U(1) kalibrační symetrie a nabitá pole

Vektorové prostory s U(1) symetrií

$\mathbb{C} \equiv \mathbb{C}_L$ a $\bar{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{C}_R$ sdružené komplexní vekt. prostory $\mathbb{C}$-dim $= 1$

$\mathbb{C}^{k_L k_R}_{l_L l_R}$ příslušné tenzorové prostory – všechny $\mathbb{C}$dim $= 1$

$h_{\bar{A}\bar{B}}$ hermitovská struktura definující sk. součin na $\mathbb{C}$ a $\bar{\mathbb{C}}$

U(1) kalibrační transformace – transformace zachovávající skalární součin

jelikož jsou všechny prostory $\mathbb{C}^{k_L k_R}_{l_L l_R}$ $\mathbb{C}$-dim $= 1$, jsou isomorfní jako vektorové prostory
mohou se ale lišit akcí kalibrační transf. na nich

ztotožníme ty prostory, na nichž kalibr. transf působí stejně

kanonické ztotožnění nemění akci kalibr. transf.

- stopa $\mathbb{C}^{k+1}_{l+1} \leftrightarrow \mathbb{C}^{k}_{l}$ resp. $\bar{\mathbb{C}}^{k+1}_{l+1} \leftrightarrow \bar{\mathbb{C}}^{k}_{l}$

  $\phi^{\dots A\dots}_{\dots B\dots} \to \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} = \phi^{\dots M\dots}_{\dots M\dots}$ inverze: $\tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} \to \phi^{\dots A\dots}_{\dots B\dots} = \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots}\, \mathbb{1}^{A}_{B}$

  umožňuje "kanonizovat" objekty z $\mathbb{C}^{k}_{l}$ na $\mathbb{C}^{k-l}_{0}$ nebo $\mathbb{C}^{0}_{l-k}$

- hermit. forma $\mathbb{C}^{k+1\,l+1}_{p\,q} \leftrightarrow \mathbb{C}^{kl}_{pq}$ resp. $\mathbb{C}^{kl}_{p+1\,q+1} \leftrightarrow \mathbb{C}^{kl}_{pq}$

  $\phi^{\dots\bar{A}\dots B\dots}_{\dots} \to \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} = \phi^{\dots\bar{A}\dots B\dots}_{\dots}\, h_{\bar{A}B}$ inverze $\tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} \to \phi^{\dots\bar{A}\dots B\dots}_{\dots} = \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots}\, h^{-1\bar{A}B}$

  $\phi_{\dots\bar{A}\dots B\dots} \to \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} = \phi_{\dots\bar{A}\dots B\dots}\, h^{-1\bar{A}B}$ inverze $\tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} \to \phi_{\dots\bar{A}\dots B\dots} = \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots}\, h_{\bar{A}B}$

  umožňuje "kanonizovat" objekty z $\mathbb{C}^{kl}_{pq}$ na $\mathbb{C}^{k-l\;0}_{p\;q}$ nebo $\mathbb{C}^{0\;l-k}_{p\;q}$
  případně z $\mathbb{C}^{kl}_{pq}$ na $\mathbb{C}^{kl}_{p-q\;0}$ nebo $\mathbb{C}^{kl}_{0\;q-p}$

- transpozice $\mathbb{C}^{k+1\,l}_{p\;q} \leftrightarrow \mathbb{C}^{kl}_{p\,q+1}$ resp. $\mathbb{C}^{k\,l+1}_{p\;q} \leftrightarrow \mathbb{C}^{kl}_{p+1\,q}$

  $\phi^{\dots A\dots}_{\dots} \to \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots\bar{B}\dots} = \phi^{\dots A\dots}_{\dots}\, h_{A\bar{B}}$ inverze $\tilde{\phi}^{\dots}_{\dots\bar{B}\dots} \to \phi^{\dots A\dots}_{\dots} = h^{-1A\bar{B}}\, \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots\bar{B}\dots}$

  $\phi^{\dots\bar{A}\dots}_{\dots} \to \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots B\dots} = \phi^{\dots\bar{A}\dots}_{\dots}\, h_{\bar{A}B}$ inverze $\tilde{\phi}^{\dots}_{\dots B\dots} \to \phi^{\dots\bar{A}\dots}_{\dots} = h^{-1\bar{A}B}\, \phi^{\dots}_{\dots B\dots}$

  umožňuje "kanonizovat" objekty z $\mathbb{C}^{k,l}_{p,q}$ na $\mathbb{C}^{k+q\;l+p}_{0\;\;0}$

kombinace dvou těchto transf. je ekvivalentní třetí kombinací těchto operací lze vždy nalézt "kanonický" izomorfní prostor následujícího typu

$$\mathbb{C}^{kl}_{pq} \rightarrow \begin{cases} \mathbb{C}^{m\,0}_{0\,0} & \mathbb{C}^{m} \\ \mathbb{C}^{0\,0}_{0\,0} \equiv \mathbb{C} \quad \text{budeme značit} & \mathbb{C}^{0} \qquad \text{kde } m \in \mathbb{N} \\ \mathbb{C}^{0\,m}_{0\,0} & \mathbb{C}^{-m} \end{cases}$$

budeme říkat že prostor $\mathbb{C}^n$ odpovídá náboji n

lze lehce ověřit, že tenz. násobení indukuje operaci

násobení $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n+m}$ $\qquad \phi \in \mathbb{C}^n \;\; \psi \in \mathbb{C}^m \Rightarrow \phi\psi \in \mathbb{C}^{n+m}$

operace sdružení převrací náboj

$\bar{\;}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{-n}$ $\qquad \phi \in \mathbb{C}^n \Rightarrow \bar{\phi} \in \mathbb{C}^{-n}$

skalární součin dává číslo, tj. objekt náboje 0

$\langle \phi, \psi \rangle = \bar{\phi}\psi \in \mathbb{C}^0 \qquad \phi, \psi \in \mathbb{C}^n$

lze definovat celočíselné mocniny

p-tá mocnina: $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{pn}$ $\qquad \phi \in \mathbb{C}^n \Rightarrow \phi^p \in \mathbb{C}^{pn}$

U(1) kalibrační transformace na $\mathbb{C}$

$U^A{}_B \in \mathbb{C}^{1\,0}_{1\,0}$ $\qquad$ zachovávající skal. součin

$\Downarrow$

$U \in \mathbb{C}^0 = \mathbb{C} \qquad \bar{U}U = 1$

$\Downarrow$

$U = \exp(iu) \qquad u \in \mathbb{R}$

akce kalibr. symetrie na $\mathbb{C}^n$

na $\mathbb{C}^{kl}_{pq}$ kalibr. sym. působí $\underbrace{U\cdots}_{k}\underbrace{\bar{U}\cdots}_{l}\underbrace{U^{-1}\cdots}_{p}\underbrace{\bar{U}^{-1}}_{q}\phi$

$\Downarrow$

na $\mathbb{C}^n$ kalibr. sym. působí $U^n\phi$ tj.

$$\phi \in \mathbb{C}^n \rightarrow \tilde{\phi} = U^n \phi = \exp(inu)\,\phi$$

volba báze

$E \in \mathbb{C}^1 \qquad \bar{E}E = 1$

$\phi \in \mathbb{C}^1 \Rightarrow \phi = \varphi E \qquad \varphi \in \mathbb{C}$

$\psi \in \mathbb{C}^n \Rightarrow \psi = \psi E^n \qquad \psi \in \mathbb{C}$

Nabitá pole a derivace na nich

$\mathbb{C}^m M$ vektorové bundly se standardními fibry $\mathbb{C}^n$ $n \in \mathbb{Z}$

$\phi \in \operatorname{Sect} \mathbb{C}^m M$ nazýváme nabité pole náboje m

na $\mathbb{C}^m M$ jsou definovány všechny struktury z $\mathbb{C}^m$ tj.

pro $\phi \in \operatorname{Sect} \mathbb{C}^m M$ $\quad \psi \in \operatorname{Sect} \mathbb{C}^n M$

- násobení $\quad \phi\psi \in \operatorname{Sect} \mathbb{C}^{m+n} M$
- mocnina $\quad \phi^p \in \operatorname{Sect} \mathbb{C}^{pm} M$
- nábojové sdružení $\quad \bar{\phi} \in \operatorname{Sect} \mathbb{C}^{-m} M$
- fibrový sk. součin $\quad \langle \phi, \psi \rangle = \bar{\phi}\psi \in \mathcal{F}M$ $\quad$ pro $m = n$

lokální kalibrační grupa

kalibrační transf. je dána komplexní fází v každém bodě M

$$U(x) = \exp(i\, u(x)) \qquad u \in \mathcal{F}M \text{ (reálné)}$$

akce kalibrační grupy na $\mathbb{C}^n M$

$$\phi \in \operatorname{Sect} \mathbb{C}^n M \quad \longrightarrow \quad \tilde{\phi} = U^n \phi$$

$U(1)$ kovariantní derivace na $\mathbb{C}^n M$

D kov. der. na vekt. bundlech $\mathbb{C}^n M$ splňující

$$D(\phi\psi) = (D\phi)\psi + \phi(D\psi)$$

$$D\bar{\phi} = \overline{D\phi} \qquad \text{tj. } D = \bar{D}$$

derivace na $\mathbb{C}^m M$

derivace na $\mathbb{C}^{-m} M$

zajišťuje konzistenci s hermitovskou strukturou

$$d(\bar{\phi}\psi) = (\overline{D\phi})\psi + \bar{\phi}(D\psi) \qquad \phi, \psi \in \operatorname{Sect} \mathbb{C}^m M$$

$\Updownarrow$

$$d\langle \phi, \psi \rangle = \langle D\phi, \psi \rangle + \langle \phi, D\psi \rangle$$

trivializace na $\mathbb{C}^n M$

E jednotkové báze v $\operatorname{Sect} \mathbb{C}^1 M$ $\qquad \bar{E}E = 1$

E^n báze pro nabité pole náboje n, tj. v $\operatorname{Sect} \mathbb{C}^n M$

$\phi = \varphi E^n$ $\qquad \varphi$ komplexní fce na M

rozdíl dvou kov. derivací

$D, \tilde{D}$ kov. der. na $\mathbb{C}^1 M$

$D_{\underline{m}} - \tilde{D}_{\underline{m}} = \mathbb{A}_{\underline{m}}$ pseudoderivace indukovaná rozdílový tenzorem $iA_{\underline{m}}$

$D_{\underline{m}}\phi - \tilde{D}_{\underline{m}}\phi = iA_{\underline{m}}\phi$ pro $\phi \in \mathrm{Sect}\,\mathbb{C}^1 M$

$\Downarrow$

$D_{\underline{m}}\psi - \tilde{D}_{\underline{m}}\psi = \mathbb{A}_{\underline{m}}\psi = i m A_{\underline{m}}\psi$ pro $\psi \in \mathrm{Sect}\,\mathbb{C}^m M$

$A_{\underline{m}} \in TM$ rozdílový tenzor je nenabitý! vskutku, měl by být $A_{\underline{m}}{}^{k}{}_{l}$ což je pole náboje 0

$A^*_{\underline{m}} = A_{\underline{m}}$ rozdílový tenzor je reálný (hermit. v dim = 1) to je důvod pro volbu prefaktoru "i"

často se z rozdílového tenzoru vyjme ještě konstantní prefaktor e charakterizující velikost elementárního náboje

$$D\phi - \tilde{D}\phi = ieA$$

vektorový potenciál

E trivializace a ∂ souř. derivace $\partial E = 0$

kov. der. D na $\mathbb{C}^n M$ je dána vekt. potenciálem A_a vůči ∂

$$D_a\phi = \partial_a\phi + i m A_a\phi \qquad \text{pro } \phi \in \mathrm{Sect}\,\mathbb{C}^n M$$

tenzor křivosti

D kov. der. na $\mathbb{C}^n M$ rozšířená na TM pomocí ∇ s torzí T

operátor křivosti $\mathbb{F}_{ab}$

$$\mathbb{F}_{ab} = {}^{D}d_a\,{}^{D}d_b = [D_a D_b - D_b D_a + T^c{}_{ab} D_c]$$

je pseudoderivace generovaná tenzorem křivosti F_{ab}

$$\mathbb{F}_{ab}\phi = i m F_{ab}\phi \qquad \text{pro } \phi \in \mathrm{Sect}\,\mathbb{C}^n M$$

$F_{ab} \in A^2 M$ je nenabitý (náboj 0) reálný (hermit. v dim = 1)

pro $D = \partial + A_a$ dané vekt. potenciálem A_a vůči ∂ máme

$$F_{mn} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nenabité} \\ {}^{\partial}d = d}}{{}^{\partial}d_m A_n} + i\underbrace{[A_m, A_n]}_{\substack{0 \\ \text{plyne z } \dim \mathbb{C} = 1}} = d_m A_n$$

kalibrační transformace kov. derivace

$\phi \to \tilde{\phi} = U^m \phi \qquad \phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^n M \qquad U = \exp(iu)$

$D_a \to \tilde{D}_a = D_a + \Lambda_a \qquad \Lambda_a$ generováno $i\Lambda_a$

$\tilde{D}$ je dáno podmínkou

$\widetilde{D\phi} = \tilde{D}\tilde{\phi} \quad \underset{\text{obecná teorie}}{\Longrightarrow} \quad i\Lambda = -(DU)\cdot U^{-1} = -i\,du$

$\Downarrow$

$\tilde{D}\phi = D\phi - im\,du\,\phi \qquad \phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^n M$

transformace vekt. potenciálu vůči fixní ∂

$A \to \tilde{A} = U\cdot A\cdot U^{-1} + i(\partial U)\cdot U^{-1}$ (obecná teorie)

$= A - du$

transformace tenzoru křivosti

$F \to \tilde{F} = U\cdot F\cdot U^{-1}$ (obecná teorie)

$= F$

veličiny, A, F, U jsou náboje 0, tj. čísla, která komutují

Elektromagnetické pole jako kalibrační pole

M prostoročas s metrikou g_{ab} a Levi-Civitovou der. ∇_a

$\mathbb{C}^m M$ bundly nabitých polí náboje $m \in \mathbb{Z}$

$\phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^m M$ nabité pole

D_a kov. derivace na $\mathbb{C}^m M$ = kalibrační pole

D lze použít pro popis elektromagnetického pole

A_a vekt. potenciál D vůči trivializaci ∂

A_a je 4-potenciál EM pole

F_{ab} tenzor křivosti = Maxwellův tenzor EM pole

$$F_{ab} = d_a A_b$$

působení D na $\phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^m M$

$$D_a \phi = \partial_a \phi + i m A_a \phi$$

kalibrační transformace

$$\phi \to \tilde{\phi} = \exp(imu)\, \phi$$

$$D \to \tilde{D} = D - im\, du \qquad \text{při působení na } \mathbb{C}^m M$$

$$A_a \to \tilde{A}_a = A_a - d_a u$$

$$F_{ab} \to \tilde{F}_{ab} = F_{ab}$$

pohybové rovnice

$$F_{ab} = d_a A_b \qquad \Leftrightarrow \qquad d_a F_{bc} = 0$$

$$\nabla_m F^{am} = J^a$$

$$g^{mn} D_m D_n \phi - M^2 \phi = 0$$

$$J_a = im(\bar{\phi} D_a \phi - \phi D_a \bar{\phi}) \qquad \phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^m M$$