Kalibrační symetrie

polní teorie popisované pomocí vektorových bundlů mají
 většinou symetrii vůči transformacím působícím
 na každém fibru
kalibrační grupa
 tyto transformace v jednom fibru tvoří tzv. kalibrační grupu
 jedná se o Lieovu grupu konečné dimenze
 grupy kalibr. transf. ve všech fibrech jsou isomorfní
lokální kalibrační grupa
 kalibr. transformace v různých fibrech jsou nezávislé
 a nelze je ani nijak kanonicky porovnávat
 plná kalibr. symetrie je tak symetrie vůči lokální kalibr.
 transformaci, která je zadána volbou kalibr. ve všech bodech
grupový bundl
 matematicky lze kalibr. transformace popsat jako grupový
 bundl GM nad základovou varietou M se stand. fibrem G
 kt. tvoří Lieova grupa
 lokální kalibr. transformace bude pak řez tohoto bundlu
 grupa lokálních kalibr. transf. tedy je $\mathrm{Sect}\, GM$
Lieova algebra lokální kalibr. grupy
 ke kalibrační grupě G máme její Lieovu algebru $\mathfrak{g} = T_e G$
 ke grupovému bundlu GM můžeme vytvořit bundl
 Lieovy algebry $\mathfrak{g}M$
 řezy tohoto bundlu $\mathrm{Sect}\, \mathfrak{g}M$ tvoří Lieovu alg. lok. kal. grupy
reprezentace na vektorovém bundlu AM
 akci kalibr. grupy GM na vekt. bundlu je skrze reprezentaci
 všechny kalibr. transf. v bodě x jsou reprezentovány
 prvky z $A_x^1 M$ tj. lin. operátory na $A_x M$
 podobně máme reprezentovanou kalibr. algebru $\mathfrak{g}M$
popis kalibr. transf. pomocí zvolené struktury na AM
 reprezentaci kalibr. grupy, lze vymezit požadavkem,
 že transformace zachovává nějakou strukturu
 např. reálný skal. součin (metriku), komplexní sk. součin
 (hermitovskou strukt.), orientaci, symplekt. str, atd.
 toto vymezení pak indukuje i reprezentaci kalibr. algebry
nejdříve si ukážeme dva základní příklady tohoto postupu

Reálný vektorový bundl s O či SO symetrií

kalibrační transformace bude vymezena jako transformace zachovávající fibrovou metriku, případně navíc orientaci

popis "standardní kopie" metrické struktury:

Metrická struktura

A reálný vekt. pr. (bude stand. fiber)

$H_{\underline{AB}}$ nedegenerovaná symetrická metrika

$H_{AB} = H_{BA}$ existuje $H^{-1\,\underline{AB}}$ $H_{\underline{AN}} H^{-1\,\underline{NB}} = 1\!\!1^{\underline{B}}_{\underline{A}}$

zvyšování a snižování indexů

$H^{\underline{AB}} = H^{-1\,\underline{AB}}$ $H^{\underline{A}}{}_{\underline{B}} = 1\!\!1^{\underline{A}}_{\underline{B}}$

transpozice (speciální případy zvyš. a sniž. indexů)

$\phi^{\underline{A}} \to \phi^{T}{}_{\underline{A}} = H_{\underline{AB}} \phi^{\underline{B}}$

$\phi_{\underline{A}} \to \phi^{T\underline{A}} = H^{\underline{AB}} \phi_{\underline{B}}$

$X^{\underline{A}}{}_{\underline{B}} \to X^{T\underline{A}}{}_{\underline{B}} = H^{\underline{AM}} H_{\underline{BN}} X^{\underline{N}}{}_{\underline{M}} = X_{\underline{B}}{}^{\underline{A}}$

skalární součin

$(\phi, \psi) = \phi^{\underline{A}} \psi^{\underline{B}} H_{\underline{AB}}$

$(\phi, \psi) = \phi^{T} \cdot \psi = \phi \cdot \psi^{T}$ $(X \cdot \phi, \psi) = (\phi, X^{T} \cdot \psi)$

signatura $H_{\underline{AB}}$

$(\underbrace{- \dots -}_{m} \underbrace{+ \dots +}_{p})$ signatura (m, p)

(pseudo)ortonormální transformace

lin. transf. A zachovávající sk. součin

$R^{\underline{A}}{}_{\underline{B}} \in A^1_1$ $\tilde{\phi}^{\underline{A}} = R^{\underline{A}}{}_{\underline{M}} \phi^{\underline{M}}$ $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = (\phi, \psi)$

$\Leftrightarrow$ $\tilde{H}_{\underline{AB}} = H_{\underline{AB}}$ $\Leftrightarrow$ $H_{\underline{AB}} = H_{\underline{MN}} R^{\underline{M}}{}_{\underline{A}} R^{\underline{N}}{}_{\underline{B}}$ $\Leftrightarrow$ $R^{T} \cdot R = 1\!\!1$

ortonorm. transf. tvoří grupu $G = O(A, H) \cong O(m, p)$

rozšíření ortonorm. transf. na tenzory

$\widetilde{(X \otimes \psi)} = \tilde{X} \otimes \tilde{\psi}$ $\widetilde{CX} = C\tilde{X}$ $\tilde{\alpha} = \alpha$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$\tilde{X}^{\underline{AB}\dots}{}_{\underline{CD}\dots} = R^{\underline{A}}{}_{\underline{K}} R^{\underline{B}}{}_{\underline{L}} \dots R^{-1\,\underline{M}}{}_{\underline{C}} R^{-1\,\underline{N}}{}_{\underline{D}} \dots X^{\underline{KL}\dots}{}_{\underline{MN}\dots}$

malé ortonormální transformace

$R_{\alpha} = 1\!\!1 + \alpha\, r + O(\alpha^2)$ - jednopar. třída ortonorm. tr. blízkých $1\!\!1$

$1\!\!1 = R^{T}_{\alpha} \cdot R_{\alpha} = 1\!\!1 + \alpha(r + r^{T}) + O(\alpha^2)$

$\Downarrow$

$r = - r^{T}$ reprezentace Lieovy alg. $\mathfrak{g} = o(A, H) \cong o(m, p)$

Kalibrační grupa reprez. podgrupou ortonormální grupy

podgrupa ortonormální grupy může být specifikována zadáním dodatečné struktury, která se má při transformaci zachovat

příkladem může být

Levi-Civitův tenzor určující orientaci

projektory na invariantní podprostory

poznámka:

každá poloprostá grupa lze reprezentovat jako podgrupa ortonormální grupy

vskutku, adjoint reprezentace Ad zachovává Killingovu metriku, která je pro poloprostou grupu nedegenerovaná

Orientace

metrika H_{AB} fixuje "jednotkový" totálně antisym. tenzor až na znaménko

volba znaménka znamená volba orientace

Levi-Civitův tenzor na A

$\varepsilon_{A_1 \dots A_N}$ normalizace $\varepsilon_{A_1 \dots A_N} \varepsilon^{A_1 \dots A_N} = (-1)^m N!$

transformace zachovávající orientaci

$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \Leftrightarrow R^{M_1}{}_{A_1} \dots R^{M_N}{}_{A_N} \varepsilon_{M_1 \dots M_N} = \varepsilon_{A_1 \dots A_N} \Leftrightarrow \det R = 1$

ortonormální transf. zachovávající orientaci

grupa $G = SO(A, H) \cong SO(m, p)$

Lieova alg. $g = so(A, H) \cong so(m, p)$

algebra je shodná s algebrou $o(m, p)$

grupa $O(m, p)$ je "dvakrát" větší než $SO(m, p)$

Lokalizace fibrované metrické struktury

AM reálný vekt. bundl se stand. fibrem A
a standardní metrickou strukturou H

tj. máme fibrovanou metriku

$H_{\underline{AB}} \in \mathrm{Sect}\, A^0_2 M$

isomorfní v každém bodě metrice na stand. fibru

je-li AM orientovatelný, lze zvolit globální Levi-Civit. tenzor

$\varepsilon_{\underline{A_1 \dots A_N}} \in \mathrm{Sect}\, A^0_N M$

neorientovatelnost znamená, že nelze zvolit globální hladký Levi-Civitův tenzor = nelze konzistentně a spojitě zvolit znaménko Levi-Civitova tenzoru na celém bundle

Lokální kalibrační O-transformace

lokální kalibr. O-transformace je hladká lineární transf. všech fibrů zachovávající fibrovou metriku

$\phi^{\underline{A}} \in \mathrm{Sect}\, AM$ — řez bundlu repr. fyzikální pole

$R^{\underline{A}}{}_{\underline{B}} \in \mathrm{Sect}\, A^1_1 M$ — lokální kalibr. transf

$$\phi^{\underline{A}} \to \tilde{\phi}^{\underline{A}} = R^{\underline{A}}{}_{\underline{B}}\, \phi^{\underline{B}}$$

$$X^{\underline{A}\dots}_{\underline{B}\dots} \to \tilde{X}^{\underline{A}\dots}_{\underline{B}\dots} = R^{\underline{A}}{}_{\underline{M}} \dots R^{-1\underline{N}}{}_{\underline{B}} \dots X^{\underline{M}\dots}_{\underline{N}\dots}$$

kalibr. transf. vekt. a tenz. polí

$$(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = (\phi, \psi) \qquad \tilde{H}_{\underline{AB}} = H_{\underline{AB}}$$

$$R^{\underline{M}}{}_{\underline{A}} R^{\underline{N}}{}_{\underline{B}} H_{\underline{MN}} = H_{\underline{AB}}$$

$$R^T \cdot R = R \cdot R^T = \mathbb{1}$$

lok. kalibr. transf. musí splňovat podmínky ortonormality

lokální kalibr. SO-transformace

$R^{\underline{A}}{}_{\underline{B}}$ navíc zachovává globální orientaci, tj.

$\det R = 1$ či $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$

Lokální kalibrační algebra

Lieova algebra Lieovy grupy popisuje transformace blízké jednotce.
v řeči reprezentace na AM můžeme psát

$$R_\alpha = \mathbb{1} + \alpha\, r + O(\alpha^2) \qquad r \in \operatorname{Sect} A^1_1 M$$

kde r je prvek lokální kal. algebry reprezentovaný na AM
z ortonormality R_α plyne antisymetrie r

$$r^T = -r$$

Lieova závorka je dána komutátorem

$$[r_1, r_2] = r_1 \cdot r_2 - r_2 \cdot r_1$$

exponenciální zobr. exp: algebra → grupa je dáno maticovou exponenciálou

$$R = \exp(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} r^k$$

akce Lieovy algebry na obecném tenzoru
prvek lok. kalibrační algebry $r^A{}_B$ působí na tenzory jako pseudoderivace $\mathbf{r}$ generovaná $r^A{}_B$

$$\mathbf{r}\, X^{A\dots}_{B\dots} = r^A{}_K X^{K\dots}_{B\dots} + \dots - r^K{}_B X^{A\dots}_{K\dots} - \dots$$

jedná se o lineární řád v α působení $R_\alpha = (\mathbb{1} + \alpha r)$ na X
viz diskuzi pseudoderivace

Trivializace kompatibilní s O-symetrií

trivializace kompatibilní s metrickou strukturou
je volba báze E_A pro kterou platí

$$(E_A, E_B) = \text{konst} \qquad \text{tj.} \qquad H_{AB} = \text{konst.}$$

konstantnost je myšlena na zákl. varietě M

ortonormální trivializace

$$H_{AB} = \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & +1 & \\ & & & & +1 \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

nejběžnější volba

pro speciální signaturu může být výhodné volit i jiné trivializace

$$H_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

pro signaturu $m = p$

kalibrační transformace

- kalibr. transf. trivializace konz. s metrikou dá trivializaci konz. s metrikou

  $$\tilde{E}_{\tilde{A}} = R \cdot E_A$$

  $$\Rightarrow \quad H_{\tilde{A}\tilde{B}} = H_{AB} \qquad \text{tj.} \quad (\tilde{E}_{\tilde{A}}, \tilde{E}_{\tilde{B}}) = (E_A, E_B) \quad \leftarrow \text{ortonorm. } R$$

  (kde $H_{\tilde{A}\tilde{B}}$ jsou komponenty vůči bázi $\tilde{E}_{\tilde{A}}$)
- dvě trivial. konz. s metrikou s $H_{AB} = H_{\tilde{A}\tilde{B}}$ jsou spojeny kalibr. transf.

  $$R = \tilde{E}_{\tilde{M}} E^M \qquad \text{tj.} \qquad R^{\tilde{A}}{}_B = \tilde{E}^{\tilde{A}}_{\tilde{M}} E^M_B$$ kde E^M je duální k E_M

  vskutku, toto R dává

  $$\tilde{E}_{\tilde{A}} = R \cdot E_A \qquad H_{\tilde{A}\tilde{B}} = H_{AB}$$

pasivní kalibrační transformace

změna komponent vektoru ϕ^A při změně trivializace konz. s metrikou se nazývá pasivní kalibr. transf.

mějme trivializace E_M, $\tilde{E}_{\tilde{M}}$ tak že $H_{AB} = H_{\tilde{A}\tilde{B}} = \text{konst}$

nechť $\quad E_A = \tilde{E}_{\tilde{M}} R^{\tilde{M}}{}_A \qquad R^{\tilde{M}}{}_N$ matice přechodu

pak $\quad \phi^{\tilde{A}} = R^{\tilde{A}}{}_M \phi^M \qquad$ ortonormalita: $\; H_{AB} = H_{\tilde{M}\tilde{N}} R^{\tilde{M}}{}_A R^{\tilde{N}}{}_B$

Kovariantní derivace na bundlu s O-symetrií

Def:
mějme vekt. bundl $\mathcal{A}M$ s metrikou $H_{\underline{AB}}$
kov. derivace D na $\mathcal{A}M$ se nazývá konzistentní s metrickou strukturou, též O-kovariantní der., jestliže

$$D_{\underline{m}} H_{\underline{AB}} = 0 \qquad \text{tj.} \quad D(\phi,\psi) = (D\phi,\psi) + (\phi, D\psi)$$

Lema
nechť E_A je trivializace konz. s metrikou $H_{\underline{AB}}$
nechť ∂ je příslušná souř. derivace, tj $\partial E_A = 0$
pak ∂ je konzistentní s metrikou $H_{\underline{AB}}$

$$\partial_{\underline{m}} H_{\underline{AB}} = 0$$

důkaz

$$H_{\underline{AB}} = H_{\underline{KL}}\, E^{K}_{\underline{A}}\, E^{L}_{\underline{B}} \qquad \partial E^{K}_{\underline{A}} = 0 \qquad \partial H_{KL} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \partial H_{\underline{AB}} = 0$$

Věta:
nechť D je O-kov. der. daná vektorovým polem $A_{\underline{m}}{}^{\underline{K}}{}_{\underline{L}}$ vůči trivializaci E_K, ∂ konzistentní s metrikou $H_{\underline{AB}}$

$$D\phi = \partial\phi + A\cdot\phi$$

pak

$$A^{T}_{\underline{m}} = -A_{\underline{m}} \qquad \text{tj.} \quad A_{\underline{m}\underline{L}}{}^{\underline{K}} = A^{T}_{\underline{m}}{}^{\underline{K}}{}_{\underline{L}} = -A_{\underline{m}}{}^{\underline{K}}{}_{\underline{L}}$$

důkaz:

$$DH = \partial H = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = [D_{\underline{m}} - \partial_{\underline{m}}] H_{\underline{AB}} = A_{\underline{m}} H_{\underline{AB}} = -A_{\underline{m}}{}^{\underline{M}}{}_{\underline{A}} H_{\underline{MB}} - A_{\underline{m}}{}^{\underline{M}}{}_{\underline{B}} H_{\underline{AM}} \quad \Rightarrow \quad A^{T}_{\underline{m}} = -A_{\underline{m}}$$

Věta
nechť D je O-kov. derivace a $F_{\underline{mn}}{}^{\underline{A}}{}_{\underline{B}}$ její tenzor křivosti, pak

$$F^{T}_{\underline{mn}} = -F_{\underline{mn}} \qquad \text{tj.} \quad F_{\underline{mn}\underline{L}}{}^{\underline{K}} = F^{T}_{\underline{mn}}{}^{\underline{K}}{}_{\underline{L}} = -F_{\underline{mn}}{}^{\underline{K}}{}_{\underline{L}}$$

důkaz:

$$DH = 0 \Rightarrow 0 = [D_{\underline{m}} D_{\underline{n}} - D_{\underline{n}} D_{\underline{m}} + T_{\underline{mn}}^{\underline{k}} D_{\underline{k}}] H_{\underline{AB}} = F_{\underline{mn}} H_{\underline{AB}} = -F_{\underline{mn}}{}^{\underline{M}}{}_{\underline{A}} H_{\underline{MB}} - F_{\underline{mn}}{}^{\underline{M}}{}_{\underline{B}} H_{\underline{AM}}$$

$$\Rightarrow \quad F_{\underline{mn}} = -F^{T}_{\underline{mn}}$$

Pozn:
vekt. pot. $A_{\underline{m}}$ a křivost $F_{\underline{mn}}$ jsou tak reprezentací prvku Lieovy algebry lokální kalibrační grupy
(s dodatečnými tečnými indexy $\underline{m}$ resp. $\underline{mn}$)

Kalibrační transformace kov. derivace

Def:

akci kalibr. transf. R na kov. derivaci D definujeme podmínkou

$$\tilde{D}\tilde{\phi} = \widetilde{D\phi}$$

Věta

transformovaná kov. der. $\tilde{D}$ je dána

$\tilde{D} = D + \mathbb{A}$ kde pseudoder. $\mathbb{A}$ je generována $\Lambda = -(DR)\cdot R^{-1}$

důkaz:

definiční vztah pro $\tilde{D}$ je

$$R\cdot D\phi = \tilde{D}(R\cdot\phi) = D(R\cdot\phi) + \Lambda\cdot R\cdot\phi = (DR)\cdot\phi + R\cdot(D\phi) + \Lambda\cdot R\cdot\phi$$

$$\Rightarrow (DR + \Lambda\cdot R)\cdot\phi = 0 \quad \forall\phi \quad \Rightarrow \quad \Lambda = -(DR)\cdot R^{-1}$$

Věta:

nechť $A, \tilde{A}$ jsou vekt. potenciály kov. derivací $D, \tilde{D}$ vůči stejné trivializaci E_A, ∂ platí

$$\tilde{A} = R\cdot A\cdot R^{-1} - (\partial R)\cdot R^{-1}$$
$$= A - (DR)\cdot R^{-1} = A - R^{-1}\cdot(\tilde{D}R)$$

důkaz:

víme: $D\phi = \partial\phi + A\cdot\phi$ $\quad \tilde{D}\phi = \partial\phi + \tilde{A}\cdot\phi$ $\quad \tilde{D}\phi = D\phi - (DR)\cdot R^{-1}\cdot\phi$

$$\Rightarrow \tilde{D}\phi = D\phi - (DR)\cdot R^{-1}\cdot\phi = \partial\phi + (A - (DR)\cdot R^{-1})\cdot\phi = \partial\phi + \tilde{A}\cdot\phi$$

$\Rightarrow \tilde{A} = A - (DR)\cdot R^{-1}$ — jedno tvrzení věty

$$= A - (\partial R + A\cdot R - R\cdot A)\cdot R^{-1} = R\cdot A\cdot R^{-1} - (\partial R)\cdot R^{-1}$$

alternativní důkaz

$$\widetilde{D\phi} = \tilde{D}\tilde{\phi} = \partial\tilde{\phi} + \tilde{A}\cdot\tilde{\phi} = \partial(R\cdot\phi) + \tilde{A}\cdot R\cdot\phi = R\cdot\partial\phi + (\partial R + \tilde{A}\cdot R)\cdot\phi$$
$$= R\cdot D\phi = R\cdot\partial\phi + R\cdot A\cdot\phi \qquad \forall\phi \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{A} = R\cdot A\cdot R^{-1} - (\partial R)\cdot R^{-1}$$

třetí tvrzení plyne ze záměny

$D \leftrightarrow \tilde{D} \quad A \leftrightarrow \tilde{A} \quad R \leftrightarrow R^{-1} \quad \Rightarrow$

$A = \tilde{A} - (\tilde{D}R^{-1})\cdot R \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} = A + (\tilde{D}R^{-1})\cdot R = A - R^{-1}\tilde{D}R$

Věta:

tenzor křivosti $\tilde{F}$ transformované kov. der. $\tilde{D}$ je

$$\tilde{F} = R \cdot F \cdot R^{-1}$$

tj. je dán standardní kal. transf. tenzoru typu $A^1_1 M$

důkaz:

$$\tilde{D}\tilde{\phi} = \widetilde{D\phi} \quad \Rightarrow \quad \tilde{D}\tilde{D}\tilde{\phi} = \widetilde{DD\phi} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbb{F}}\tilde{\phi} = \widetilde{\mathbb{F}\phi}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{F} \cdot R \cdot \phi = R \cdot F \cdot \phi \quad \Rightarrow \quad \tilde{F} = R \cdot F \cdot R^{-1}$$