Komplexní vektorový bundl s U-symetrií

Kalibrační transformace vymezena jako transf. zachovávající skalární součin na komplexním vekt. prostoru

popis "standardní kopie" komplexní a hermitovské struktury:

Komplexní struktura

$\mathbb{E}$ komplexní vekt. pr.

tenzory z $\mathbb{E}^k_l$ umožňují popsat všechny multilin. zobrazení mezi vektory a tenzory

potřebujeme popsat též antilineární operace

stačí zavést jednu antilin. operaci - ostatní se liší o lineární oper.

zavedeme $\bar{\mathbb{E}}$ - kopii prostoru $\mathbb{E}$, která bude spojena s $\mathbb{E}$ antilin. operací

$\mathbb{E}_L \equiv \mathbb{E}$
$\mathbb{E}_R \equiv \bar{\mathbb{E}}$ } sdružené komplexní vekt. pr. dimenze D

$\bar{\ } : \mathbb{E}_L \leftrightarrow \mathbb{E}_R$ antilineární jedno-jednoznačné operace tak, že

$\bar{\bar{\phi}} = \phi$ sdružení

vektory z $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$ značíme

$\mathbb{E}_L$ ϕ^A indexy $A, B, C, \ldots$

$\mathbb{E}_R$ $\psi^{\bar{A}}$ indexy $\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C}$

Pozn.: v kontextu spinorů se používají místo nadtržení tečky

komplexní tenzorový prostor nad $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$ pak je

$$\mathbb{E}^{k_L k_R}_{l_L l_R} = \underbrace{\mathbb{E}_L \otimes \ldots}_{k_L} \otimes \underbrace{\mathbb{E}^*_L \otimes \ldots}_{l_L} \otimes \underbrace{\mathbb{E}_R \otimes \ldots}_{k_R} \otimes \underbrace{\mathbb{E}^*_R \otimes \ldots}_{l_R} \qquad X^{A\ldots\bar{B}\ldots}_{M\ldots\bar{N}\ldots}$$

libovolná antilin. operace lze nyní reprezentovat pomocí sdružení $\bar{\ }$ a tenzorové operace

např.: $\alpha : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ $\qquad$ např. $\circledast : \mathbb{E}^{11}_{00} \to \mathbb{E}^{11}_{00}$

$$(\alpha\phi)^A = \alpha^A{}_{\bar{M}}\, \bar{\phi}^{\bar{M}} \qquad X^{\circledast A\bar{B}} = S^{A\bar{B}}{}_{N\bar{M}}\, \bar{X}^{\bar{M}N}$$

Skalární součin, hermitovská struktura

na E_L a E_R definujeme skal. součiny pomocí nedegenerované hermitovské positivně definitní formy $h_{\bar A B}$

$h_{\bar A B} \in E^{00}_{11}$

$h_{\bar A B}$ nedegenerovaná $\equiv$ existuje inverzní $h^{-1\bar A B}$ $\quad h_{\bar M A} h^{-1\bar M B} = 1\!\!1^{B}_{A} \quad h_{\bar A M} h^{-1\bar B M} = 1\!\!1^{\bar B}_{\bar A}$

$h_{\bar A B}$ hermitovská $\equiv$ $\bar h_{\bar B A} = h_{\bar A B}$

$h_{\bar A B}$ posit. definitní $\equiv$ $\bar\phi^{\bar A} \phi^{B} h_{\bar A B} > 0$ pro $\phi \neq 0$

skalární součiny:

$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_L = \bar\phi_1^{\bar A} \phi_2^{B} h_{\bar A B} \qquad \phi_1, \phi_2 \in E_L$

$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_R = \bar\psi_1^{A} \psi_2^{\bar B} \bar h_{A \bar B} \qquad \psi_1 \psi_2 \in E_R \qquad$ ale $\bar h = h$!

hermitovské sdružení

$+ : E^{10}_{00} \leftrightarrow E^{00}_{10}$

$E \leftrightarrow E^*$ (duál k E)

$\phi^{+}{}_{A} = \bar\phi^{\bar M} h_{\bar M A}$

$\Sigma^{+A} = \bar\Sigma_{\bar M} h^{-1\bar M A}$

+ antilineární

$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_L = \phi_1^{+}{}_{A} \phi_2^{A}$

$\phi^{++} = \phi \qquad \Sigma^{++} = \Sigma$

$+ : E^{01}_{00} \leftrightarrow E^{00}_{01}$

$\bar E \leftrightarrow \bar E^*$ (duál k $\bar E$)

$\psi^{+}{}_{\bar A} = \bar\psi^{M} h_{\bar A M}$

$\Omega^{+\bar A} = \bar\Omega_{M} h^{-1\bar A M}$

+ antilineární

$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_R = \psi_1^{+}{}_{\bar A} \psi_2^{\bar A}$

$\psi^{++} = \psi \qquad \Omega^{++} = \Omega$

$+ : E^{10}_{10} \to E^{10}_{10}$

$M^{+A}{}_{B} = h^{-1\bar K A} h_{\bar L B} \bar M^{\bar L}{}_{\bar K}$

$\langle \phi_1, M \cdot \phi_2 \rangle_L = \langle M^{+} \cdot \phi_1, \phi_2 \rangle_L$

$M^{++} = M$

+ antilineární

$+ : E^{01}_{01} \to E^{01}_{01}$

$N^{+\bar A}{}_{\bar B} = h^{-1\bar A K} h_{\bar B L} \bar N^{L}{}_{K}$

$\langle \psi_1, N \cdot \psi_2 \rangle_R = \langle N^{+} \cdot \psi_1, \psi_2 \rangle_R$

$N^{++} = N$

+ antilineární

Lokalizace komplexní a hermitovské struktury

$\mathbb{E}_L M$, $\mathbb{E}_R M$ komplexní vekt. bundly nad M spojené vzájemným sdružením $\bar{\ }$

hermitovská struktura

$h_{\bar{A}B} \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{E}^{00}_{11} M$

generující skalární součiny $\langle , \rangle_L, \langle , \rangle_R$ a herm. odz. $^+$

Pozn: Tyto struktury jsou lokálně (nekanonicky) isomorfní strukturám na standardním fibru. Tzn., že lokální isomorfismus $\mathbb{E}U \cong \mathbb{E} \times U$, kde $U \subset M$, zachovává isomorf. struktur $\bar{\ }$, h, $\langle\ \rangle_{L,R}$, $^+$

Lokální kalibrační U-transformace

lokální kalibrační U-transformace je hladká lineární transf. všech fibrů bundlů $E_L M$ a $E_R M$ zachovávající skalární součiny $\langle\, ,\rangle_L$ a $\langle\, ,\rangle_R$ a komutující se sdružením $\bar{\ }$

$$U : \operatorname{Sect} E_L M \to \operatorname{Sect} E_L M \qquad \text{tj.} \quad U \in \operatorname{Sect} E^{1\,0}_{1\,0} M$$

$$\phi \to \tilde{\phi} = U \cdot \phi \qquad \text{tj.} \quad \tilde{\phi}^{A} = U^{A}{}_{B}\, \phi^{B}$$

$$\bar{U} : \operatorname{Sect} E_R M \to \operatorname{Sect} E_R M \qquad \text{tj.} \quad \bar{U} \in \operatorname{Sect} E^{0\,1}_{0\,1} M$$

$$\psi \to \tilde{\psi} = \bar{U} \cdot \psi \qquad \text{tj.} \quad \tilde{\psi}^{\bar{A}} = \bar{U}^{\bar{A}}{}_{\bar{B}}\, \psi^{\bar{B}}$$

zachování skal. součinu:

$$\langle \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2 \rangle_L = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_L \qquad\qquad \langle \tilde{\psi}_1, \psi_2 \rangle_R = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_R$$

$$\Updownarrow \qquad h_{\bar{M}N}\, \bar{U}^{\bar{M}}{}_{\bar{A}}\, U^{N}{}_{B} = h_{\bar{A}B} \qquad \Updownarrow$$

$$\Updownarrow \quad U^{+A}{}_{M}\, U^{M}{}_{B} = U^{A}{}_{M}\, U^{+M}{}_{B} = \mathbb{1}^{A}{}_{B} \qquad\qquad \bar{U}^{+\bar{A}}{}_{\bar{M}}\, \bar{U}^{\bar{M}}{}_{\bar{B}} = \bar{U}^{\bar{A}}{}_{\bar{M}}\, \bar{U}^{+\bar{M}}{}_{\bar{B}} = \mathbb{1}^{\bar{A}}{}_{\bar{B}} \quad \Updownarrow$$

$\Updownarrow$ U L-unitární $\qquad\qquad$ $\bar{U}$ R-unitární $\Updownarrow$

rozšíření na obecné tenzory

$$X^{A\ldots\bar{B}\ldots}{}_{C\ldots\bar{D}\ldots} \to \tilde{X}^{A\ldots\bar{B}\ldots}{}_{C\ldots\bar{D}\ldots} = U^{A}{}_{K} \cdots \bar{U}^{\bar{B}}{}_{\bar{L}} \cdots U^{-1M}{}_{C} \cdots \bar{U}^{-1\bar{N}}{}_{\bar{D}} \cdots X^{K\ldots\bar{L}\ldots}{}_{M\ldots\bar{N}\ldots}$$

transformace lze chápat jako reprezentaci lokální kalibr. grupy na prostorech $E^{k_L k_R}_{l_L l_R} M$

Lokální kalibrační algebra

$U \in \mathrm{Sect}\, E^{1\,0}_{1\,0}M$ a $\bar U \in \mathrm{Sect}\, E^{0\,1}_{0\,1}M$ chápeme jako reprezentaci lokální kalibrační grupy na $E_L M$ a $E_R M$

Lieova algebra kalibrační grupy popisuje transf. blízké jednotce

$$U_\alpha = 1\!\!1 + \alpha i u + O(\alpha^2) \qquad \bar U_\alpha = 1\!\!1 - \alpha i \bar u + O(\alpha^2)$$

$u \in \mathrm{Sect}\, E^{1\,0}_{1\,0}M$ a $\bar u \in \mathrm{Sect}\, E^{0\,1}_{0\,1}M$ tak reprezentují prvek Lieovy algebry kalibr. grupy na $E_L M$ a $E_R M$

podmínka unitarity

$$U \cdot U^\dagger = 1\!\!1 \quad \Rightarrow \quad iu - iu^\dagger = 0 \qquad \text{tj.} \quad u^\dagger = u$$

$u, \bar u$ jsou hermitovské oper. na $E_L M$ resp. $E_R M$

Lieova závorka je dána komutátorem

$$u = i[u_1, u_2] \qquad \bar u = -i[\bar u_1, \bar u_2]$$

odbočka, Lieově závorce v algebře odpovídá komutátor na reprezentačním prostoru, ale přesná reprezentace obsahuje i faktor i, tj

$$iu = [iu_1, iu_2] \quad \Rightarrow \quad u = i[u_1, u_2]$$

exponenciální zobrazení exp: algebra → grupa je dáno maticovou exponenciálou

$$U = \exp(iu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(iu)^k$$

akce Lieovy algebry na obecném tenzoru

působení Lieovy algebry se dostane jako lineární řád působení prvku kalibr. grupy $U = (1\!\!1 + \alpha i u)$

lehce se ověří, že se jedná o akci pseudoderivace $\mathbf{u}$ rozšířenou na tenzorové prostory $E^{k_L k_R}_{l_L l_R}M$ nad $E_L M$ a $E_R M$ následovně

$$\mathbf{u}\, X^{A\ldots\bar B\ldots}_{C\ldots\bar D\ldots} = i u^A{}_K X^{K\ldots\bar B\ldots}_{C\ldots\bar D\ldots} + \ldots - i\bar u^{\bar B}{}_{\bar K} X^{A\ldots\bar K\ldots}_{C\ldots\bar D\ldots} - \ldots - i u^L{}_C X^{A\ldots\bar B\ldots}_{L\ldots\bar D\ldots} - \ldots + i\bar u^{\bar L}{}_{\bar D} X^{A\ldots\bar B\ldots}_{C\ldots\bar L\ldots} + \ldots$$

akce pseudoderivace $\mathbf{u}$ je generována akcí iu na $E_L M$ resp. $-i\bar u$ na $E_R M$

$$\mathbf{u}\,\phi^A = i u^A{}_B \phi^B \qquad \mathbf{u}\,\psi^{\bar A} = -i\bar u^{\bar A}{}_{\bar B}\psi^{\bar B}$$

Pozn: akce $\mathbf{u}$ na $E^{k_L k_R}_{l_L l_R}M$ lze chápat jako kompozice $\mathbf{u}_L$ na $E_L{}^{k_L}_{l_L}M$ a $\mathbf{u}_R$ na $E_R{}^{k_R}_{l_R}M$

$\mathbf{u} = \mathbf{u}_L \oplus \mathbf{u}_R$ kde $\mathbf{u}_L$ je generováno iu a $\mathbf{u}_R$ je generováno $-i\bar u$

máme tedy $\mathbf{u}_R = \bar{\mathbf{u}}_L$ a můžeme psát $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$

pozor ale na faktory "i" a "-i" v konkrétní reprezentaci "iu" a "$-i\bar u$"

Trivializace kompatibilní s U-symetrií

trivializace kompatibilní s hermitovskou strukturou
je volba báze E_A v $\mathbb{E}_L M$, resp. $\bar{E}_{\bar{A}}$ v $\mathbb{E}_R M$ pro které platí

$$\langle E_A, E_B \rangle_L = \text{konst.} \qquad \langle \bar{E}_{\bar{A}}, \bar{E}_{\bar{B}} \rangle_R = \text{konst.}$$

konstantnost je myšlena na podkladové varietě M

ortonormální trivializace
typicky volíme ortonormální bázi

$$h_{\bar{A}B} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix} = \langle E_A, E_B \rangle_L = \langle \bar{E}_{\bar{B}}, \bar{E}_{\bar{A}} \rangle_R$$

kalibrační transformace
- kalibr. transformace ortonormální báze do ortonormální bázi
- dvě ortonormální báze jsou spojeny kalibrační transformací

pasivní kalibrační transformace
změna komponent vektorů ϕ^A, $\psi^{\bar{A}}$ při změně ortonormální trivializace se nazývá pasivní kalibrační transformací

Doplňkový materiál, který nebyl odpřednášen

Realizace (zreálnění) prostorů $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$

prostor $\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R$ má strukturu komplexifikace reálného vekt. prostoru

$$\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R = \mathrm{Re}(\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R) + i\,\mathrm{Im}(\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R) = (\mathbb{E}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$$

komplexní sdružení na $\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R$

$$\Psi = \psi_L \oplus \psi_R \in \mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R \qquad \psi_L \in \mathbb{E}_L \quad \psi_R \in \mathbb{E}_R$$

definujeme

$$\Psi^* = \bar{\psi}_R \oplus \bar{\psi}_L \in \mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R$$

Re a Im definujeme pomocí *

$$\Psi \in \mathrm{Re}\,\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R \Leftrightarrow \Psi = \Psi^* \qquad \text{tj. } \Psi = \psi \oplus \bar{\psi}$$

$$\Psi \in \mathrm{Im}\,\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R \Leftrightarrow \Psi = -\Psi^* \qquad \text{tj. } \Psi = \psi \oplus (-\bar{\psi})$$

$$\mathrm{Re}\,\Psi = \tfrac{1}{2}(\Psi + \Psi^*) = \tfrac{1}{2}\ (\psi_L + \bar{\psi}_R) \oplus (\bar{\psi}_L + \psi_R)$$

$$\mathrm{Im}\,\Psi = -\tfrac{i}{2}(\Psi - \Psi^*) = -\tfrac{i}{2}\ (\psi_L - \bar{\psi}_R) \oplus (\psi_R - \bar{\psi}_L)$$

realizace $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$

$\mathbb{E}^{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}(\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R)$ reálný vekt. prostor $\mathbb{R}$-dimenze 2D

$\mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R = (\mathbb{E}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$ komplexní vekt. prostor $\mathbb{C}$-dimenze 2D

komplexní struktura na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ máme přirozeně dvě komplexní struktury J a $\bar{J} = -J$

$J : \mathbb{E}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$-lineární $\quad J^2 = -\mathbb{1} \quad J^* = J$

$\bar{J} : \mathbb{E}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$-lineární $\quad \bar{J}^2 = -\mathbb{1} \quad \bar{J}^* = \bar{J}$

definované

$$J \cdot \Psi = J \cdot (\psi \oplus \bar{\psi}) = (i\psi) \oplus (-i\bar{\psi}) \qquad \Psi \in \mathbb{E}^{\mathbb{R}} \quad \psi \in \mathbb{E}_L \quad \bar{\psi} \in \mathbb{E}_R$$

$$\bar{J} \cdot \Psi = \bar{J} \cdot (\psi \oplus \bar{\psi}) = (-i\psi) \oplus (i\bar{\psi})$$

$J, \bar{J}$ lze rozšířit $\mathbb{R}$-lineárně na $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = \mathbb{E}_L \oplus \mathbb{E}_R$

$\mathbb{E}_L \oplus 0$ a $0 \oplus \mathbb{E}_R$ jsou pak vlastní podprostory J a $\bar{J}$

$$J \cdot (\phi \oplus 0) = i(\phi \oplus 0) \qquad J \cdot (0 \oplus \psi) = -i(0 \oplus \psi) \qquad \phi \in \mathbb{E}_L \quad \psi \in \mathbb{E}_R$$

$$\bar{J} \cdot (\phi \oplus 0) = -i(\phi \oplus 0) \qquad \bar{J} \cdot (0 \oplus \psi) = i(0 \oplus \psi)$$

vztah $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ a $\mathbb{E}_L$ resp. $\mathbb{E}_R$

$\mathbb{E}_L$ a $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, J)$ isomorfní jako komplexní vekt. pr. $\mathbb{C}$-dim D $\quad \phi \leftrightarrow \Phi = \phi \oplus \bar{\phi}$

$\mathbb{E}_R$ a $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, \bar{J})$ isomorfní jako komplexní vekt. pr. $\mathbb{C}$-dim D $\quad \psi \leftrightarrow \Psi = \bar{\psi} \oplus \psi$

Hermitovské str. na E_L a E_R a metrické str. na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

hermitovské str. $h_{\bar{A}B}$ na E_L, E_R umožňují definovat:

metrika H na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

$$(\phi \oplus \bar{\phi}) \cdot H \cdot (\psi \oplus \bar{\psi}) = \bar{\phi} \cdot h \cdot \psi + \phi \cdot \bar{h} \cdot \bar{\psi}$$

$\Downarrow$ H $\mathbb{R}$-bilineární

H symetrické $\quad H = H^T$

H kompatibilní s $J, \bar{J}$ $\quad J \cdot H \cdot J = H \quad \bar{J} \cdot H \cdot \bar{J} = H$

lze $\mathbb{C}$-lineárně rozšířit na $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = E_L \oplus E_R$

$$(\phi_L \oplus \phi_R) \cdot H \cdot (\psi_L + \psi_R) = \phi_R \cdot h \cdot \psi_L + \phi_L \cdot \bar{h} \cdot \psi_R$$

transpozice

na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ $\qquad (\phi \oplus \bar{\phi})^T = \bar{\phi} \cdot h \oplus \phi \cdot \bar{h}$

na $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$ $\qquad (\phi_L \oplus \phi_R)^T = \phi_R \cdot h \oplus \phi_L \cdot \bar{h}$

skalární součin na $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = E_L \oplus E_R$

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \Phi^* \cdot H \cdot \Psi =$$

$$= \bar{\phi}_L \cdot h \cdot \psi_L + \bar{\phi}_R \cdot \bar{h} \cdot \psi_R = \langle \phi_L, \psi_L \rangle_L + \langle \phi_R, \psi_R \rangle_R$$

$$\Psi^\dagger = \Psi^{T*} = \Psi^{*T} \qquad (\psi_L \oplus \psi_R)^\dagger = \psi_L^\dagger \oplus \psi_R^\dagger$$

skalární součin na $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, J)$ resp. $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, \bar{J})$

H a J definují symplektickou 2-formu Ω

$$\Omega = J \cdot H \qquad \Omega^T = -\Omega \qquad J \cdot \Omega \cdot J = \Omega$$

$(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, J)$ tvoří komplexní vekt. součin, kde násobení komplex. čísly je:

$$(a + ib) * \Phi = a\Phi + b\, J \cdot \Phi \qquad a, b \in \mathbb{R} \quad \Phi \in \mathbb{E}^{\mathbb{R}}$$

skalární součin na $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, J)$

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_J = \frac{1}{2} \left(\Phi \cdot H \cdot \Psi + i\, \Phi \cdot \Omega \cdot \Psi \right)$$

J-(anti)linearita: $\quad \langle J \cdot \Phi, \Psi \rangle_J = -i \langle \Phi, \Psi \rangle_J \qquad \langle \Phi, J \cdot \Psi \rangle_J = i \langle \Phi, \Psi \rangle_J$

hermiticita: $\quad \langle \Phi, \Psi \rangle_J^* = \langle \Psi, \Phi \rangle_J$

$(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, J)$ je isomorfní s E_L jako Hilbertův prostor

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_J = \langle \phi, \psi \rangle_L \qquad \text{kde } \Phi = \phi + \bar{\phi} \quad \Psi = \psi \oplus \bar{\psi} \quad \phi, \psi \in E_L$$

obdobně definujeme $\bar{\Omega} = \bar{J} \cdot H$, $(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, \bar{J})$, $\langle\, ,\, \rangle_{\bar{J}}$ jak platí

$(\mathbb{E}^{\mathbb{R}}, \bar{J})$ je isomorfní s E_R jako Hilbertův prostor

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_J = \langle \phi, \psi \rangle_R \qquad \text{kde } \Phi = \bar{\phi} \oplus \phi \quad \Psi = \bar{\psi} \oplus \psi \quad \phi, \psi \in E_R$$

Doplňkový materiál, který nebyl odpřednášen

Reprezentace kalibr. grupy a algebry na $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$ a $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

akce kalibrační grupy na $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$

$\phi \to \tilde{\phi} = U\cdot\phi$ na $\mathbb{E}_L$ $\qquad$ U unitární $\qquad U\cdot U^{\dagger} = \mathbb{1}$

$\psi \to \tilde{\psi} = \bar{U}\cdot\psi$ na $\mathbb{E}_R$

indukuje akci kalibr. gr. na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

$\Phi \to \tilde{\Phi} = R\cdot\Phi = U\cdot\phi \oplus \bar{U}\cdot\bar{\phi}$ $\qquad$ kde $\Phi = \phi\oplus\bar{\phi} \in \mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

R zachovává $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ $\qquad R\cdot\Phi \in \mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ $\qquad$ tj $\quad R^{*} = R$

R ortogonální vůči H $\qquad$ tj $\quad R^{T}\cdot R = R\cdot R^{T} = \mathbb{1}$

ukázka: $H = h\oplus\bar{h}$ $\quad H^{-1} = h^{-1}\oplus\bar{h}^{-1}$ $\quad R = U\oplus\bar{U}$

$$R^{T} = H^{-1}\cdot R\cdot H = (h^{-1}\oplus\bar{h}^{-1})\cdot(U\oplus\bar{U})\cdot(h\oplus\bar{h}) = \bar{h}^{-1}\cdot\bar{U}\cdot\bar{h} \oplus h^{-1}\cdot\bar{\bar{U}}\cdot h = U^{\dagger}\oplus\bar{U}^{\dagger} = U^{-1}\oplus\bar{U}^{-1} = R^{-1}$$

akce kalibrační algebry na $\mathbb{E}_L, \mathbb{E}_R$

$U = \mathbb{1} + \alpha i u$ $\qquad \delta\phi = i u\cdot\phi$ $\qquad$ na $\mathbb{E}_L$

$\bar{U} = \mathbb{1} - \alpha i \bar{u}$ $\qquad \delta\psi = -i\bar{u}\cdot\psi$ $\qquad$ na $\mathbb{E}_R$

indukuje akci kalibr. algebry na $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$

$R = \mathbb{1} + \alpha r$ $\qquad r = (iu)\oplus(-i\bar{u})$ $\qquad \delta\Phi = (iu\cdot\phi)\oplus(-i\bar{u}\cdot\bar{\phi}) = r\cdot\Phi$

r zachovává $\mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ $\qquad r\cdot\Phi \in \mathbb{E}^{\mathbb{R}}$ $\qquad$ tj $\quad r^{*} = r$

r antisymetrické vůči H $\qquad$ tj $\quad r^{T} = -r$

ukázka: $H = h\oplus\bar{h}$ $\quad H^{-1} = h^{-1}\oplus\bar{h}^{-1}$ $\quad r = (iu)\oplus(-i\bar{u})$

$$r^{T} = H^{-1}\cdot r\cdot H = (h^{-1}\oplus\bar{h}^{-1})\cdot(iu\oplus -i\bar{u})\cdot(h\oplus\bar{h}) = -i\bar{h}^{-1}\cdot\bar{u}\cdot\bar{h}\oplus i h^{-1}\cdot\bar{\bar{u}}\cdot h = -(iu^{\dagger}\oplus i\bar{u}^{\dagger})$$

$$= -(iu\oplus -i\bar{u}) = -r$$

Kovariantní derivace na bundlu s U-symetrií

Def: rozšíření kov. der. na komplexně sdružené bundly

kov. der. D na $\mathbb{E}_L M = \mathbb{E} M$ se rozšiřuje na $\mathbb{E}_R M = \bar{\mathbb{E}} M$ podmínkou

$$\bar{D}\bar{\phi} = \overline{D\phi} \qquad \phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{E} M$$

společnou akci na $\mathbb{E}^{k_L k_R}_{l_L l_R} M$ budeme označovat D

můžeme psát

$$D = D_L \oplus D_R \qquad \text{kde } D_L \equiv D \text{ působí na } \mathbb{E}^{k_L}_{L l_L} M \text{ a } D_R = \bar{D} \text{ působí na } \mathbb{E}^{k_R}_{R l_L} M$$

v tomto smyslu $D = \bar{D}$

Pozn:

explicitně akci D na $\psi \in \mathbb{E}_R M$ můžeme napsat

$$D\psi = \bar{D}\psi = \overline{D\bar{\psi}}$$

$\uparrow$ pouze změna značení $D \to D \oplus \bar{D}$

Def: U-kov. derivace

mějme komplexní vekt. bundly $\mathbb{E}_L M$ a $\mathbb{E}_R M$ s hermit. str. $h_{\bar{A}B}$

kov. der. D na $\mathbb{E}^{k_L k_R}_{l_L l_R} M$ se nazývá konzistentní s hermitovskou strukturou, též U-kovariantní derivace, jestliže

$$D_m h_{\bar{A}B} = 0$$

což je ekvivalentní podmínce

$$\xi \cdot d\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_L = \langle D_\xi \phi_1, \phi_2 \rangle_L + \langle \phi_1, D_\xi \phi_2 \rangle_L \qquad \xi \cdot d\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_R = \langle D_\xi \psi_1, \psi_2 \rangle_R + \langle \psi_1, D_\xi \psi_2 \rangle_R$$

pro libovolné $\xi \in TM$ $\quad \phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{E}_L M \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{E}_R M$

Lema:

nechť E_A resp $\bar{E}_A$ je trivializace konzist. s hermit. str. $h_{\bar{A}B}$

nechť ∂ je příslušná souřadnicová der., tj. $\partial E_A = 0$ $\partial \bar{E}_A = 0$

pak ∂ je konzist. s hermit. str. h, tj U-derivace

$$\partial_m h_{\bar{A}B} = 0$$

důkaz

$$h_{\bar{A}B} = h_{\bar{K}L} E^{\bar{K}}_{\bar{A}} E^{L}_{B} \qquad \partial E^{\bar{K}}_{\bar{A}} = 0 \quad \partial E^{L}_{B} = 0 \quad h_{\bar{K}L} = \text{konst} \Rightarrow \partial h_{\bar{A}B} = 0$$

Def Rozdílový tenzor a vektorový potenciál

nechť $D, \tilde{D}$ jsou kov. der. na $\mathbb{E}^{k_1 k_2}_{l_1 l_2} M$

jejich rozdíl

$$\mathbb{A} = D - \tilde{D}$$

je pseudoderivace působící na bundlech $\mathbb{E}^{k_1 k_2}_{l_1 l_2} M$ generovaná akcí

na $\mathbb{E}_L M$ $\qquad \mathbb{A}_a \phi^M = D_a \phi^M - \tilde{D}_a \phi^M = i A_a{}^M{}_N \phi^N$ $\qquad$ resp.

na $\mathbb{E}_R M$ $\qquad \mathbb{A}_a \psi^{\bar{M}} = D_a \psi^{\bar{M}} - \tilde{D}_a \psi^{\bar{M}} = -i \bar{A}_a{}^{\bar{M}}{}_{\bar{N}} \psi^{\bar{N}}$

tenzor $A_a{}^M{}_N$ nazýváme rozdílový tenzor

je-li $\tilde{D} = \partial$ souřadnicová der. trivializace $\mathbb{E}_L M$, $\mathbb{E}_R M$ nazýváme $A_a{}^M{}_N$ vektorový potenciál vůči této trivializaci

Pozn: pozor na faktory "i" a "-i" v akci pseudoderivace na komplexně sdružených prostorech $\mathbb{E}_L M$ a $\mathbb{E}_R M$

viz též akci kalibrační algebry na $\mathbb{E}_L M$ a $\mathbb{E}_R M$

význam těchto faktorů plyne z následující věty

Věta:

jsou-li $D, \tilde{D}$ U-kovariantní der., rozdílový tenzor je hermit.

$$A_a^{+}{}^M{}_N = A_a{}^M{}_N$$

konkrétně, vekt. potenciál U-kov. derivace vůči trivializaci konzistentní s hermit. strukturou je hermitovský

důkaz:

$$\underbrace{D_a h_{\bar{M}N}}_{0} = \underbrace{\tilde{D}_a h_{\bar{M}N}}_{0} + i \bar{A}_a{}^{\bar{K}}{}_{\bar{M}} h_{\bar{K}N} - i A_a{}^K{}_N h_{\bar{M}K}$$

$$\Rightarrow \quad A_a{}^M{}_N = h^{-1\bar{K}M} \bar{A}_a{}^{\bar{L}}{}_{\bar{K}} h_{\bar{L}N} = A_a^{+}{}^M{}_N$$

Def: Tenzor křivosti

tenzor křivosti kov. der. D na komplex. vekt. bundlu definujeme s faktorem "i" resp. "−i" při akci na $\mathbb{E}_L M$ resp. $\mathbb{E}_R M$

$$i F_{ab} \cdot \phi = {}^D\!d_a {}^D\!d_b \phi = [D_a D_b - D_b D_a + T_{ab}^{k} D_k]\phi \qquad \text{pro } \phi \in \mathcal{S}ect\, \mathbb{E}_L M$$

$$-i \bar{F}_{ab} \cdot \psi = {}^D\!d_a {}^D\!d_b \psi = [D_a D_b - D_b D_a + T_{ab}^{k} D_k]\psi \qquad \text{pro } \psi \in \mathcal{S}ect\, \mathbb{E}_R M$$

na obecném tenzorovém bundlu je operátor křiv. pseudoderivace

$$\mathbb{F}_{ab} = {}^D\!d_a {}^D\!d_b = [D_a D_b - D_b D_a + T_{ab}^{k} D_k] \qquad \text{na } \mathbb{E}^{k \dots}_{l \dots} M$$

generovaná akcí na $\mathbb{E}_L M$, $\mathbb{E}_R M$ výše

zde T_{ab}^{k} je torze rozšíření ∇ na tečný prostor $\mathbb{T}^* M$

tenzor křivosti na tomto rozšíření nezávisí

Věta

tenzor křivosti U-kov. derivace D je hermitovský

$$F_{ab}^{\dagger} = F_{ab}$$

důkaz:

$Dh = 0$ pro U-kov. derivaci $\Rightarrow$ $DDh = 0$ $\Rightarrow$ $[D_a D_b - D_b D_a + T_{ab}^{k} D_k] h = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = \mathbb{F}_{ab}\, h_{\bar{A}B} = i \bar{F}_{ab}{}^{\bar{K}}{}_{\bar{A}}\, h_{\bar{K}B} - i F_{ab}{}^{K}{}_{B}\, h_{\bar{A}K}$$

$$\Rightarrow \quad F_{ab}{}^{A}{}_{B} = h^{-1 \bar{K}A}\, \bar{F}_{ab}{}^{\bar{L}}{}_{\bar{K}}\, h_{\bar{L}B} = F^{\dagger}_{ab}{}^{A}{}_{B}$$

Def: kalibrační transf. kov. der.

kalibr. transf. kov. der. na komplex. bundu je dána podmínkou

$$\tilde{D}\,\tilde{\Phi} = \widetilde{D\Phi}$$

Věta:

při akci unitární kalibrační transformace na U-kov. derivaci na komplexním vekt. bundlu se různé objekty transformují následovně

$$\tilde{D} = D + \Lambda \qquad \Lambda \text{ generováno } i\lambda = -(DU)\cdot U^{\dagger} \text{ na } E_L M$$

$$\tilde{A} = U\cdot A\cdot U^{\dagger} + i(\partial U)\cdot U^{\dagger}$$

$$= A + i\,(DU)\cdot U^{\dagger} = A + i\,U^{\dagger}\cdot(\tilde{D}U)$$

kde $D = \partial + iA$ na $E_L M$

$\tilde{D} = \partial + i\tilde{A}$ na $E_L M$

$$\tilde{F} = U\cdot F\cdot U^{\dagger}$$

srovnej s reálným případem s uvážením konvence

$A \to iA \quad F \to iF \quad U^{-1} = U^{\dagger}$