}^{B}_{\underline{A}} \quad h_{\underline{\bar{A}}\underline{M}} h^{-1\bar{B}M} = \mathbb{1}^{\bar{B}}_{\underline{\bar{A}}}$

$h_{\underline{\bar{A}}\underline{B}}$ hermitovské $\equiv$ $\bar{h}_{\underline{B}\underline{\bar{A}}} = h_{\underline{\bar{A}}\underline{B}}$

$h_{\underline{\bar{A}}\underline{B}}$ posit. definitní $\equiv$ $\bar{\phi}^{\bar{A}} \phi^{B} h_{\underline{\bar{A}}\underline{B}} > 0$ pro $\phi \neq 0$

skalární součiny:

$$\langle \phi_1 , \phi_2 \rangle_L = \bar{\phi}_1^{\bar{A}} \phi_2^{B} h_{\underline{\bar{A}}\underline{B}} \qquad \phi_1, \phi_2 \in E_L$$

$$\langle \psi_1 , \psi_2 \rangle_R = \bar{\psi}_1^{A} \psi_2^{\bar{B}} \bar{h}_{\underline{A}\underline{\bar{B}}} \qquad \psi_1 \psi_2 \in E_R \qquad \text{ale } \bar{h} = h \,!$$

hermitovské sdružení

$+ : \mathbb{E}^{10}_{00} \leftrightarrow \mathbb{E}^{00}_{10}$

$\mathbb{E} \leftrightarrow \mathbb{E}^{*}$ (duál k $\mathbb{E}$)

$\phi^{+}{}_{\underline{A}} = \bar{\phi}^{\bar{M}} h_{\underline{\bar{M}}\underline{A}}$

$\Sigma^{+A} = \bar{\Sigma}_{\underline{\bar{M}}} h^{-1\bar{M}A}$

+ antilineární

$\langle \phi_1 , \phi_2 \rangle_L = \phi_1^{+}{}_{\underline{A}} \phi_2^{A}$

$\phi^{++} = \phi \quad \Sigma^{++} = \Sigma$

$+ : \mathbb{E}^{01}_{00} \leftrightarrow \mathbb{E}^{00}_{01}$

$\bar{\mathbb{E}} \leftrightarrow \bar{\mathbb{E}}^{*}$ (duál k $\bar{\mathbb{E}}$)

$\psi^{+}{}_{\underline{\bar{A}}} = \bar{\psi}^{M} h_{\underline{\bar{A}}\underline{M}}$

$\Omega^{+\bar{A}} = \bar{\Omega}_{\underline{M}} h^{-1\bar{A}M}$

+ antilineární

$\langle \psi_1 , \psi_2 \rangle_R = \psi_1^{+}{}_{\underline{\bar{A}}} \psi_2^{\bar{A}}$

$\psi^{++} = \psi \quad \Omega^{++} = \Omega$

$+ : \mathbb{E}^{10}_{10} \to \mathbb{E}^{10}_{10}$

$M^{+A}{}_{\underline{B}} = h^{-1\bar{K}A} h_{\underline{\bar{L}}\underline{B}} \bar{M}^{\bar{L}}{}_{\underline{\bar{K}}}$

$\langle \phi_1 , M \cdot \phi_2 \rangle_L = \langle M^{+} \cdot \phi_1 , \phi_2 \rangle_L$

$M^{++} = M$

+ antilineární

$+ : \mathbb{E}^{01}_{01} \to \mathbb{E}^{01}_{01}$

$N^{+\bar{A}}{}_{\underline{\bar{B}}} = h^{-1\bar{A}K} h_{\underline{\bar{B}}\underline{L}} \bar{N}^{L}{}_{\underline{K}}$

$\langle \psi_1 , N \cdot \psi_2 \rangle_R = \langle N^{+} \cdot \psi_1 , \psi_2 \rangle_R$

$N^{++} = N$

+ antilineární

Lokalizace komplexní a hermitovské struktury

$\mathbb{E}_L M$, $\mathbb{E}_R M$ komplexní vekt. bundly nad M spojené vzájemným sdružením $\bar{\ }$

hermitovská struktura

$h_{\bar{A}B} \in \operatorname{Sect} \mathbb{E}^{00}_{11} M$

generující skalární součiny $\langle , \rangle_L$, $\langle , \rangle_R$ a herm. odz. $^+$

Pozn: Tyto struktury jsou lokálně (nekanonicky) isomorfní strukturám na standardním fibru. Tzn, že lokální isomorfismus $\mathbb{E}U \cong \mathbb{E} \times U$, kde $U \subset M$, zachovává isomorf. struktur $\bar{\ }$, h, $\langle \rangle_{L,R}$, $^+$

Lokální kalibrační U-transformace

lokální kalibrační U-transformace je hladká lineární transf. všech fibrů bundlů $E_L M$ a $E_R M$ zachovávající skalární součiny $\langle\,,\,\rangle_L$ a $\langle\,,\,\rangle_R$ a komutující se sdružením –

$$U : \mathrm{Sect}\, E_L M \to \mathrm{Sect}\, E_L M \qquad \text{tj.} \quad U \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{E}^{1\,0}_{1\,0} M$$

$$\phi \to \tilde{\phi} = U \cdot \phi \qquad \text{tj.} \quad \tilde{\phi}^{\underline{A}} = U^{\underline{A}}{}_{\underline{B}}\, \phi^{\underline{B}}$$

$$\bar{U} : \mathrm{Sect}\, E_R M \to \mathrm{Sect}\, E_R M \qquad \text{tj.} \quad \bar{U} \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{E}^{0\,1}_{0\,1} M$$

$$\psi \to \tilde{\psi} = \bar{U} \cdot \psi \qquad \text{tj.} \quad \tilde{\psi}^{\bar{\underline{A}}} = \bar{U}^{\bar{\underline{A}}}{}_{\bar{\underline{B}}}\, \psi^{\bar{\underline{B}}}$$

zachování skal. součinu:

$$\langle \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2 \rangle_L = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_L \qquad\qquad \langle \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2 \rangle_R = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_R$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$h_{\bar{\underline{M}}\underline{N}}\, \bar{U}^{\bar{\underline{M}}}{}_{\bar{\underline{A}}}\, U^{\underline{N}}{}_{\underline{B}} = h_{\bar{\underline{A}}\underline{B}}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$U^{+\underline{A}}{}_{\underline{M}}\, U^{\underline{M}}{}_{\underline{B}} = U^{\underline{A}}{}_{\underline{M}}\, U^{+\underline{M}}{}_{\underline{B}} = \mathbb{1}^{\underline{A}}{}_{\underline{B}} \qquad\qquad \bar{U}^{+\bar{\underline{A}}}{}_{\bar{\underline{M}}}\, \bar{U}^{\bar{\underline{M}}}{}_{\bar{\underline{B}}} = \bar{U}^{\bar{\underline{A}}}{}_{\bar{\underline{M}}}\, \bar{U}^{+\bar{\underline{M}}}{}_{\bar{\underline{B}}} = \mathbb{1}^{\bar{\underline{A}}}{}_{\bar{\underline{B}}}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

U L-unitární $\qquad\qquad$ $\bar{U}$ R-unitární

rozšíření na obecné tenzory

$$X^{\underline{A}\dots\bar{\underline{B}}\dots}_{\underline{C}\dots\bar{\underline{D}}\dots} \to \tilde{X}^{\underline{A}\dots\bar{\underline{B}}\dots}_{\underline{C}\dots\bar{\underline{D}}\dots} = U^{\underline{A}}{}_{\underline{K}} \cdots \bar{U}^{\bar{\underline{B}}}{}_{\bar{\underline{L}}} \cdots U^{-1\underline{M}}{}_{\underline{C}} \cdots \bar{U}^{-1\bar{\underline{N}}}{}_{\bar{\underline{D}}} \cdots X^{\underline{K}\dots\bar{\underline{L}}\dots}_{\underline{M}\dots\bar{\underline{N}}\dots}$$

transformace lze chápat jako reprezentaci lokální kalibr. grupy na prostorech $\mathbb{E}^{k_L k_R}_{l_L l_R} M$

Lokální kalibrační algebra

$U \in \mathrm{Sect}\, E^{1\,0}_{1\,0} M$ a $\bar{U} \in \mathrm{Sect}\, E^{0\,1}_{0\,1} M$ chápeme jako reprezentaci lokální kalibrační grupy na $E_L M$ a $E_R M$

Lieova algebra kalibrační grupy popisuje transf. blízké jednotce

$$U_\alpha = \mathbb{1} + \alpha i u + O(\alpha^2) \qquad \bar{U}_\alpha = \bar{\mathbb{1}} - \alpha i \bar{u} + O(\alpha^2)$$

$u \in \mathrm{Sect}\, E^{1\,0}_{1\,0} M$ a $\bar{u} \in \mathrm{Sect}\, E^{0\,1}_{0\,1} M$ tak reprezentují prvek lieovy algebry kalibr. grupy na $E_L M$ a $E_R M$

podmínka unitarity

$$U \cdot U^\dagger = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad i u - i u^\dagger = 0 \qquad \text{tj.} \quad u^\dagger = u$$

$u, \bar{u}$ jsou hermitovské oper. na $E_L M$ resp. $E_R M$

Lieova závorka je dána komutátorem

$$u = i[u_1, u_2] \qquad \bar{u} = -i[\bar{u}_1, \bar{u}_2]$$

odbočka, Lieově závorce v algebře odpovídá komutátor na reprezentačním prostoru, ale přesná reprezentace obsahuje i faktor i, tj

$$iu = [iu_1, iu_2] \quad \Rightarrow \quad u = i[u_1, u_2]$$

exponenciální zobrazení exp: algebra $\to$ grupa je dáno maticovou exponenciálou

$$U = \exp(iu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (iu)^k$$

akce Lieovy algebry na obecném tenzoru

působení Lieovy algebry se dostane jako lineární řád působení prvku kalibr. grupy $U = (\mathbb{1} + \alpha i u)$

lehce se ověří, že se jedná o akci pseudoderivace $\mathfrak{u}$ rozšířenou na tenzorové prostory $E^{k_L k_R}_{l_L l_R} M$ nad $E_L M$ a $E_R M$ následovně

$$\mathfrak{u}\, X^{A\ldots \bar{B}\ldots}_{C\ldots \bar{D}\ldots} = i u^A{}_K X^{K\ldots \bar{B}\ldots}_{C\ldots \bar{D}\ldots} + \ldots - i\bar{u}^{\bar{B}}{}_{\bar{K}} X^{A\ldots \bar{K}\ldots}_{C\ldots \bar{D}\ldots} - \ldots - i u^L{}_C X^{A\ldots \bar{B}\ldots}_{L\ldots \bar{D}\ldots} - \ldots + i\bar{u}^{\bar{L}}{}_{\bar{D}} X^{A\ldots \bar{B}\ldots}_{C\ldots \bar{L}\ldots} + \ldots$$

akce pseudoderivace $\mathfrak{u}$ je generována akcí iu na $E_L M$ resp. $-i\bar{u}$ na $E_R M$

$$\mathfrak{u}\, \phi^A = i u^A{}_B \phi^B \qquad \mathfrak{u}\, \psi^{\bar{A}} = -i \bar{u}^{\bar{A}}{}_{\bar{B}} \psi^{\bar{B}}$$

Pozn: akce $\mathfrak{u}$ na $E^{k_L k_R}_{l_L l_R} M$ lze chápat jako kompozice $\mathfrak{u}_L$ na $E_L{}^{k_L}_{l_L} M$ a $\mathfrak{u}_R$ na $E_R{}^{k_R}_{l_R} M$

$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_L \oplus \mathfrak{u}_R$ kde $\mathfrak{u}_L$ je generováno iu a $\mathfrak{u}_R$ je generováno $-i\bar{u}$

máme tedy $\mathfrak{u}_R = \bar{\mathfrak{u}}_L$ a můžeme psát $\bar{\mathfrak{u}} = \mathfrak{u}$

pozor ale na faktory "i" a "$-i$" v konkrétní reprezentaci "iu" a "$-i\bar{u}$"

Trivializace kompatibilní s U-symetrií

trivializace kompatibilní s hermitovskou strukturou
je volba báze E_A v $\mathbb{E}_L M$, resp. $\bar{E}_{\bar{A}}$ v $\mathbb{E}_R M$ pro které platí

$$\langle E_A, E_B \rangle_L = \text{konst.} \qquad \langle \bar{E}_{\bar{A}}, \bar{E}_{\bar{B}} \rangle_R = \text{konst.}$$

konstantnost je myšlena na podkladové varietě M

ortonormální trivializace
typicky volíme ortonormální bázi

$$h_{\bar{A}B} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix} = \langle E_A, E_B \rangle_L = \langle \bar{E}_{\bar{B}}, \bar{E}_{\bar{A}} \rangle_R$$

kalibrační transformace

- kalibr. transformace ortonormální báze do ortonormální bázi
- dvě ortonormální báze jsou spojeny kalibrační transformací

pasivní kalibrační transformace
změna komponent vektorů ϕ^A, $\psi^{\bar{A}}$ při změně ortonormální trivializace se nazývá pasivní kalibrační transformací

Realizace (zreálnění) prostorů $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$

prostor $\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R$ má strukturu komplexifikace reálného vekt. prostoru

$$\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R = \mathrm{Re}(\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R) + i\,\mathrm{Im}(\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R) = (\mathbb{E}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$$

komplexní sdružení na $\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R$

$$\Psi = \psi_L \oplus \psi_R \in \mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R \qquad \psi_L \in \mathbb{E}_L \quad \psi_R \in \mathbb{E}_R$$

definujeme

$$\Psi^* = \bar{\psi}_R \oplus \bar{\psi}_L \in \mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R$$

Re a Im definujeme pomocí $*$

$$\Psi \in \mathrm{Re}\,\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R \iff \Psi = \Psi^* \qquad \text{tj. } \Psi = \psi \oplus \bar{\psi}$$

$$\Psi \in \mathrm{Im}\,\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R \iff \Psi = -\Psi^* \qquad \text{tj. } \Psi = \psi \oplus (-\bar{\psi})$$

$$\mathrm{Re}\,\Psi = \tfrac{1}{2}(\Psi + \Psi^*) = \tfrac{1}{2}\ (\psi_L + \bar{\psi}_R) \oplus (\bar{\psi}_L + \psi_R)$$

$$\mathrm{Im}\,\Psi = -\tfrac{i}{2}(\Psi - \Psi^*) = -\tfrac{i}{2}\ (\psi_L - \bar{\psi}_R) \oplus (\psi_R - \bar{\psi}_L)$$

realizace $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$

$\mathbb{E}^{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}(\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R)$ reálný vekt. prostor $\mathbb{R}$-dimenze 2D

$\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R = (\mathbb{E}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$ komplexní vekt. prostor $\mathbb{C}$-dimenze 2D

komplexní struktura na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ máme přirozeně dvě komplexní struktury J a $\bar{J} = -J$

$$J : \mathbb{E}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{E}^{\mathbb{R}} \quad \mathbb{R}\text{-lineární} \qquad J^2 = -\mathbb{1} \qquad J^* = J$$

$$\bar{J} : \mathbb{E}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{E}^{\mathbb{R}} \quad \mathbb{R}\text{-lineární} \qquad \bar{J}^2 = -\mathbb{1} \qquad \bar{J}^* = \bar{J}$$

definované

$$J\cdot\Psi = J\cdot(\psi \oplus \bar{\psi}) = (i\psi) \oplus (-i\bar{\psi}) \qquad \Psi \in \mathbb{E}^{\mathbb{R}} \quad \psi \in \mathbb{E}_L \quad \bar{\psi} \in \mathbb{E}_R$$

$$\bar{J}\cdot\Psi = \bar{J}\cdot(\psi \oplus \bar{\psi}) = (-i\psi) \oplus (i\bar{\psi})$$

$J, \bar{J}$ lze rozšířit $\mathbb{R}$-lineárně na $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = \mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R$

$\mathbb{E}_L \oplus 0$ a $0 \oplus \mathbb{E}_R$ jsou pak vlastní podprostory J a $\bar{J}$

$$J\cdot(\phi \oplus 0) = i(\phi \oplus 0) \qquad J\cdot(0 \oplus \psi) = -i(0 \oplus \psi) \qquad \phi \in \mathbb{E}_L \quad \psi \in \mathbb{E}_R$$

$$\bar{J}\cdot(\phi \oplus 0) = -i(\phi \oplus 0) \qquad \bar{J}\cdot(0 \oplus \psi) = i(0 \oplus \psi)$$

vztah $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ a $\mathbb{E}_L$ resp. $\mathbb{E}_R$

$\mathbb{E}_L$ a $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, J)$ isomorfní jako komplexní vekt. pr. $\mathbb{C}$-dim D $\quad \phi \leftrightarrow \Phi = \phi \oplus \bar{\phi}$

$\mathbb{E}_R$ a $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, \bar{J})$ isomorfní jako komplexní vekt. pr. $\mathbb{C}$-dim D $\quad \psi \leftrightarrow \Psi = \bar{\psi} \oplus \psi$

Hermitovská str. na $\mathbb{E}_L$ a $\mathbb{E}_R$ a metrická str. na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

hermitovské str. $h_{\bar{A}B}$ na $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$ umožňují definovat:

metrika H na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

$$(\phi \oplus \bar{\phi}) \cdot H \cdot (\psi \oplus \bar{\psi}) = \bar{\phi} \cdot h \cdot \psi + \phi \cdot \bar{h} \cdot \bar{\psi}$$

$\Downarrow$ H $\mathbb{R}$-bilineární

H symetrické $\quad H = H^T$

H kompatibilní s $J, \bar{J}$ $\quad J \cdot H \cdot J = H \quad \bar{J} \cdot H \cdot \bar{J} = H$

lze $\mathbb{C}$-lineárně rozšířit na $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = \mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R$

$$(\phi_L \oplus \phi_R) \cdot H \cdot (\psi_L + \psi_R) = \phi_R \cdot h \cdot \psi_L + \phi_L \cdot \bar{h} \cdot \psi_R$$

transpozice

na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ $\quad (\phi \oplus \bar{\phi})^T = \bar{\phi} \cdot h \oplus \phi \cdot \bar{h}$

na $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$ $\quad (\phi_L \oplus \phi_R)^T = \phi_R \cdot h \oplus \phi_L \cdot \bar{h}$

skalární součin na $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = \mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R$

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \Phi^* \cdot H \cdot \Psi =$$

$$= \bar{\phi}_L \cdot h \cdot \psi_L + \bar{\phi}_R \cdot \bar{h} \cdot \psi_R = \langle \phi_L, \psi_L \rangle_L + \langle \phi_R, \psi_R \rangle_R$$

$\Psi^\dagger = \Psi^{T*} = \Psi^{*T} \qquad (\psi_L \oplus \psi_R)^\dagger = \psi_L^\dagger \oplus \psi_R^\dagger$

skalární součin na $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, J)$ resp. $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, \bar{J})$

H a J definují symplektickou 2-formu Ω

$\Omega = J \cdot H \qquad \Omega^T = -\Omega \qquad J \cdot \Omega \cdot J = \Omega$

$(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, J)$ tvoří komplexní vekt. součin, kde násobení komplex. číslem je:

$(a+ib) * \Phi = a\Phi + b\, J \cdot \Phi \qquad a, b \in \mathbb{R} \quad \Phi \in \mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

skalární součin na $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, J)$

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_J = \frac{1}{2} \left(\Phi \cdot H \cdot \Psi + i\, \Phi \cdot \Omega \cdot \Psi \right)$$

J-(anti)linearita: $\langle J \cdot \Phi, \Psi \rangle_J = -i \langle \Phi, \Psi \rangle_J \qquad \langle \Phi, J \cdot \Psi \rangle_J = i \langle \Phi, \Psi \rangle_J$

hermiticita: $\langle \Phi, \Psi \rangle_J^* = \langle \Psi, \Phi \rangle_J$

$(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, J)$ je isomorfní s $\mathbb{E}_L$ jako Hilbertův prostor

$\langle \Phi, \Psi \rangle_J = \langle \phi, \psi \rangle_L \qquad$ kde $\Phi = \phi + \bar{\phi} \quad \Psi = \psi \oplus \bar{\psi} \quad \phi, \psi \in \mathbb{E}_L$

obdobně definujeme $\bar{\Omega} = \bar{J} \cdot H$, $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, \bar{J})$, $\langle \,, \rangle_{\bar{J}}$ jak platí

$(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, \bar{J})$ je isomorfní s $\mathbb{E}_R$ jako Hilbertův prostor

$\langle \Phi, \Psi \rangle_{\bar{J}} = \langle \phi, \psi \rangle_R \qquad$ kde $\Phi = \bar{\phi} \oplus \phi \quad \Psi = \bar{\psi} \oplus \psi \quad \phi, \psi \in \mathbb{E}_R$

Reprezentace kalibr. grupy a algebry na $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$ a $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

akce kalibrační grupy na $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$

$\phi \to \tilde{\phi} = U \cdot \phi$ na $\mathbb{E}_L$

$\psi \to \tilde{\psi} = \bar{U} \cdot \psi$ na $\mathbb{E}_R$

U unitární $\quad U \cdot U^{+} = \mathbb{1}$

indukuje akci kalibr. gr. na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

$\Phi \to \tilde{\Phi} = R \cdot \Phi = U \cdot \phi \oplus \bar{U} \cdot \bar{\phi}$ $\quad$ kde $\Phi = \phi \oplus \bar{\phi} \in \mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

R zachovává $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ $\quad R \cdot \Phi \in \mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ $\quad$ tj $\quad R^{*} = R$

R ortogonální vůči H $\quad$ tj $\quad R^{T} \cdot R = R \cdot R^{T} = \mathbb{1}$

ukrátku: $\quad H = h \oplus \bar{h} \quad H^{-1} = h^{-1} \oplus \bar{h}^{-1} \quad R = U \oplus \bar{U}$

$R^{T} = H^{-1} \cdot R \cdot H = (h^{-1} \oplus \bar{h}^{-1}) \cdot (U \oplus \bar{U}) \cdot (h \oplus \bar{h}) = \bar{h}^{-1} \cdot \bar{U} \cdot \bar{h} \oplus h^{-1} \cdot \bar{\bar{U}} \cdot h = U^{+} \oplus \bar{U}^{+} = U^{-1} \oplus \bar{U}^{-1} = R^{-1}$

akce kalibrační algebry na $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$

$U = \mathbb{1} + \alpha i u \qquad \delta\phi = i u \cdot \phi \qquad$ na $\mathbb{E}_L$

$\bar{U} = \mathbb{1} - \alpha i \bar{u} \qquad \delta\psi = -i \bar{u} \cdot \psi \qquad$ na $\mathbb{E}_R$

indukuje akci kalibr. algebry na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

$R = \mathbb{1} + \alpha r \qquad r = (iu) \oplus (-i\bar{u}) \qquad \delta\Phi = (iu \cdot \phi) \oplus (-i\bar{u} \cdot \bar{\phi}) = r \cdot \Phi$

r zachovává $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ $\quad r \cdot \Phi \in \mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ $\quad$ tj $\quad r^{*} = r$

r antisymetrická vůči H $\quad$ tj $\quad r^{T} = -r$

ukrátku: $\quad H = h \oplus \bar{h} \quad H^{-1} = h^{-1} \oplus \bar{h}^{-1} \quad r = (iu) \oplus (-i\bar{u})$

$r^{T} = H^{-1} \cdot r \cdot H = (h^{-1} \oplus \bar{h}^{-1}) \cdot (iu \oplus -i\bar{u}) \cdot (h \oplus \bar{h}) = -i \bar{h}^{-1} \cdot \bar{u} \cdot \bar{h} \oplus i h^{-1} \cdot \bar{\bar{u}} \cdot h = -(iu^{+} \oplus i\bar{u}^{+})$

$= -(iu \oplus -i\bar{u}) = -r$

Kovariantní derivace na bundlu s U-symetrií

Def: rozšíření kov. der. na komplexně sdružené bundly

kov. der. D na $\mathbb{E}_L M = \mathbb{E} M$ se rozšiřuje na $\mathbb{E}_R M = \bar{\mathbb{E}} M$ podmínkou

$$\bar{D}\bar{\phi} = \overline{D\phi} \qquad \phi \in \mathrm{Sect}\,\mathbb{E}M$$

společnou akci na $\mathbb{E}^{k_L k_R}_{l_L l_R} M$ budeme označovat D

můžeme psát

$$D = D_L \oplus D_R \qquad \text{kde } D_L \equiv D \text{ působí na } \mathbb{E}^{k_L}_{L l_L} M \text{ a } D_R = \bar{D} \text{ působí na } \mathbb{E}^{k_R}_{R l_R} M$$

v tomto smyslu $D = \bar{D}$

Pozn:

explicitně akci D na $\psi \in \mathbb{E}_R M$ můžeme napsat

$$D\psi \underset{\uparrow}{=} \bar{D}\psi = \overline{D\bar{\psi}}$$

pouze změna značení $D \to D \oplus \bar{D}$

Def: U-kov. derivace

mějme komplexní vekt. bundly $\mathbb{E}_L M$ a $\mathbb{E}_R M$ s hermit. str. $h_{\bar{A}B}$

kov. der. D na $\mathbb{E}^{k_L k_R}_{l_L l_R} M$ se nazývá konzistentní s hermitovskou strukturou, též U-kovariantní derivace, jestliže

$$D_m h_{\bar{A}B} = 0$$

což je ekvivalentní podmínce

$$\xi \cdot d\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_L = \langle D_\xi \phi_1, \phi_2 \rangle_L + \langle \phi_1, D_\xi \phi_2 \rangle_L \qquad \xi \cdot d\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_R = \langle D_\xi \psi_1, \psi_2 \rangle_R + \langle \psi_1, D_\xi \psi_2 \rangle_R$$

pro libovolné $\xi \in TM \quad \phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Sect}\,\mathbb{E}_L M \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Sect}\,\mathbb{E}_R M$

Lema:

nechť E_A resp $\bar{E}_A$ je trivializace konzist. s hermit. str. $h_{\bar{A}B}$

nechť ∂ je příslušná souřadnicová der., tj. $\partial E_A = 0 \quad \partial \bar{E}_A = 0$

pak ∂ je konzist. s hermit. str. h, tj. U-derivace

$$\partial_m h_{\bar{A}B} = 0$$

důkaz

$$h_{\bar{A}B} = h_{\bar{K}L} E^{\bar{K}}_{\bar{A}} E^{L}_{B} \qquad \partial E^{\bar{K}}_{\bar{A}} = 0 \quad \partial E^{L}_{B} = 0 \quad h_{\bar{K}L} = \text{konst} \Rightarrow \partial h_{\bar{A}B} = 0$$

Def Rozdílový tenzor a vektorový potenciál

nechť $D, \tilde{D}$ jsou kov. der. na $\mathbb{E}^{k_L k_R}_{l_L l_R} M$

jejich rozdíl

$$\mathbb{A} = D - \tilde{D}$$

je pseudoderivace působící na bundlech $\mathbb{E}^{k_L k_R}_{l_L l_R} M$ generovaná akcí

na $\mathbb{E}_L M$ $\quad \mathbb{A}_a \phi^M = D_a \phi^M - \tilde{D}_a \phi^M = i A_a{}^M{}_N \phi^N$ $\quad$ resp.

na $\mathbb{E}_R M$ $\quad \mathbb{A}_a \psi^{\bar{M}} = D_a \psi^{\bar{M}} - \tilde{D}_a \psi^{\bar{M}} = -i \bar{A}_a{}^{\bar{M}}{}_{\bar{N}} \psi^{\bar{N}}$

tenzor $A_a{}^M{}_N$ nazýváme rozdílový tenzor

je-li $\tilde{D} = \partial$ souřadnicová der. trivializace $\mathbb{E}_L M$, $\mathbb{E}_R M$
nazýváme $A_a{}^M{}_N$ vektorový potenciál vůči této trivializaci

Pozn: pozor na faktory "i" a "−i" v akci pseudoderivace
na komplexně sdružených prostorech $\mathbb{E}_L M$ a $\mathbb{E}_R M$
viz též akci kalibrační algebry na $\mathbb{E}_L M$ a $\mathbb{E}_R M$
význam těchto faktorů plyne z následující věty

Věta:

jsou-li $D, \tilde{D}$ U-kovariantní der., rozdílový tenzor je hermit.

$$A_a^{+}{}^M{}_N = A_a{}^M{}_N$$

konkrétně, vekt. potenciál U-kov. derivace vůči trivializaci
konzistentní s hermit. strukturou je hermitovský

důkaz:

$$\underbrace{D_a h_{\bar{M}N}}_{0} = \underbrace{\tilde{D}_a h_{\bar{M}N}}_{0} + i \bar{A}_a{}^{\bar{K}}{}_{\bar{M}} h_{\bar{K}N} - i A_a{}^K{}_N h_{\bar{M}K}$$

$$\Rightarrow \quad A_a{}^M{}_N = h^{-1\bar{K}M} \bar{A}_a{}^{\bar{L}}{}_{\bar{K}} h_{\bar{L}N} = A_a^{+}{}^M{}_N$$

Def: Tenzor křivosti

tenzor křivosti kov. der. D na komplex. vekt. bundlu definujeme s faktorem "i" resp. "−i" při akci na $\mathbb{E}_L M$ resp. $\mathbb{E}_R M$

$$i F_{ab} \cdot \phi = {}^D\!d_a {}^D\!d_b \phi = [D_a D_b - D_b D_a + T_{ab}^k D_k]\phi \quad \text{pro } \phi \in \mathcal{S}ect\, \mathbb{E}_L M$$

$$-i \bar{F}_{ab} \cdot \psi = {}^D\!d_a {}^D\!d_b \psi = [D_a D_b - D_b D_a + T_{ab}^k D_k]\psi \quad \text{pro } \psi \in \mathcal{S}ect\, \mathbb{E}_R M$$

na obecném tenzorovém bundlu je operátor křiv. pseudoderivace

$$\mathbb{F}_{ab} = {}^D\!d_a {}^D\!d_b = [D_a D_b - D_b D_a + T_{ab}^k D_k] \quad \text{na } \mathbb{E}^{k\ldots}_{l\ldots} M$$

generovaná akcí na $\mathbb{E}_L M$, $\mathbb{E}_R M$ výše

zde T_{ab}^k je torze rozšíření ∇ na tečný prostor $\mathbb{T}^* M$

tenzor křivosti na tomto rozšíření nezávisí

Věta

tenzor křivosti U-kov. derivace D je hermitovský

$$F_{ab}^{\dagger} = F_{ab}$$

důkaz:

$$Dh = 0 \quad \text{pro U-kov. derivaci} \Rightarrow DDh = 0 \Rightarrow [D_a D_b - D_b D_a + T_{ab}^k D_k] h = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \mathbb{F}_{ab} h_{\bar{A}B} = i \bar{F}_{ab}{}^{\bar{K}}{}_{\bar{A}} h_{\bar{K}B} - i F_{ab}{}^{K}{}_{B} h_{\bar{A}K}$$

$$\Rightarrow F_{ab}{}^{A}{}_{B} = h^{-1\bar{K}A} \bar{F}_{ab}{}^{\bar{L}}{}_{\bar{K}} h_{\bar{L}B} = F^{\dagger}_{ab}{}^{A}{}_{B}$$

Def: kalibrační transf. kov. der.

kalibr. transf. kov. der. na komplex. bundu je dána podmínkou

$$\tilde{D}\tilde{\Phi} = \widetilde{D\Phi}$$

Věta:

při akci unitární kalibrační transformace na U-kov. derivaci na komplexním vekt. bundlu se různé objekty transformují následovně

$$\tilde{D} = D + \Lambda \qquad \Lambda \text{ generováno } i\lambda = -(DU)\cdot U^{\dagger} \text{ na } E_L M$$

$$\tilde{A} = U\cdot A\cdot U^{\dagger} + i(\partial U)\cdot U^{\dagger} \qquad \text{kde } D = \partial + iA \text{ na } E_L M$$

$$= A + i(DU)\cdot U^{\dagger} = A + iU^{\dagger}\cdot(\tilde{D}U) \qquad \tilde{D} = \partial + i\tilde{A} \text{ na } E_L M$$

$$\tilde{F} = U\cdot F\cdot U^{\dagger}$$

srovnej s reálným případem s uvážením konvence

$$A \to iA \qquad F \to iF \qquad U^{-1} = U^{\dagger}$$

U(1) kalibrační symetrie a nabitá pole

Vektorové prostory s U(1) symetrií

$\mathbb{C} \equiv \mathbb{C}_L$ a $\bar{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{C}_R$ sdružené komplexní vekt. prostory $\mathbb{C}$-dim $= 1$

$\mathbb{C}^{k_L k_R}_{l_L l_R}$ příslušné tenzorové prostory – všechny $\mathbb{C}$-dim $= 1$

$h_{\bar{A}B}$ hermitovská struktura definující sk. součin na $\mathbb{C}$ a $\bar{\mathbb{C}}$

U(1) kalibrační transformace – transformace zachovávající skalární součin

jelikož jsou všechny prostory $\mathbb{C}^{k_L k_R}_{l_L l_R}$ $\mathbb{C}$-dim $= 1$, jsou isomorfní jako vektorové prostory
mohou se ale lišit akcí kalibrační transf. na nich
ztotožníme ty prostory, na nichž kalibr. transf. působí stejně
kanonické ztotožnění nemění akci kalibr. transf.

- stopa $\mathbb{C}^{k+1}_{l+1} \leftrightarrow \mathbb{C}^{k}_{l}$ resp. $\bar{\mathbb{C}}^{k+1}_{l+1} \leftrightarrow \bar{\mathbb{C}}^{k}_{l}$

  $\phi^{\dots A \dots}_{\dots B \dots} \to \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} = \phi^{\dots M \dots}_{\dots M \dots}$ inverze: $\tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} \to \phi^{\dots A \dots}_{\dots B \dots} = \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} \mathbb{1}^A_B$

  umožňuje "kanonizovat" objekty z $\mathbb{C}^k_l$ na $\mathbb{C}^{k-l}_0$ nebo $\mathbb{C}^0_{l-k}$

- hermit. forma $\mathbb{C}^{k+1\,l+1}_{p\,q} \leftrightarrow \mathbb{C}^{k\,l}_{p\,q}$ resp. $\mathbb{C}^{k\,l}_{p+1\,q+1} \leftrightarrow \mathbb{C}^{k\,l}_{p\,q}$

  $\phi^{\dots \bar{A} \dots B \dots}_{\dots} \to \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} = \phi^{\dots \bar{A} \dots B \dots}_{\dots} h_{\bar{A}B}$ inverze $\tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} \to \phi^{\dots \bar{A} \dots B \dots}_{\dots} = \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} h^{-1\bar{A}B}$

  $\phi_{\dots \bar{A} \dots B \dots} \to \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} = \phi_{\dots \bar{A} \dots B \dots} h^{-1\bar{A}B}$ inverze $\tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} \to \phi_{\dots \bar{A} \dots B \dots} = \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} h_{\bar{A}B}$

  umožňuje "kanonizovat" objekty z $\mathbb{C}^{k\,l}_{p\,q}$ na $\mathbb{C}^{k-l\,0}_{p\,q}$ nebo $\mathbb{C}^{0\,l-k}_{p\,q}$
  případně z $\mathbb{C}^{k\,l}_{p\,q}$ na $\mathbb{C}^{k\,l}_{p-q\,0}$ nebo $\mathbb{C}^{k\,l}_{0\,q-p}$

- transpozice $\mathbb{C}^{k+1\,l}_{p\,q} \leftrightarrow \mathbb{C}^{k\,l}_{p\,q+1}$ resp. $\mathbb{C}^{k\,l+1}_{p\,q} \leftrightarrow \mathbb{C}^{k\,l}_{p+1\,q}$

  $\phi^{\dots A \dots}_{\dots} \to \tilde{\phi}_{\dots \bar{B} \dots} = \phi^{\dots A \dots}_{\dots} h_{A\bar{B}}$ inverze $\tilde{\phi}^{\dots}_{\dots \bar{B} \dots} \to \phi^{\dots A \dots}_{\dots} = h^{-1A\bar{B}} \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots \bar{B} \dots}$

  $\phi^{\dots \bar{A} \dots}_{\dots} \to \tilde{\phi}_{\dots B \dots} = \phi^{\dots \bar{A} \dots}_{\dots} h_{\bar{A}B}$ inverze $\tilde{\phi}^{\dots}_{\dots B \dots} \to \phi^{\dots \bar{A} \dots}_{\dots} = h^{-1\bar{A}B} \phi^{\dots}_{\dots B \dots}$

  umožňuje "kanonizovat" objekty z $\mathbb{C}^{k\,l}_{p\,q}$ na $\mathbb{C}^{k+q\,\,l+p}_{0\,\,0}$

kombinace dvou těchto transf. je ekvivalentní třetí kombinací těchto operací lze vždy nalézt "kanonický" izomorfní prostor následujícího typu

$$\mathbb{C}^{k\,l}_{p\,q} \longrightarrow \begin{cases} \mathbb{C}^{m\,0}_{0\,0} & \mathbb{C}^{m} \\ \mathbb{C}^{0\,0}_{0\,0} = \mathbb{C} \quad \text{budeme značit} & \mathbb{C}^{0} \\ \mathbb{C}^{0\,m}_{0\,0} & \mathbb{C}^{-m} \end{cases} \qquad \text{kde } m \in \mathbb{N}$$

budeme říkat že prostor $\mathbb{C}^n$ odpovídá náboji n

lze lehce ověřit, že tenz. násobení indukuje operaci

násobení $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n+m}$ $\qquad \phi \in \mathbb{C}^n \;\; \psi \in \mathbb{C}^m \Rightarrow \phi\psi \in \mathbb{C}^{n+m}$

operace sdružení převrací náboj

$\bar{\ } : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{-n}$ $\qquad \phi \in \mathbb{C}^n \Rightarrow \bar{\phi} \in \mathbb{C}^{-n}$

skalární součin dává číslo, tj. objedlek náboje 0

$\langle \phi, \psi \rangle = \bar{\phi}\psi \in \mathbb{C}^0$ $\qquad \phi, \psi \in \mathbb{C}^n$

lze definovat celočíselné mocniny

p-tá mocnina: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{pn}$ $\qquad \phi \in \mathbb{C}^n \Rightarrow \phi^p \in \mathbb{C}^{pn}$

U(1) kalibrační transformace na $\mathbb{C}$

$U^A{}_B \in \mathbb{C}^{1\,0}_{1\,0}$ $\qquad$ zachovávající skal. součin

$\Downarrow$

$U \in \mathbb{C}^0 = \mathbb{C}$ $\qquad \bar{U}U = 1$

$\Downarrow$

$U = \exp(iu)$ $\qquad u \in \mathbb{R}$

akce kalibr. symetrie na $\mathbb{C}^n$

na $\mathbb{C}^{kl}_{pq}$ kalibr. sym. působí $\underbrace{U\cdots}_{k}\underbrace{\bar{U}\cdots}_{l}\underbrace{U^{-1}\cdots}_{p}\underbrace{\bar{U}^{-1}}_{q}\phi$

$\Downarrow$

na $\mathbb{C}^n$ kalibr. sym. působí $U^n\phi$ tj.

$$\phi \in \mathbb{C}^n \;\longrightarrow\; \tilde{\phi} = U^n\phi = \exp(inu)\,\phi$$

volba báze

$E \in \mathbb{C}^1$ $\qquad \bar{E}E = 1$

$\phi \in \mathbb{C}^1 \Rightarrow \phi = \varphi E$ $\qquad \varphi \in \mathbb{C}$

$\psi \in \mathbb{C}^n \Rightarrow \psi = \psi E^n$ $\qquad \psi \in \mathbb{C}$

Nabitá pole a derivace na nich

$\mathbb{C}^m M$ vektorové bundly se standardními fibry $\mathbb{C}^n$ $n \in \mathbb{Z}$

$\phi \in \mathrm{Sect}\,\mathbb{C}^m M$ nazýváme nabité pole náboje m

na $\mathbb{C}^m M$ jsou definovány všechny struktury z $\mathbb{C}^m$ tj.

pro $\phi \in \mathrm{Sect}\,\mathbb{C}^m M$ $\psi \in \mathrm{Sect}\,\mathbb{C}^n M$

- násobení $\phi\psi \in \mathrm{Sect}\,\mathbb{C}^{m+n} M$
- mocnina $\phi^p \in \mathrm{Sect}\,\mathbb{C}^{pm} M$
- nábojové sdružení $\bar\phi \in \mathrm{Sect}\,\mathbb{C}^{-m} M$
- fibrový sk. součin $\langle\phi,\psi\rangle = \bar\phi\psi \in \mathfrak{F}M$ pro $m=n$

lokální kalibrační grupa

kalibrační transf. je dána komplexní fází v každém bodě M

$$U(x) = \exp(i\,u(x)) \qquad u \in \mathfrak{F}M \text{ (reálné)}$$

akce kalibrační grupy na $\mathbb{C}^n M$

$$\phi \in \mathrm{Sect}\,\mathbb{C}^n M \quad\longrightarrow\quad \tilde\phi = U^n\phi$$

$U(1)$ kovariantní derivace na $\mathbb{C}^n M$

D kov. der. na vekt. bundlech $\mathbb{C}^n M$ splňující

$$D(\phi\psi) = (D\phi)\psi + \phi(D\psi)$$

$$D\bar\phi = \overline{D\phi} \qquad \text{tj. } D = \bar D$$

derivace na $\mathbb{C}^m M$

derivace na $\mathbb{C}^{-m} M$

zajišťuje konzistenci s hermitovskou strukturou

$$d(\bar\phi\psi) = (\overline{D\phi})\psi + \bar\phi(D\psi) \qquad \phi,\psi \in \mathrm{Sect}\,\mathbb{C}^m M$$

$$\Updownarrow$$

$$d\langle\phi,\psi\rangle = \langle D\phi,\psi\rangle + \langle\phi,D\psi\rangle$$

trivializace na $\mathbb{C}^n M$

E jednotková báze v $\mathrm{Sect}\,\mathbb{C}^1 M$ $\qquad \bar E E = 1$

E^n báze pro nabité pole náboje n, tj. v $\mathrm{Sect}\,\mathbb{C}^n M$

$$\phi = \varphi E^n \qquad \varphi \text{ komplexní fce na } M$$

rozdíl dvou kov. derivací

$D, \tilde{D}$ kov. der. na $\mathbb{C}^n M$

$D_{\underline{m}} - \tilde{D}_{\underline{m}} = \mathbb{A}_{\underline{m}}$ pseudoderivace indukovaná rozdílový tenzorem $i A_{\underline{m}}$

$D_{\underline{m}} \phi - \tilde{D}_{\underline{m}} \phi = i A_{\underline{m}} \phi$ pro $\phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^1 M$

$\Downarrow$

$D_{\underline{m}} \Psi - \tilde{D}_{\underline{m}} \Psi = \mathbb{A}_{\underline{m}} \Psi = i m A_{\underline{m}} \Psi$ pro $\Psi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^n M$

$A_{\underline{m}} \in TM$ rozdílový tenzor je nenabitý!
vskutku, měl by být $A_{\underline{m}}{}^{\underline{k}}{}_{\underline{l}}$ což je pole náboje 0

$A_{\underline{m}}^* = A_{\underline{m}}$ rozdílový tenzor je reálný (hermit. v dim = 1)
to je důvod pro volbu prefaktoru "i"

často se z rozdílového tenzoru vyjme ještě konstantní prefaktor e charakterizující velikost elementárního náboje

$D\phi - \tilde{D}\phi = ieA$

vektorový potenciál

E trivializace a ∂ souř. derivace $\partial E = 0$

kov. der. D na $\mathbb{C}^n M$ je dána vekt. potenciálem $A_{\underline{a}}$ vůči ∂

$D_{\underline{a}} \phi = \partial_{\underline{a}} \phi + i m A_{\underline{a}} \phi$ pro $\phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^n M$

tenzor křivosti

D kov. der. na $\mathbb{C}^n M$ rozšířená na TM pomocí ∇ s torzí T

operátor křivosti $\mathbb{F}_{\underline{ab}}$

$\mathbb{F}_{\underline{ab}} = {}^D d_{\underline{a}} {}^D d_{\underline{b}} = [D_{\underline{a}} D_{\underline{b}} - D_{\underline{b}} D_{\underline{a}} + T_{\underline{ab}}^{\underline{c}} D_{\underline{c}}]$

je pseudoderivace generovaná tenzorem křivosti $F_{\underline{ab}}$

$\mathbb{F}_{\underline{ab}} \phi = i m F_{\underline{ab}} \phi$ pro $\phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^n M$

$F_{\underline{ab}} \in A^2 M$ je nenabitý (náboj 0) reálný (hermit. v dim = 1)

pro $D = \partial + A_{\underline{a}}$ dané vekt. potenciálem $A_{\underline{a}}$ vůči ∂ máme

$$F_{\underline{mn}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nenabité} \\ {}^\partial d = d}}{{}^\partial d_{\underline{m}} A_{\underline{n}}} + i \underbrace{[A_{\underline{m}}, A_{\underline{n}}]}_{\substack{0 \\ \text{plyne z } \dim \mathbb{C} = 1}} = d_{\underline{m}} A_{\underline{n}}$$

kalibrační transformace kov. derivace

$\phi \to \tilde{\phi} = U^m \phi \qquad \phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^n M \qquad U = \exp(iu)$

$D_a \to \tilde{D}_a = D_a + \Lambda_a \qquad \Lambda_a$ generováno $i\Lambda_a$

$\tilde{D}$ je dáno podmínkou

$\widetilde{D\phi} = \tilde{D}\tilde{\phi} \underset{\text{obecná teorie}}{\Longrightarrow} i\Lambda = -(DU)\cdot U^{-1} = -i\,du$

$\Downarrow$

$\tilde{D}\phi = D\phi - im\,du\,\phi \qquad \phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^n M$

transformace vekt. potenciálu vůči fixní ∂

$A \to \tilde{A} = U\cdot A\cdot U^{-1} + i(\partial U)\cdot U^{-1}$ (obecná teorie)

$= A - du$

transformace tenzoru křivosti

$F \to \tilde{F} = U\cdot F\cdot U^{-1}$ (obecná teorie)

$= F$

vskutku, A, F, U jsou náboje 0, tj. čísla, které komutují

Elektromagnetické pole jako kalibrační pole

M prostoročas s metrikou g_{ab} a Levi-Civitovou der. ∇_a

$\mathbb{C}^m M$ bundly nabitých polí náboje $m \in \mathbb{Z}$

$\phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^m M$ nabité pole

D_a kov. derivace na $\mathbb{C}^m M$ = kalibrační pole

D lze použít pro popis elektromagnetického pole

A_a vekt. potenciál D vůči trivializaci ∂

A_a je 4-potenciál EM pole

F_{ab} tenzor křivosti = Maxwellův tenzor EM pole

$$F_{ab} = d_a A_b$$

působení D na $\phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^m M$

$$D_a \phi = \partial_a \phi + i m A_a \phi$$

kalibrační transformace

$$\phi \to \tilde{\phi} = \exp(imu)\, \phi$$

$$D \to \tilde{D} = D - im\, du \qquad \text{při působení na } \mathbb{C}^m M$$

$$A_a \to \tilde{A}_a = A_a - d_a u$$

$$F_{ab} \to \tilde{F}_{ab} = F_{ab}$$

pohybové rovnice

$$F_{ab} = d_a A_b \quad \Leftrightarrow \quad d_a F_{bc} = 0$$

$$\nabla_m F^{am} = J^a$$

$$g^{mn} D_m D_n \phi - M^2 \phi = 0$$

$$J_a = im\left(\bar{\phi} D_a \phi - \phi D_a \bar{\phi}\right) \qquad \phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^m M$$

Opakování z Lieových algeber

G poloprostá Lieova grupa $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ poloprostá Lieova algebra

$\mathfrak{g}$ poloprostá $\Rightarrow$

ad věrná repr. $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}$

k nedegenerovaná metrika na $\mathfrak{g}$

$\mathrm{Der}\,\mathfrak{g} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$

$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \longrightarrow$ algebra operátorů tvaru ad_m $m \in \mathfrak{g}$

$\mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \longrightarrow$ algebra operátorů δ splňujících

$$\delta[m,n] = [\delta m, n] + [m, \delta n]$$

vždy platí $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \subset \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ ($\Leftarrow$ Jacobiho identita)

pro poloprostou $\mathfrak{g}$ $\delta \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \Rightarrow \exists\, m \in \mathfrak{g}$ $\delta = \mathrm{ad}_m$

T reprezentace grupy G na vekt. prostoru A tj. $h \in G \to T_h \in A^1_1$

t odpovídající repr. alg. $\mathfrak{g}$ na vekt. prostoru A tj. $m \in \mathfrak{g} \to t_m \in A^1_1$

$\mathfrak{g}$ poloprostá, A konečně dimenzionální $\Rightarrow$

t je plně reducibilní reprezentace, tj.

$$A = \bigoplus_{\varkappa=0}^{k} A_\varkappa \qquad P_\varkappa \text{ projektor na } A_\varkappa$$

$$t = \bigoplus_{\varkappa=0}^{k} t_\varkappa \qquad t_\varkappa = P_\varkappa \cdot t \cdot P_\varkappa \text{ zúžení } t \text{ na } A_\varkappa$$

kde $t_0 = 0$ triviální

$\varkappa > 0$ $t_\varkappa$ ireducibilní

Schurovo lemma

$$\forall m \in \mathfrak{g} \quad [S, t_m] = 0 \quad \Rightarrow \quad S = S_0 + \sum_{\varkappa=1}^{k} s_\varkappa P_\varkappa \qquad S_\varkappa = P_\varkappa S P_\varkappa$$

tj. na každé ireducib. komponentě $A_\varkappa$ je S úměrné jednotce $P_\varkappa$ na $A_\varkappa$

na A_0 je S neurčené

Vše lze přímočaře zmodifikovat pro reduktovatelnou alg. $\mathfrak{g}$

tj. pro algebru splňující

$A = Z \oplus S$ Z centrum A S poloprostá

Lokální kalibrační grupa a algebra

Def: Lokální kalibrační grupa a algebra

Nechť G je Lieova grupa a $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra

nechť M je podkladová varieta

GM je grupový bundle ~~se~~ se standardní fibrou G
s grupovou strukturou indukovanou z G

$\mathfrak{g}M$ je vektorový bundl se standardní fibrou $\mathfrak{g}$
se strukturou Lieovy algebry indukovanou z $\mathfrak{g}$,
realizovaný jako $\mathfrak{g}_x M = T_e G_x M$ (tečný pr. $G_x M$ v e)

tj. máme Lieovy záv. a strukturní tenzor

$$[m, n]^\alpha = m^\mu n^\nu c_{\mu\nu}{}^\alpha \qquad m, n \in \mathfrak{g}M \quad c \in \mathfrak{g}^1_{[2]}M$$

a Killingovu metriku

$$k_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} c_{\alpha\mu}{}^\nu c_{\beta\nu}{}^\mu$$

Lokální kalibrační grupa je prostor řezů GM
$\mathrm{Sect}\, GM$ tj. $h(x) \in G_x M \quad \forall x \in M$

Lokální kalibrační algebra je prostor řezů $\mathfrak{g}M$
$\mathrm{Sect}\, \mathfrak{g}M$ tj. $m^\alpha(x) \in \mathfrak{g}_x M \quad \forall x \in M$

Věta

nechť G je poloprostá Lieova gr., $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra
a GM, $\mathfrak{g}M$ příslušné fibrované bundly nad M

$\Downarrow$

adjoint reprezentace Ad je věrná ultralokální reprezentace GM na $\mathfrak{g}M$

$$Ad_h : \mathfrak{g}M \to \mathfrak{g}M \qquad \text{tj.} \quad Ad_h \in \mathrm{Sect}\, \mathfrak{g}^1_1 M \quad \text{pro } h \in \mathrm{Sect}\, GM$$

$$Ad_{h_1 h_2} = Ad_{h_1} Ad_{h_2} \qquad Ad_{h^{-1}} = Ad_h^{-1}$$

strukturní tenzor je invariantní vůči Ad_h tj.

$$Ad_h [m, n] = [Ad_h m, Ad_h n] \quad \Leftrightarrow \quad Ad_h c = c$$

Věta

nechť G je polojednoduchá Lieova gr., g její Lieova algebra a GM, gM příslušné fibrované bundly nad M

$\Downarrow$ adjoint reprezentace ad je věrná ultralokální reprezentace gM na gM

$$ad_m : gM \to gM \quad \text{tj } ad_m \in \mathrm{Sect}\, g^1_1 M \quad \text{pro } m \in \mathrm{Sect}\, gM$$

kde

$$ad_m{}^\varepsilon{}_\gamma = m^\alpha c_{\alpha\gamma}{}^\varepsilon \quad \text{tj} \quad ad_m n = [m, n]$$

a platí

$$ad_m [n_1, n_2] = [ad_m n_1, n_2] + [n_1, ad_m n_2]$$

(plyne z Jacobiho identity, ekvivalentní $ad_m c = 0$)

z polojednoduchosti plyne, že každá lineární ultralokální operace δ splňující Leibnizovo pravidlo

$$\delta [n_1, n_2] = [\delta n_1, n_2] + [n_1, \delta n_2]$$

musí být tvaru

$$\delta = ad_m \quad \text{pro nějaké } m \in \mathrm{Sect}\, gM$$

Def: Trivializace kompatibilní s kalibrační algebrou

nechť GM a gM jsou bundly kalibrační grupy a algebry

Trivializace gM kompatibilní s kalibrační algebrou je volba báze l_α v gM taková, že

$$c_{\alpha\beta}{}^\gamma = \text{konst} \quad (\text{na } M)$$

kde $c_{\alpha\beta}{}^\gamma$ jsou komponenty strukt. tenzoru v této bázi

$$[l_\alpha, l_\beta] = c_{\alpha\beta}{}^\gamma l_\gamma$$

Zřejmě též platí

$$k_{\alpha\beta} = \text{konst}.$$

Pozn.:

Konstantnost $c_{\alpha\beta}{}^\gamma$ je míněna na podkladové varietě M ta lze samozřejmě též levoinvariantně rozšířit na $G_x M$ a pak budou komponenty strukt. tenz. konstantní i na $G_x M$

Kovariantní derivace na kalibrační algebře

Def: kov. der. konzistentní se strukturou kalibr. algebry
nechť gM je vektorový bundl kalibrační algebry
kovariantní der. D je konzistentní se strukt. kalibr. algebry pokud

$$Dc = 0$$

což je ekvivalentní podmínce

$$D[m,n] = [Dm, n] + [m, Dn]$$

(s užitím $[m,n]^\alpha = m^\mu n^\nu c_{\mu\nu}{}^\alpha$)

Lemma

D je konzistentní se strukt. kalibr. algebry
$\Downarrow$
$Dk = 0$

Důk: plyne z $k_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} c_{\alpha\mu}{}^\nu c_{\beta\nu}{}^\mu$ a $D_{\underline{m}} c_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$

Lemma

l_α je trivializace na kalibr. algebře gM a
∂ je příslušná souř. derivace $\partial l_\alpha = 0$
$\Downarrow$
∂ je konzistentní se strukt. kalibr. algebry

$$\partial_{\underline{m}} c_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0 \qquad \partial_{\underline{m}} k_{\alpha\beta} = 0$$

Důk:

plyne z $c_{\alpha\beta}{}^\gamma = c_{\mu\nu}{}^\rho\, l^\mu_\alpha\, l^\nu_\beta\, l^\gamma_\rho$ a

$\partial_{\underline{m}} l^\alpha_\rho = 0$ $\partial_{\underline{m}} l^\rho_\alpha = 0$ $c_{\mu\nu}{}^\rho = \text{konst.}$ kde l^μ_α je duální k l^α_μ

Věta Rozdíl kov. der. na $\mathfrak{g}M$

nechť D, $\hat{D}$ jsou kov. derivace konzist. s kal. algebrou

$\Rightarrow$ rozdílový tenzor $A_{\underline{m}}{}^{k}{}_{\lambda}$ generující pseudoderivaci

$$\mathbb{A}_{\underline{m}} = D_{\underline{m}} - \hat{D}_{\underline{m}}$$

splňuje

$$A_{\underline{a}} \cdot [m, n] = [A_{\underline{a}} \cdot m, n] + [m, A_{\underline{a}} \cdot n]$$

(kde vynecháváme indexy na $\mathfrak{g}M$)

pro poloprostou algebru $\mathfrak{g}$ existuje $\mathcal{R}_{\underline{a}}^{k} \in \operatorname{Sect} \mathfrak{g} \otimes T^*M$ tak

$$A_{\underline{a}}{}^{k}{}_{\lambda} = \operatorname{ad}_{\mathcal{R}_{\underline{a}}}{}^{k}{}_{\lambda} = \mathcal{R}_{\underline{a}}^{k} \, c_{k\lambda}{}^{k}$$

Důk:

D i $\hat{D}$ splňují Leibniz. pravidlo, tj. i $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A}_{\underline{a}} [m, n] = [\mathbb{A} m, n] + [m, \mathbb{A} n]$$

akce pseudoderivace $\mathbb{A}_{\underline{a}}$ na $\mathfrak{g}M$ je pomocí $A_{\underline{a}}$ $\quad \mathbb{A}_{\underline{a}} m = A_{\underline{a}} \cdot m$

pro poloprostou alg. máme $\operatorname{Der} \mathfrak{g} = \operatorname{ad} \mathfrak{g}$

Věta

nechť ∂ je souř. derivace trivializace kalibr. algebry a $A_{\underline{a}}{}^{k}{}_{\lambda}$ je kalibr. potenciál vygenerovaný z $\mathcal{R}_{\underline{a}}^{m} \in \operatorname{Sect} \mathfrak{g} \otimes T^*M$

$$A_{\underline{a}}{}^{k}{}_{\lambda} = \mathcal{R}_{\underline{a}}^{k} \, c_{k\lambda}{}^{k} \qquad \text{tj.} \quad A = \operatorname{ad}_{\mathcal{R}}$$

pak kov. derivace

$$D = \partial + \mathbb{A}$$

je konzistentní se strukturou kalibr. algebry

Důk:

∂ i $\mathbb{A}$ splňují Leibniz. pravidlo, tedy i D

Akce $\mathcal{D}$ na gM lze jak psát

$B^k \in \mathcal{S}ect\, gM$

$\mathcal{D}_a B^k = \partial_a B^k + [\mathcal{A}_a, B]^k$ ← Lieova závorka

$B^\mu{}_\nu \in \mathcal{S}ect\, g^1_1 M \qquad B^\mu{}_\nu = B^k c_{k\nu}{}^\mu \quad$ tj. $B = ad_B$

$\mathcal{D}_a B^\mu{}_\nu = \partial_a B^\mu{}_\nu + \underset{\text{komutátor}}{[A_a, B]^\mu{}_\nu} = \underset{\text{Lieova závorka}}{(\partial_a B^k + [\mathcal{A}_a, B]^k)}\, c_{k\nu}{}^\mu$

Věta: Tenzor křivosti na kalibrační algebře

$\mathcal{D}_a$ kov. der. konzistentní s kalibr. algebrou

$F_{ab}{}^\mu{}_\nu$ tenzor křivosti $\mathcal{D}_a$

platí

$\mathbb{F}_{ab}\, c = 0 \qquad$ tj. $\qquad F_{ab}\cdot[m,n] = [F_{ab}\cdot m, n] + [m, F_{ab}\cdot n]$

pro poloprostou algebru g existuje $\mathcal{F}_{ab}^k$ takové, že

$F_{ab}{}^\mu{}_\nu = \mathcal{F}_{ab}^k\, c_{k\nu}{}^\mu \qquad$ tj. $\qquad F = ad_{\mathcal{F}}$

Důk.

$\mathcal{D}c = 0 \Rightarrow \mathcal{D}\mathcal{D}c = 0 \Rightarrow \mathbb{F}c = 0 \Rightarrow F_{ab}{}^k{}_\lambda c_{\mu\nu}{}^\lambda - F_{ab}{}^\lambda{}_\mu c_{\lambda\nu}{}^k - F_{ab}{}^\lambda{}_\nu c_{\mu\lambda}{}^k = 0$

$\Rightarrow F\cdot[m,n] = [F\cdot m, n] + [m, F\cdot n] \qquad$ díky $[m,n]^k = m^\mu n^\nu c_{\mu\nu}{}^k$

Příklady akce operátoru křivosti:

$\mathbb{F}_{ab} B^k = F_{ab}{}^k{}_\lambda B^\lambda = [\mathcal{F}_{ab}, B]^k \qquad\qquad B^\mu{}_\nu = B^k c_{k\nu}{}^\mu$

$\mathbb{F}_{ab} B^\mu{}_\nu = [F_{ab}, B]^\mu{}_\nu = [\mathcal{F}, B]^k c_{k\nu}{}^\mu$

Věta:

D kov. der. na gM daná potenciálem $A = \mathrm{ad}_{\mathfrak{A}}$ vůči trivializaci ∂ a $F = \mathrm{ad}_{\mathfrak{F}}$ je tenzor křivosti D
vše konzistentní se strukt. kalibrační algebry

$\Downarrow$

$$F_{ab}{}^{\kappa}{}_{\lambda} = \partial_a A_b{}^{\kappa}{}_{\lambda} + [A_a, A_b]^{\kappa}{}_{\lambda} = \partial_a \wedge A_b{}^{\kappa}{}_{\lambda} + [A_a, A_b]^{\kappa}{}_{\lambda}$$

$$\mathfrak{F}_{ab}{}^{\kappa} = \partial_a \mathfrak{A}_b{}^{\kappa} + [\mathfrak{A}_a, \mathfrak{A}_b]^{\kappa} = \partial_a \wedge \mathfrak{A}_b{}^{\kappa} + [\mathfrak{A}_a, \mathfrak{A}_b]^{\kappa}$$

kde v druhých výrazech jsme rozšířili ∂ na T^*M pomocí derivace bez torze (např. Levi-Civit. der. ∇)

Důk:

první řádek je obecná formule pro tenzor křivosti na vekt. bundlu

druhý řádek plyne z

$$F_{ab}{}^{\mu}{}_{\nu} = \mathfrak{F}_{ab}{}^{\kappa} c_{\kappa\nu}{}^{\mu} \qquad A_a{}^{\mu}{}_{\nu} = \mathfrak{A}_a{}^{\kappa} c_{\kappa\nu}{}^{\mu}$$

$\partial_a c_{\mu\nu}{}^{\kappa} = 0$ a Jacobiho identita $\Rightarrow [\mathrm{ad}_{\mathfrak{X}}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{Y}}] = \mathrm{ad}_{[\mathfrak{X},\mathfrak{Y}]}$

Asociované vektorové bundly

Def:

Nechť G je Lieova grupa, g její Lieova algebra, A vektorový prostor, T reprezentace G na A a t reprez. g na A.

AM je vekt. bundl asociovaný s grupový bundlem GM a bundlem gM pokud se lokálně přenášejí struktury mezi standardními fibry G, g, A

[ve smyslu nekanonického isomorfismu

$GU \cong G \times U \quad gU \cong g \times U \quad AU \cong A \times U \quad U \subset M$]

To znamená, že existuje zobrazení

$h \in \mathrm{Sect}\, GM \rightarrow T_h \in \mathrm{Sect}\, A^1_1 M$ splňující

$T_{h_1 h_2} = T_{h_1} \cdot T_{h_2} \qquad T_{h^{-1}} = T_h^{-1} \qquad T_e = 1$

$m \in \mathrm{Sect}\, gM \rightarrow t_m \in \mathrm{Sect}\, A^1_1 M \qquad t_m{}^A{}_B = m^\Gamma t_\Gamma{}^A{}_B$

$t_{[m_1, m_2]} = [t_{m_1}, t_{m_2}] \qquad t_m = \frac{d}{d\varepsilon} T_{h_\varepsilon}$ kde $m = \frac{D h_\varepsilon}{d\varepsilon}$

T nazýváme akce kalibrační grupy na AM

t nazýváme akce kalibrační algebry na AM

$t_\Gamma{}^A{}_B$ jsou generátory reprezentace na AM

Def

Akce T, resp. t na AM je konzistentní s metrickou strukturou H_{AB} na AM pokud

$T_h{}^M{}_A T_h{}^N{}_B H_{MN} = H_{AB} \qquad t_F^\dagger = - t_F$

Pozn:

Podobně zavedeme asociaci komplexních vekt. bundlů a konzistenci reprezentací s hermitovskou strukturou případně jinou strukt. jako např. orientace

Def: Trivializace na asociovaném bundlu

Nechť AM je vekt. bundl asociovaný s bundly GM, gM

Trivializace l_α na gM a E_A na AM jsou konzistentní s asociací pokud

$C_{\mu\nu}{}^{\kappa} = konst$ - konzistence s lieovskou str. gM

$t_\mu{}^A{}_B = konst$ - konzistence s asociací AM s gM

v případě reprezentace konzist. s dodatečnou strukturou, požadujeme obdobně konzistenci trivializace

např. pro reprezentaci konzist. s metrikou H požadujeme též

$H_{AB} = konst$ - konzistence s metrikou na AM

Všechny komponenty jsou vzhledem k bázi trivializace

Konstant-ost je myšlena podél podkladové variety M

Lema: jednoznačnost trivializace na asociovaném bundlu

Nechť AM je vekt. bundl asociovaný s bundly GM, gM
nechť G a g jsou poloprosté
t je ireducibilní reprezentace konzistentní s metrikou H
Nechť e_α a E_A jsou trivializace konzistentní s asociací s lieovskou strukturou a s metrikou
Pak volba báze e_α a konkrétních konst. koeficientů $t_\Gamma{}^A{}_B$ a H_{AB} určuje volbu báze E_A jednoznačně až na triviální volnost $E_A \to -E_A$

Důk:
nechť E_A, $\tilde{E}_A$ jsou dvě báze na AM splňující všechny podmínky výše
pak musí
$$\tilde{E}_A = E_B \Lambda^B{}_A \qquad \text{kde } \Lambda^B{}_A \text{ je ortonormální}$$
$$\Lambda_M{}^A \Lambda^M{}_B = \mathbb{1}^A_B \qquad \text{kde } \Lambda_B{}^A = H_{BN} \Lambda^N{}_M H^{MA}$$
(plyne z konzistence s metrikou)
Z konzistence s asociací plyne
$$t_K{}^A{}_B = t_M{}^{\tilde{A}}{}_{\tilde{B}} \Rightarrow t_K{}^A{}_B = \Lambda^A{}_M t_K{}^M{}_N \Lambda^{-1N}{}_B \Rightarrow [t_\Gamma, \Lambda]^A{}_B = 0$$
Z ireducibility a Schurova lemma plyne
$$\Lambda^A{}_B = \lambda \mathbb{1}^A_B$$
Ortonormalita Λ dává
$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \qquad \Lambda = \pm \mathbb{1}$$

Poznámka:
pro věrnou reprezentaci poloprosté alg. na vekt. pr. máme plnou reducibilitu. Tj. reprezentační prostor se rozpadá na součet ireducibilních komponent.
V obecném případě tak máme volnost v trivializaci na AM danou volbou znaménka na každé ireducibilní komponentě.

Indukovaná kovariantní derivace na asociovaném bundlu

Def: Derivace na asociovaném bundlu

Nechť AM je vekt. bundl asociovaný s bundly GM, gM:

$\mathcal{D}$ je derivace na gM a D je derivace na AM

$\mathcal{D}$ a D jsou konzistentní s asociací, pokud platí

$\mathcal{D}_{\underline{m}} c_{\underline{\mu\nu}}{}^{\underline{\kappa}} = 0$ (též $\mathcal{D}_{\underline{m}} k_{\underline{\mu\nu}} = 0$) – $\mathcal{D}$ konz. s gM

$D_{\underline{m}} H_{\underline{AB}} = 0$ – D konz s metr. na AM

$D_{\underline{m}} t_{\underline{F}}{}^{\underline{A}}{}_{\underline{B}} = 0$ – konzistence s asociací

Poslední podmínka je $D = \mathcal{D} \oplus D$ rozšířená derivace na bundl $g \otimes A\, M$

Pozn:

Podobně def. lze zformulovat i pro jiné struktury na AM, např. hermitovskou strukt. $h_{\bar{A}A}$ či orientaci $\varepsilon_{A_1 A_2 \ldots}$

Lema: Jednoznačnost souřadnicové derivace

Nechť AM je vekt. bundle asociovaný s bundly GM, gM
t věrné reprezentace
e_α a E_A trivializace na gM a AM konzist. s asociací

Pak souřadnicové derivace ∂ na AM je dána jednoznačně

Důk:
podle věty a poznámky dříve je báze E_A dána jednoznačně až na volbu znamének na každé ireducibilní kompon.
(Věrné konečnědimenz. reprezentace poloprosté algebry je plně reducibilní bez triviální komponenty. Pro každou ireduc. komponentu máme volnost ve volbě báze pouze znaménko.)
Souřadnicová derivace ∂ na AM je dána podmínkou
$$\partial E_A = 0$$
Ta identifikuje stejnou derivaci ∂ nezávisle na volbě (konstantního) znaménka.

Lema: Konzistence souřadnicové derivace s asociací

Nechť AM je vekt. bundl asociovaný s bundly GM, gM
e_α, E_A trivializace na gM a AM konzistentní s asociací

Souřadnicové derivace ∂ na gM a ∂ na AM dané trivializací jsou konzistentní s asociací, tj.
$$\partial c = 0 \qquad \partial H = 0 \qquad \partial t = 0$$

Důk:
$$\partial e_\alpha = 0 \qquad \partial E_\alpha = 0 \qquad c_{\mu\nu}{}^{\kappa} = \text{konst} \qquad H_{AB} = \text{konst} \qquad t_\mu{}^A{}_B = \text{konst}$$
$$\Rightarrow \partial c = 0 \qquad \partial H = 0 \qquad \partial t = 0$$

Věta: Indukování kov. der. na asociovaný bundl

Nechť AM je vekt. bundl asociovaný s GM, gM
t je věrné reprez. konzistentní s metrikou H na AM
$\mathcal{D}$ kov. derivace na gM konzist. se strukturou algebry

$\Downarrow$

kov. der. D na AM konzistentní s asociací a metrikou je dána jednoznačně

Důk.

Derivace $\mathcal{D}$ a D mají splňovat

$$\mathcal{D}c = 0 \qquad DH = 0 \qquad Dt = 0$$

Zvolme trivializace e_α, E_A konzist. se všemi strukt., pak

$$\partial c = 0 \qquad \partial H = 0 \qquad \partial t = 0$$

a ∂ na AM je dána volbou e_α jednoznačně

Nechť $\mathcal{A}_a{}^\lambda{}_\nu = \Omega_a^\kappa c_{\kappa\nu}{}^\lambda$ je vekt. potenciál $\mathcal{D}$ vůči ∂ a $\mathbb{A}_a{}^M{}_N$ je vekt. potenciál D vůči ∂

$$\mathcal{D} = \partial + \mathcal{A} \qquad D = \partial + \mathbb{A}$$

Platí

$$D_a t_\kappa{}^M{}_N = 0 \qquad \partial_a t_\kappa{}^M{}_N = 0$$

$\Downarrow$

$$-\mathcal{A}_a{}^\lambda{}_\kappa t_\lambda{}^M{}_N + [\mathbb{A}_a, t_\kappa]^M{}_N = 0$$

$\Updownarrow$

$$-\Omega_a^\nu c_{\nu\kappa}{}^\lambda t_\lambda{}^M{}_N + [\mathbb{A}_a, t_\kappa]^M{}_N = 0 \qquad c_{\nu\kappa}{}^\lambda t_\lambda = [t_\nu, t_\kappa]$$

$\Downarrow$

$$[\mathbb{A}_a - \Omega_a^\nu t_\nu, t_\kappa]^M{}_N = 0$$

Z věrnosti a plné reducibility repr. plyne Schurovo lema

$$\mathbb{A}_a{}^M{}_N - \Omega_a^\nu t_\nu{}^M{}_N = \sum_s \Omega_a^{(s)} P_{(s)}{}^M{}_N$$

projektory na ireduc. komp.

Z $DH=0$ $\partial H = 0$ a konzistence t s H plyne

$$\mathbb{A}_a^T = -\mathbb{A}_a \qquad t_\kappa^T = -t_\kappa$$

ale projektory $P_{(s)}$ jsou symetrické $P_{(s)}^T = P_{(s)}$

$\Rightarrow \Omega_a^{(s)} = 0 \Rightarrow \mathbb{A}_a{}^M{}_N = \Omega_a^\kappa t_\kappa{}^M{}_N \Rightarrow D = \partial + \mathbb{A}$ jednoznačné

Pozn.:

Poloprostota grupy G a algebry $\mathfrak{g}$ zaručuje, že adjoint reprezentace Ad a ad na $\mathfrak{g}^{M}$ nesou veškerou podstatnou informaci o grupě, resp. algebře – jsou věrné nedegenerované. Navíc každé lineární operace splňující Leibnizovo pravidlo patří do reprezentace, $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$

Poloprosté grupy nepokrývají ale běžný případ, kdy grupa má invariantní komutující podgrupu, případně algebra má komutující ideál. To zahrnuje např. případ elektromagnetismu, kdy kalibrační grupa je $U(1)$. Adjoint reprezentace je poté triviální, $\mathrm{ad} = 0$ jelikož závorky jsou triviální, $c = 0$.

Tento případ se řeší umělou volbou nějaké netriv. věrné reprezentace G či $\mathfrak{g}$ na kalibr. algebře $\mathfrak{g}$, např. zadáním generátorů $t_K{}^E{}_Y$ splňujících $[t_K, t_S] = 0$. Tato reprezentace pak nahradí adjoint reprezentaci ve výrazech jako

$$A_a{}^E{}_Y = \mathcal{A}_a^K\, t_K{}^E{}_Y \quad \text{či} \quad F_{ab}{}^E{}_Y = F_{ab}^K\, t_K{}^E{}_Y$$

Zkombinováno s technikou pro poloprostou algebru lze ošetřit případ redukovatelné algebry $\mathfrak{g}$.

Pozn.:

Důkaz jednoznačnosti jak souřadnicové derivace ∂ na AM, tak indukované derivace D na AM spočívá zejména na věrnosti a reducibilitě reprezentace t

Ty umožňují použít Schurovo lema a zredukovat volnost v definici trivializace E_A, případně volnost ve tvaru rozdílu $A_a - \Omega_a^k t_k$ na násobek jednotky na každé ireducibilní komponentě.

Tuto zbývající volnost jsme eliminovali použitím kompatibility s metrickou strukturou na AM

V případě, že na asociovaném prostoru AM bude reprezentace t kompatibilní s jinou strukturou - např. s hermitovskou strukturou na komplexních bundlech - eliminace zbývající volnosti nemusí být tak přímočará. Hermitovská struktura by např. nefixovala fázi na jednotlivých ireducibilních komponentách

Pozn:

Obecnější přístup k zachycení informace o kalibrační grupě, algebře a k definici asociovaných vektorových bundlů je založen na tzv. hlavních bundlech.

Intuitivně, hlavní bundl PM je prostor všech zobecněných bází, mezi kterými lze přecházet pomocí kalibrační transformace.

Tj. prvek fibru $E \in P_x M$ je zobecněná báze v x

Na každou bázi E lze zapůsobit transformací $h \in G$ patřící do kalibrační grupy G

$$E \to F = Eh \quad \in P_x M$$

Naopak, každé dvě báze $E, F \in P_x M$ jsou spojeny nějakou kalibrační transformací h

Asociovaný bundl AM je definován volbou reprezentace T grupy G na standardní fibru A

Prvek $\phi \in AM$ lze chápat jako obecný objekt, který je zadaný vůči bázi $E \in PM$ pomocí souřadnice $\underline{\phi} \in A$ ze standardního fibru

$$\phi = T_E \underline{\phi}$$

přičemž pokud změníme bázi $E \to E' = Eh$, musíme změnit příslušně i souřadnici $\underline{\phi} \to \underline{\phi}' = T_{h^{-1}} \cdot \underline{\phi}$

$$\phi = T_E \underline{\phi} = T_{E'} \underline{\phi}' = T_{Eh} (T_{h^{-1}} \underline{\phi})$$

Grupový bundl GM a bundl kalibr. algebry gM lze chápat jako asociované bundly zadané pomocí reprezentací AD a Ad

Na hlavním bundlu PM lze definovat konexi, která definuje paralelní přenos bází.

Konexe PM pak umožňuje definovat jednoznačně indukovanou kovariantní derivaci na každém asociovaném vektorovém bundlu

Viz příležitostné přednášky v rámci Vybraných partií OTR.