Opakování z Lieových algeber

G poloprostá Lieova grupa $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ poloprostá Lieova algebra

$\mathfrak{g}$ poloprostá $\Rightarrow$

ad věrná repr. $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}$

k nedegenerovaná metrika na $\mathfrak{g}$

$\mathrm{Der}\,\mathfrak{g} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$

$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ → algebra operátorů tvaru ad_m $m \in \mathfrak{g}$

$\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ → algebra operátorů δ splňujících
$$\delta[m,n] = [\delta m, n] + [m, \delta n]$$

vždy platí $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \subset \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ ($\Leftarrow$ Jacobiho identita)

pro poloprostou $\mathfrak{g}$ $\delta \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \Rightarrow \exists\, m \in \mathfrak{g}$ $\delta = \mathrm{ad}_m$

T reprezentace grupy G na vekt. prostoru A tj. $h \in G \to T_h \in A^1_1$

t odpovídající repr. alg. $\mathfrak{g}$ na vekt. prostoru A tj. $m \in \mathfrak{g} \to t_m \in A^1_1$

$\mathfrak{g}$ poloprostá, A konečně dimenzionální $\Rightarrow$

t je plně reducibilní reprezentace, tj.

$$A = \bigoplus_{r=0}^{k} A_r \qquad P_r \text{ projektor na } A_r$$

$$t = \bigoplus_{r=0}^{k} t_r \qquad t_r = P_r \cdot t \cdot P_r \quad \text{zúžení } t \text{ na } A_r$$

kde $t_0 = 0$ triviální

$r > 0$ t_r ireducibilní

Schurovo lemma

$$\forall m \in \mathfrak{g} \ [S, t_m] = 0 \quad \Rightarrow \quad S = S_0 + \sum_{r=1}^{k} s_r P_r \qquad S_r = P_r S P_r$$

tj. na každé ireducib. komponentě A_r je S úměrné jednotce P_r na A_r

na A_0 je S neurčené

Vše lze přímočaře zmodifikovat pro redukovatelnou alg. $\mathfrak{g}$

tj. pro algebru splňující

$A = Z \oplus S$ Z centrum A S poloprostá

Lokální kalibrační grupa a algebra

Def: Lokální kalibrační grupa a algebra

nechť G je Lieova grupa a g její Lieova algebra
nechť M je podkladová varieta

GM je grupový bundle ~~se~~ standardní fibre G
s grupovou strukturou indukovanou z G

gM je vektorový bundl se standardní fibre g
se strukturou Lieovy algebry indukovanou z g,
realizovaný jako $g_x M = T_e G_x M$ (tečný pr. $G_x M$ v e)
tj. máme Lieovy záv. a strukturní tenzor

$$[m, n]^\alpha = m^\mu n^\nu c_{\mu\nu}{}^\alpha \qquad m, n \in gM \quad c \in g^1_{[2]} M$$

a Killingovu metriku

$$k_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} c_{\alpha\mu}{}^\nu c_{\beta\nu}{}^\mu$$

Lokální kalibrační grupa je prostor řezů GM
$\mathrm{Sect}\, GM$ tj. $h(x) \in G_x M \quad \forall x \in M$

Lokální kalibrační algebra je prostor řezů gM
$\mathrm{Sect}\, gM$ tj. $m^\alpha(x) \in g_x M \quad \forall x \in M$

Věta
nechť G je poloprostá Lieova gr., g její Lieova algebra
a GM, gM příslušné fibrované bundly nad M
⇓
adjoint reprezentace Ad je věrná ultralokální
reprezentace GM na gM

$$Ad_h : gM \to gM \qquad \text{tj. } Ad_h \in \mathrm{Sect}\, g^1_1 M \text{ pro } h \in \mathrm{Sect}\, GM$$

$$Ad_{h_1 h_2} = Ad_{h_1} Ad_{h_2} \qquad Ad_{h^{-1}} = Ad_h^{-1}$$

strukturní tenzor je invariantní vůči Ad_h tj.

$$Ad_h [m, n] = [Ad_h m, Ad_h n] \quad \Leftrightarrow \quad Ad_h c = c$$

Věta

nechť G je polojednoduchá Lieova gr., $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra a $GM, \mathfrak{g}M$ příslušné fibrované bundly nad M

$\Downarrow$ adjoint reprezentace ad je věrná ultralokální reprezentace $\mathfrak{g}M$ na $\mathfrak{g}M$

$$ad_m : \mathfrak{g}M \to \mathfrak{g}M \quad \text{tj } ad_m \in \mathrm{Sect}\, \mathfrak{g}^1_1 M \quad \text{pro } m \in \mathrm{Sect}\,\mathfrak{g}M$$

kde

$$ad_m{}^{\varepsilon}{}_{\gamma} = m^{\alpha} c_{\alpha\gamma}{}^{\varepsilon} \quad \text{tj} \quad ad_m\, n = [m, n]$$

a platí

$$ad_m [n_1, n_2] = [ad_m\, n_1, n_2] + [n_1, ad_m\, n_2]$$

(plyne z Jacobiho identity, ekvivalentní $ad_m c = 0$)

z polojednoduchosti plyne, že každá lineární ultralokální operace δ splňující Leibnizovo pravidlo

$$\delta [n_1, n_2] = [\delta n_1, n_2] + [n_1, \delta n_2]$$

musí být tvaru

$$\delta = ad_m \qquad \text{pro nějaké } m \in \mathrm{Sect}\,\mathfrak{g}M$$

Def: Trivializace kompatibilní s kalibrační algebrou

nechť GM a $\mathfrak{g}M$ jsou bundly kalibrační grupy a algebry

Trivializace $\mathfrak{g}M$ kompatibilní s kalibrační algebrou je volba báze l_α v $\mathfrak{g}M$ taková, že

$$c_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \text{konst} \quad (\text{na } M)$$

kde $c_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ jsou komponenty strukt. tenzoru v této bázi

$$[l_\alpha, l_\beta] = c_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\, l_\gamma$$

Zřejmě též platí

$$k_{\alpha\beta} = \text{konst.}$$

Pozn:
Konstantnost $c_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ je míněna na podkladové varietě M ta lze samozřejmě též levoinvariantně rozšířit na $G_x M$ a pak budou komponenty strukt. tenz. konstantní i na $G_x M$

Kovariantní derivace na kalibrační algebře

Def: kov. der. konzistentní se strukturou kalibr. algebry
nechť gM je vektorový bundl kalibrační algebry
kovariantní der. D je konzistentní se strukt. kalibr. algebry pokud

$$Dc = 0$$

což je ekvivalentní podmínce

$$D[m, n] = [Dm, n] + [m, Dn]$$

(s užitím $[m,n]^\alpha = m^\mu n^\nu c_{\mu\nu}{}^\alpha$)

Lemma

D je konzistentní se strukt. kalibr. algebry

$\Downarrow$ $Dk = 0$

Důk: plyne z $k_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} c_{\alpha\mu}{}^\nu c_{\beta\nu}{}^\mu$ a $D_{\underline{m}} c_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$

Lemma

l_α je trivializace na kalibr. algebře gM a
∂ je příslušná souř. derivace $\quad \partial l_\alpha = 0$

$\Downarrow$ ∂ je konzistentní se strukt. kalibr. algebry

$$\partial_{\underline{m}} c_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0 \qquad \partial_{\underline{m}} k_{\alpha\beta} = 0$$

Důk:

plyne z $\quad c_{\alpha\beta}{}^\gamma = c_{\mu\nu}{}^\rho \, l^\mu_\alpha \, l^\nu_\beta \, l^\gamma_\rho \quad$ a

$\partial_{\underline{m}} l^\alpha_\rho = 0 \quad \partial_{\underline{m}} l^\rho_\alpha = 0 \quad c_{\mu\nu}{}^\rho = \text{konst.} \quad$ kde l^μ_α je duální k l^α_μ

Věta Rozdíl kov. der. na $\mathfrak{g}M$

nechť D, $\tilde{D}$ jsou kov. derivace konzist. s kal. algebrou
$\Rightarrow$ rozdílový tenzor $A_{\underline{m}}{}^{k}{}_{\underline{\lambda}}$ generující pseudoderivaci

$$\mathbf{A}_{\underline{m}} = D_{\underline{m}} - \tilde{D}_{\underline{m}}$$

splňuje

$$A_{\underline{a}} \cdot [m, n] = [A_{\underline{a}} \cdot m, n] + [m, A_{\underline{a}} \cdot n]$$

(kde vynecháváme i-dexy na $\mathfrak{g}M$)

pro poloprostou algebru $\mathfrak{g}$ existuje $\mathcal{R}_{\underline{a}}^{k} \in \mathrm{Sect}\, \mathfrak{g} \otimes T^*M$ tak

$$A_{\underline{a}}{}^{k}{}_{\gamma} = \mathrm{ad}_{\mathcal{R}_{\underline{a}}}{}^{k}{}_{\gamma} = \mathcal{R}_{\underline{a}}^{k}\, c_{\kappa\gamma}{}^{k}$$

Důk:

D i $\tilde{D}$ splňují Leibniz. pravidlo, tj. i $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}_{\underline{a}} [m, n] = [\mathbf{A} m, n] + [m, \mathbf{A} n]$$

akce pseudoderivace $\mathbf{A}_{\underline{a}}$ na $\mathfrak{g}M$ je pomocí $A_{\underline{a}}$ $\mathbf{A}_{\underline{a}} m = A_{\underline{a}} \cdot m$

pro poloprostou alg. máme $\mathrm{Der}\, \mathfrak{g} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$

Věta

nechť ∂ je souř. derivace trivializace kalibr. algebry a $A_{\underline{a}}{}^{k}{}_{\gamma}$ je nekt. potenciál vygenerovaný z $\mathcal{R}_{\underline{a}}^{\kappa} \in \mathrm{Sect}\, \mathfrak{g} \otimes T^*M$

$$A_{\underline{a}}{}^{k}{}_{\gamma} = \mathcal{R}_{\underline{a}}^{k}\, c_{\kappa\gamma}{}^{k} \qquad \text{tj.} \quad A = \mathrm{ad}_{\mathcal{R}}$$

pak kov. derivace

$$D = \partial + \mathbf{A}$$

je konzistentní se strukturou kalibr. algebry

Důk:

∂ i $\mathbf{A}$ splňují Leibniz. pravidlo, tedy i D

Akce $\mathcal{D}$ na gM lze pak psát

$B^k \in \mathcal{S}ect\, gM$

$$\mathcal{D}_a B^k = \partial_a B^k + [\mathfrak{A}_a, B]^k \leftarrow \text{Lieova závorka}$$

$B^\mu{}_\nu \in \mathcal{S}ect\, g^1_1 M \qquad B^\mu{}_\nu = B^k c_{k\nu}{}^\mu \quad$ tj. $\quad B = ad_B$

$$\mathcal{D}_a B^\mu{}_\nu = \partial_a B^\mu{}_\nu + \underbrace{[A_a, B]^\mu{}_\nu}_{\text{komutátor}} = (\underbrace{\partial_a B^k + [\mathfrak{A}_a, B]^k}_{\text{Lieova závorka}})\, c_{k\nu}{}^\mu$$

Věta: Tenzor křivosti na kalibrační algebře

$\mathcal{D}_a$ kov. der. konzistentní s kalibr. algebrou

$F_{ab}{}^\mu{}_\nu$ tenzor křivosti $\mathcal{D}_a$

platí

$\mathbb{F}_{ab}\, c = 0 \qquad$ tj. $\qquad F_{ab} \cdot [m, n] = [F_{ab} \cdot m, n] + [m, F_{ab} \cdot n]$

pro poloprostou algebru g existuje $\mathfrak{F}_{ab}^k$ takové, že

$F_{ab}{}^\mu{}_\nu = \mathfrak{F}_{ab}^k\, c_{k\nu}{}^\mu \qquad$ tj. $\qquad F = ad_{\mathfrak{F}}$

Důk.

$\mathcal{D}c = 0 \Rightarrow \mathcal{D}\mathcal{D}c = 0 \Rightarrow \mathbb{F}c = 0 \Rightarrow F_{ab}{}^k{}_\lambda\, c_{\mu\nu}{}^\lambda - F_{ab}{}^\lambda{}_\mu\, c_{\lambda\nu}{}^k - F_{ab}{}^\lambda{}_\nu\, c_{\mu\lambda}{}^k = 0$

$\Rightarrow F \cdot [m, n] = [F \cdot m, n] + [m, F \cdot n] \qquad$ díky $\; [m, n]^k = m^\mu n^\nu c_{\mu\nu}{}^k$

Příklady akce operátoru křivosti:

$\mathbb{F}_{ab} B^k = F_{ab}{}^k{}_\lambda B^\lambda = [\mathfrak{F}_{ab}, B]^k \qquad\qquad B^\mu{}_\nu = B^k c_{k\nu}{}^\mu$

$\mathbb{F}_{ab} B^\mu{}_\nu = [F_{ab}, B]^\mu{}_\nu = [\mathfrak{F}, B]^k c_{k\nu}{}^\mu$

Věta:

D kov. der. na gM daná potenciálem $A = \mathrm{ad}_{\mathfrak{X}}$ vůči trivializaci ∂ a $F = \mathrm{ad}_{\mathfrak{F}}$ je tenzor křivosti D vůči konzistentní se strukt. kalibrační algebry

$\Downarrow$

$$F_{ab}{}^{\kappa}{}_{\nu} = \partial_{[a} A_{b]}{}^{\kappa}{}_{\nu} + [A_a, A_b]^{\kappa}{}_{\nu} = \partial_a \wedge A_b{}^{\kappa}{}_{\nu} + [A_a, A_b]^{\kappa}{}_{\nu}$$

$$\mathfrak{F}_{ab}{}^{\kappa} = \partial_{[a} \mathfrak{X}_{b]}{}^{\kappa} + [\mathfrak{X}_a, \mathfrak{X}_b]^{\kappa} = \partial_a \wedge \mathfrak{X}_b{}^{\kappa} + [\mathfrak{X}_a, \mathfrak{X}_b]^{\kappa}$$

kde v druhých výrazech jsme rozšířili ∂ na T^*M pomocí derivace bez torze (např. Levi-Civit. der. ∇)

Důk:

první řádek je obecná formule pro tenzor křivosti na vekt. bundlu

druhý řádek plyne z

$$F_{ab}{}^{\kappa}{}_{\nu} = \mathfrak{F}_{ab}{}^{\kappa} c_{\kappa\nu}{}^{\mu} \qquad A_a{}^{\kappa}{}_{\nu} = \mathfrak{X}_a{}^{\kappa} c_{\kappa\nu}{}^{\mu}$$

$\partial_a c_{\mu\nu}{}^{\kappa} = 0$ a Jacobiho identita $\Rightarrow [\mathrm{ad}_{\mathfrak{X}}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{Y}}] = \mathrm{ad}_{[\mathfrak{X},\mathfrak{Y}]}$